A. HOLLINGER

Probleme de geometrie

pentru clasele VI—VIII

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ
Bucureşti

Staicu Manuela

S. MANUELA
A. HOLLINGER

Probleme de geometrie

pentru clasele VI—VIII

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
București, 1982

Referenți: *prof.* DUMITRA OROS
prof. MARCEL CHIRIȚĂ
prof. IOAN MITRACHE

Redactor: *prof.* VALENTIN RADU
Tehnoredactor: VICTORIA GHIMIȘ
Grafician: NICOLAE SÎRBU

Prefață

1. Lucrarea de față are ca punct de plecare o anumită idee despre predarea geometriei în școala generală.

Dacă la aritmetică și algebră elevul mijlociu își însușește cel puțin un minim de cunoștințe și este capabil să le aplice, sînt foarte mulți elevi care nu se aleg aproape cu nimic din tot ce li se predă la geometrie. Este adevărat că există o deosebire esențială între formele de activitate care se cer elevilor la aceste două părți ale matematicii: la prima predomină aspectul algoritmic, iar la a doua raționamentul. Totuși consider că această inegalitate a rezultatelor se datorește și modului de predare. La aritmetică și algebră, ca elevul să-și însușească un lucru oarecare, el este pus să-l repete de foarte multe ori. De exemplu, ca să învețe regula de trei simplă, elevul este pus să rezolve multe probleme care diferă doar prin semnificația concretă a numerelor; ca să învețe să ridice un binom la pătrat, nu i se dă numai formula pentru $(a+b)^2$, ci el este pus să facă multe exerciții ca $(2x+1)^2$, $(3a-2b)^2$ etc. La geometrie, însă, după ce i se predă o teoremă sau un grup de teoreme, se trece imediat la probleme complexe în care elevul regăsește cu greu situația simplă, schematică a figurii care s-a folosit atunci cînd s-a predat teorema respectivă. Ideea despre care am spus că m-a determinat să alcătuiesc aceste Exerciții este de a folosi în predarea geometriei o metodă asemănătoare cu cea folosită la aritmetică și algebră, și anume de a propune elevilor numeroase exerciții simple, chiar foarte simple în comparație cu cele uzuale. Prin aceasta elevul se obișnuiește treptat cu diferite situații și urcă în pantă lină la probleme complexe. Astfel de exerciții nu prea există în cărțile pe care le cunosc; le-am compus. Pentru a da muncii elevului un ritm mai viu, am dat de cele mai multe ori și figura, ca elevul să poată trece imediat la rezolvare; ele sînt gîndite ca un fel de exerciții orale. În clasă, ele se pot lucra cu ajutorul unor planșe: profesorul prezintă figura pe o planșă pregătită dinainte sau face repede

figura pe tablă, enunță problema și se trece imediat la rezolvarea ei, care se face în cîteva cuvinte. Aceste probleme se găsesc la începutul fiecărui paragraf.

2. O altă idee a fost de a compune perechi sau chiar grupuri de probleme asemănătoare. La prima vedere ele par a fi repetiții, poate chiar inutile. Ele sînt puse intenționat, cu scopul următor: una din ele se rezolvă în clasă și cealaltă sau celelalte se dau ca temă pentru acasă. Am motive să cred că elevul mijlociu va putea să-și facă singur aceste teme, fără ajutorul părinților sau al meditatorilor. În felul acesta elevii învață treptat să facă demonstrații în loc să învețe soluții, ci au succese și succesul încurajează. În general, am căutat — și sper că am reușit în mare măsură — să propun probleme mai ușoare decît cele care se găsesc în lucrările similare.

3. Bineînțeles, nu m-am limitat la aceste probleme relativ ușoare. În lucrare se găsesc foarte multe probleme cunoscute, tradiționale. La multe din ele m-am abătut de la forma uzuală: în loc de „să se demonstreze că..." am pus o întrebare sau am cerut să se compare două unghiuri sau două segmente. Exemple: 2.3.14; 5.2.20; 6.3.7. Prin aceasta, problemele devin ceva mai grele — elevul șiret va ghici ușor răspunsul — dar se stimulează mai mult gîndirea elevilor. Totodată în multe cazuri am adîncit lucrurile în comparație cu ceea ce se face de obicei, cerînd să se considere diferite cazuri de figură. Exemple: 2.2.8; 3.2.25; 3.5.15. Acest mod de a pune problemele îmi pare util din două motive: în unele cazuri se obțin chiar rezultate diferite, dar în orice caz este interesant că apar două figuri cu totul diferite ca aspect, dar care au aceeași structură. Același text este valabil pentru două figuri diferite (izomorfism). În unele cazuri în care este vorba, în fond, de faptul că o anumită mărime este constantă, am cerut cînd este maximă sau minimă. Exemple: 5.2.17; 5.3.15; 9.1.15.

4. Spre deosebire de alte lucrări similare, am introdus multe probleme de maxim și minim. Experiența arată că elevii simt o mare atracție către acest fel de probleme. Afară de cele din capitolul 14, ele se găsesc și pe parcursul lucrării. Ca grad de dificultate problemele de maxim și minim sînt foarte diferite; dacă unele din ele sînt ușoare (exemple: 14.1.4; 14.1.13), altele sînt deosebit de grele (exemple: 14.1.10 — 14.1.12). Deosebit de interesantă îmi pare problema 5.3.16.

5. Poate părea surprinzător paragraful intitulat „Demonstrații indirecte". Demonstrațiile prin reducere la absurd joacă un rol deosebit în matematică și chiar în logică, de aceea

este util ca elevii să învețe să facă astfel de demonstrații. Acest paragraf are ca scop să le pună la dispoziție materialul necesar pentru exerciții. Atrag atenția asupra problemelor 15.1.9 și 15.1.10. Ele conțin forme ale raționamentului disjunctiv neglijate de obicei.

6. Capitolul „Unde e greșeala", deosebit de amplu, nu conține simple divertismente, cum s-ar putea crede. La acest capitol se atrage atenția asupra unor greșeli destul de răspîndite (v. 15.2.2 și 15.2.17), precum și asupra deficiențelor unor demonstrații care, preluate din Elementele lui Euclid, se găsesc în cărțile clasice de geometrie elementară (v. probl. 15.2.9). Problema 15.2.10 reia o temă foarte cunoscută, dar nu se mulțumește să arate în ce constă greșeala (v. observarea de la sfîrșitul acestei probleme). În sfîrșit, problemele 15.2.11 și 15.2.12 conțin capcane în care pot cădea matematicieni versați.

7. Problemele din cele trei capitole de geometrie în spațiu diferă de cele tradiționale prin faptul că am dat o pondere mai mică aflării ariilor și volumelor, în schimb am propus mai multe probleme cu un caracter mai larg, menite să contribuie la dezvoltarea imaginației spațiale. Atrag atenția în special asupra capitolului 11, în care se găsesc aplicații imediate la mai toate teoremele care se predau la prima parte de Geometrie în spațiu. Problemele de acest tip sînt, în general, prea grele pentru clasa a VIII-a, dar ele devin accesibile dacă se dau la început cîteva noțiuni despre prismă. Rezolvarea problemelor este ușurată dacă dreptele și planele despre care este vorba sînt legate de poliedre.

8. Socot că un mod util de a folosi aceste Exerciții la Cercul de matematică este următorul. Profesorul indică unui elev un grup de probleme apropiate pe care să le studieze singur din carte și apoi să le expună în fața colegilor. Exemple: a) Probleme de concurență sau coliniaritate bazate pe simetria paralelogramului: 5.2.40 — 46. b) Cîteva probleme de minim rezolvate pe baza simetriei: 14.1.9 — 14.1.12; sau cîteva probleme de maxim: 14.1.14 — 14.1.15. c) Cîteva demonstrații ale teoremei lui Pitagora: 10.4.4 — 10.4.6.

9. Toate problemele, afară de cele de construcție, sînt rezolvate. Deși soluțiile nu sînt totdeauna explicite, ci sugerate prin întrebări, nu sînt sigur că ele sînt necesare. Este posibil ca la o eventuală reeditare cele mai multe să fie suprimate sau reduse la indicații scurte.

10. Poate nu este de prisos să arăt cum am clasificat materialul. Fiecare problemă are trei „coordonate": prima indică capitolul, a doua paragraful și a treia numărul problemei. Astfel problema 12.2.10 indică capitolul 12, paragraful 2, problema 10.

11. Țin să exprim și aici mulțumirile mele referenților D. Oros și M. Chiriță. În special, toc. Oros Damitra, profesoară la liceul „I.L. Caragiale" din București, care a studiat cu atenție manuscrisul și, prin observațiile d-sale judicioase, a contribuit la îmbunătățirea lucrării.

București, mai 1981 AUTORUL

ENUNŢURI

Capitolul 1

GENERALITĂŢI. DREAPTA. UNGHIURI

1.1. Generalităţi

1.1.1. În cîte părţi se împarte planul dacă ducem: a) 2, 3, 4, ..., 100, ..., n drepte paralele? b) 2, 3, 4, ..., 100, ..., n drepte care trec prin acelaşi punct? c) 2, 3, 4, ..., 30, ..., m drepte paralele şi 2, 3, ..., 20, ..., n drepte paralele, dar care nu sînt paralele cu primele? d) 2, 3, ..., c drepte concurente şi 2, 3, ..., p drepte paralele care să nu fie paralele cu nici una din dreptele concurente şi să nu treacă prin intersecţia lor?

1.1.2. a) Cîte puncte de diviziune sînt necesare pentru a împărţi un segment în n părţi? b) Cum se poate împărţi un paralelogram în n paralelograme făcînd cît mai puţine tăieturi? Cîte tăieturi sînt necesare? Exemple: $n = 24$; $n = 50$; $n = 64$.

1.1.3. În figura 3, se vede un patrulater şi un triunghi. Să se haşureze (coloreze) intersecţia lor[1].

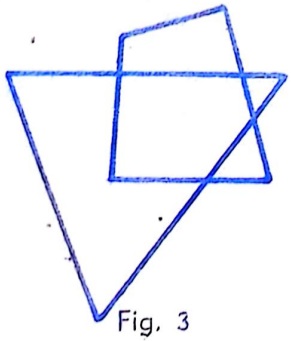


Fig. 3

[1] Aici şi în exerciţiile următoare se înţelege prin triunghi, patrulater etc. laturile şi partea din plan mărginită de ele.

1.1.4. În figura 4, se văd două patrulatere $ABCD$ şi $EFGH$. Să se haşureze (coloreze) intersecţia lor.

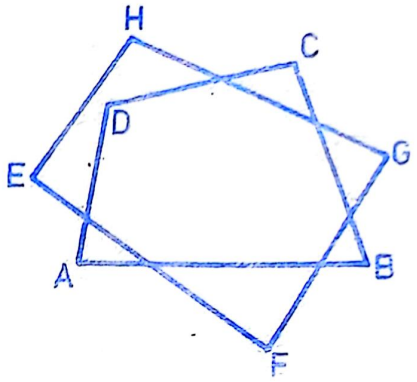


Fig. 4

1.1.5. Să se deseneze două triunghiuri astfel încît intersecţia lor să fie: a) un triunghi; b) un patrulater; c) un pentagon (un poligon cu 5 laturi); d) un hexagon.

1.1.6. Să se deseneze un cerc şi un triunghi astfel încît intersecţia laturilor triunghiului cu cercul să fie format din 2, 3, 4, ... puncte. Care este numărul maxim de puncte pe care le poate avea intersecţia?

1.1.7. Un poligon convex (fig. 5) cu n laturi se taie cu o dreaptă. Se obţin astfel două poligoane; fie p numărul total al laturilor lor. Ce relaţie există între numerele n şi p? Trei cazuri: a) cînd tăietura trece prin două vîrfuri

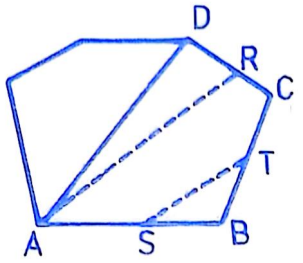


Fig. 5

ale poligonului; b) printr-un singur vîrf al poligonului; c) prin nici un vîrf al poligonului.

1.2. Dreapta

1.2.1. Fie xy o dreaptă, A și B două puncte fixe ale ei și M un punct care se mișcă pe ea (fig. 6). a) Cum variază*

Fig. 6

suma $MA + MB$ cînd punctul M se mișcă pe segmentul AB? b) Cum variază diferența $MA - MB$ cînd punctul M se mișcă pe semidreapta By? c) Cum variază diferența $MB - MA$ cînd punctul M se mișcă pe semidreapta Ax?

1.2.2. Două localități A și B sînt legate printr-o șosea. Într-un punct M de pe șosea situat între A și B trebuie înființat un depozit care să aprovizioneze ambele localități. Un camion va pleca încărcat din M, se va duce pînă la A, se va întoarce gol pînă la M, se va încărca, se va duce pînă la B unde se va descărca și va reveni gol în M, apoi va relua totul de la început. Unde trebuie să fie punctul M pentru ca: a) partea din drum pe care camionul o parcurge gol să fie minimă; b) drumul total să fie minim?

* adică suma crește sau scade?

1.2.3. Fie A, B și M trei puncte ale aceleiași drepte. Ce operație trebuie făcută cu segmentele MA și MB ca rezultatul să fie AB?

1.2.4. a) A, B și C sînt puncte ale aceleiași drepte, $AB = 7$ cm, $BC = 2$ cm. Se cere lungimea segmentului AC. b) De asemenea dacă $AB = 7$ cm, $BC = 10$ cm.

1.2.5. A, B și C sînt puncte ale aceleiași drepte, B între A și C, $AB = 4$ cm, $BC = 6$ cm. Fie M mijlocul segmentului AB și N mijlocul segmentului BC. Să se afle lungimea segmentului MN. Aceeași problemă dacă $AB = a$, $BC = b$.

1.2.6. A, B și C sînt puncte ale aceleiași drepte, B între A și C. Segmentul AB se împarte în 3 părți congruente prin punctele M și N, M mai aproape de A, și BC se împarte de asemenea în 3 părți congruente prin punctele P și Q, P mai aproape de B. Să se afle lungimile segmentelor MN, MP, MQ, NP și NQ, dacă: a) $AB = 9$, $BC = 15$; b) $AB = a$, $BC = b$.

1.2.7. a) O, A și B sînt puncte ale aceleiași drepte, A între O și B. $OA = 35$, $OB = 57$. Fie M mijlocul segmentului AB. Să se afle distanța de la punctul O la punctul M. b) Aceeași problemă dacă punctele A și B sînt de o parte și de alta a punctului O.

1.2.8. Să se deseneze un triunghi oarecare și să se noteze vîrfurile astfel încît BC să fie latura cea mai mare și AB latura cea mai mică. Să se măsoare laturile lui și să se compare: a) BC cu

$AB + AC$; b) AB cu $BC - AC$. Să se refacă lucrarea pe un alt triunghi. Răspunsurile rămîn aceleași?

1.2.9. În figura 8, ABC este un triunghi oarecare și D, E, F sînt mijloacele laturilor. Segmentele AD, BE și CF sînt medianele triunghiului. Să se

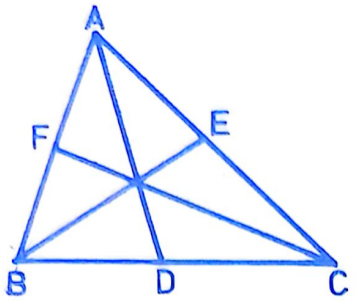


Fig. 8

măsoare laturile și medianele lui și să se compare: a) AD cu $\frac{AB + AC}{2}$; b) BE cu $\frac{BA + BC}{2}$; c) CF cu $\frac{CA + CB}{2}$; d) suma medianelor cu perimetrul triunghiului. Să se refacă lucrarea pe un alt triunghi. Răspunsurile rămîn aceleași?

1.2.10. În figura 9, $ABCD$ este un patrulater oarecare, iar AC și BD sînt diagonalele sale. Să se compare suma

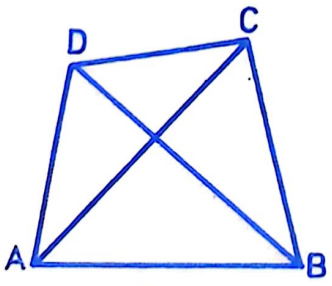


Fig. 9

lungimilor diagonalelor cu perimetrul patrulaterului. Să se refacă lucrarea pe un alt patrulater. Răspunsul rămîne același?

1.2.11. a) Fie A, B și C trei puncte ale aceleiași drepte. Totdeauna unul singur din ele este situat între celelalte două? Dar dacă A, B și C sînt trei puncte ale aceluiași cerc? c) De asemenea dacă A, B și C sînt puncte ale unui cerc din care s-a scos un punct (un inel de sîrmă în care s-a făcut o tăietură peste care nu se poate trece).

1.3. Unghiuri

1.3.1. Să se deseneze un triunghi oarecare, să se măsoare unghiurile lui și să se calculeze suma măsurilor lor. Să se refacă lucrarea pe alte două triunghiuri, dintre care unul să aibă un unghi obtuz. Sumele diferă mult una de alta?

1.3.2. În figura 10, unghiurile marcate cu cîte un arc sînt unghiurile exterioare ale triunghiului ABC. Să se măsoare aceste unghiuri și să se calcu-

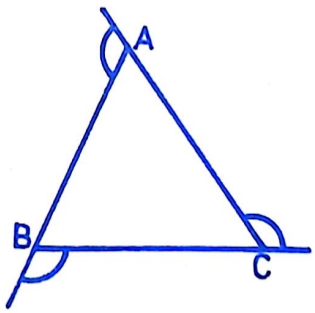


Fig. 10

leze suma măsurilor lor. Să se refacă lucrarea pe un triunghi care are un unghi obtuz. Rezultatele diferă mult unul de celălalt?

1.3.3. Să se măsoare unghiurile unui patrulater oarecare și să se afle suma măsurilor lor. Să se refacă lucrarea pe un alt patrulater. Rezultatele diferă mult unul de celălalt?

1.3.4. Să se deseneze un triunghi oarecare și să se ducă bisectoarele unghiurilor sale folosind raportorul. (Ele trebuie să fie concurente.)

1.3.5. a) Să se deseneze un triunghi ascuțitunghic și să se ducă, cu ajutorul echerului, înălțimile sale. b) Aceeași problemă dacă triunghiul are un unghi obtuz. (Înălțimile trebuie să fie concurente.)

1.3.6. Prin distanța de la un punct la o dreaptă se înțelege lungimea perpendicularei duse din acel punct pe dreaptă.

Să se deseneze un unghi ascuțit și bisectoarea lui. Să se ia un punct al bisectoarei, să se măsoare distanța lui la laturile unghiului și să se compare rezultatele. Să se refacă lucrarea de două ori luînd alte puncte ale bisectoarei. Aceeași lucrare în cazul unui unghi obtuz. (Distanțele sînt egale.)

1.3.7. Să se construiască cu ajutorul echerului complementul unui unghi.

1.3.8. Doi elevi cumpără cîte o carte. a) La casă, amîndoi dau cîte 10 lei și li se dă rest aceeași sumă de bani. Care din ei a cumpărat o carte mai scumpă? b) Aceeași întrebare dacă primului i se dă rest mai mult. Să se facă legătura între aceste fapte și adevărurile următoare: Două unghiuri care au același complement (suplement) sînt congruente; un unghi mai mare are un complement (suplement) mai mic.

1.3.9. Două unghiuri sînt complementare. Cîte grade are unghiul care se obține dacă se adună: a) jumătățile lor; b) cîte o treime din fiecare; c) dublul primului unghi cu dublul unghiului al doilea? d) Aceleași întrebări dacă cele două unghiuri sînt suplementare.

1.3.10. Două unghiuri complementare sînt congruente. Cîte grade are fiecare? Aceeași întrebare dacă unghiurile sînt suplementare.

1.3.11. a) Din două unghiuri complementare, măsura unuia este dublul măsurii celuilalt. Cîte grade are fiecare? b) Aceeași întrebare dacă unghiurile sînt suplementare.

1.3.12. a) Două unghiuri sînt suplementare. Cum sînt ele, ascuțite? obtuze? drepte? b) Aceeași întrebare dacă unghiurile sînt complementare.

1.3.13. Să se deseneze un unghi ascuțit și apoi să se construiască suplementul lui folosind numai rigla (linia). Aceeași problemă în cazul unui unghi obtuz.

1.3.14. Se consideră o foaie de hîrtie (fig. 11) care are o margine dreaptă

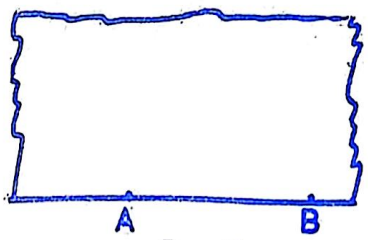


Fig. 11

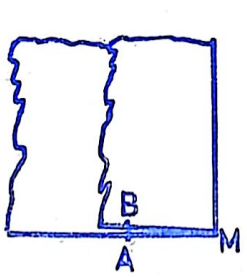


Fig. 12

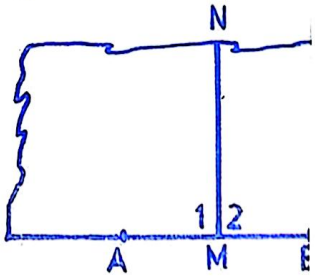


Fig. 13

(celelalte margini pot avea forme oarecare); fie A și B două puncte ale

marginii. Îndoim hîrtia astfel încît punctul B să cadă în A şi trecem cu mîna peste hîrtia astfel îndoită (fig. 12). Cînd desfacem hîrtia, apare o dungă MN (fig. 13). De ce sînt dreptele AB şi MN perpendiculare?

1.3.15. În figura 14, x este un unghi oarecare. Laturile sale au fost prelungite dincolo de vîrf. Ce relaţie există

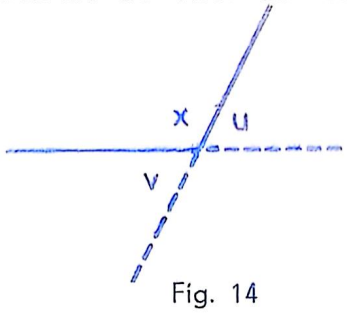


Fig. 14

între unghiurile x şi u? între unghiurile x şi v? între unghiurile u şi v? Să se deducă de aici teorema cu privire la unghiurile opuse la vîrf.

1.3.16. În figura 15, $\hat{u} = 40°$, $\hat{x} = 2u$. Se cere unghiul x

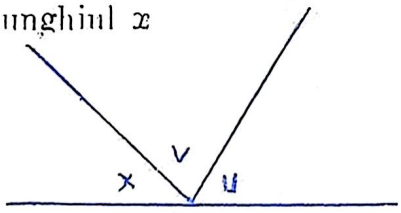


Fig. 15

1.3.17. În figura 16, $\widehat{AOB} = 26°$, $\widehat{BOD} = 100°$, OC este bisectoarea unghiului BOD. Să se afle unghiul format de bisectoarele unghiurilor COD şi DOE.

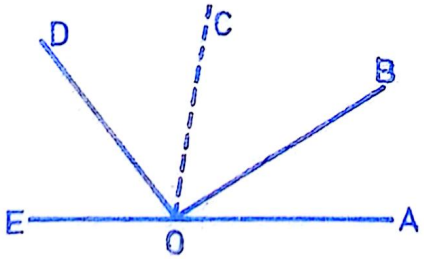


Fig. 16

1.3.18. În figura 17, $OD \perp OC$. Să se afle unghiul format de bisectoarele unghiurilor AOC şi BOD.

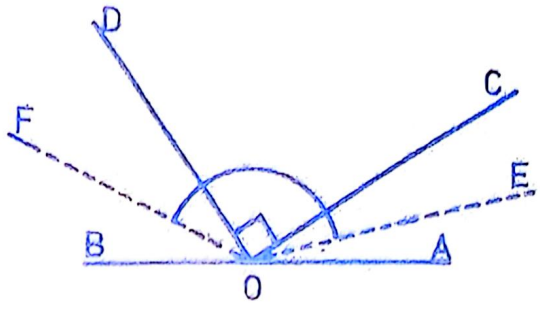


Fig. 17

1.3.19. Măsurile a două unghiuri adiacente u şi v sînt: a) $u = 37°$, $v = 144°$; b) $u = 88°$, $v = 91°$; c) $u = 113°$, $v = 67°$; d) $u = 138°$, $v = 42°$; e) $u = 91°$, $v = 87°$. Care din ele au laturile necomune în prelungire?

1.3.20. Se dau unghiurile adiacente $AOB = 30°$, $BOC = 85°$. COD este un unghi adiacent cu BOC. Cîte grade trebuie să aibă acest unghi ca latura OD să fie prelungirea laturii OA?

1.3.21. $\widehat{AOB} = 132°$. Să se ducă o semidreaptă OC, astfel încît bisectoarea unghiului BOC să fie prelungirea laturii OA.

1.3.22. În figura 18, $\hat{1} = 44°$, $\hat{2} = 95°$, $\hat{3} = 50°$, $\hat{4} = 100°$. Să se afle unghiul 5.

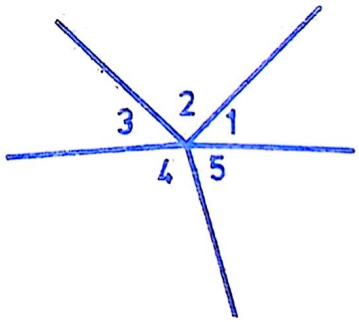


Fig. 18

1.3.23. Trebuie să măsurăm un unghi. Dar laturile lui sînt prea scurte, ele nu ajung pînă la gradaţia raportorului şi nu le putem prelungi, căci figura este la marginea caietului. Ce putem face?

1.3.24. Două drepte se taie. Unul din unghiurile care se formează are 50°. Să se afle măsurile celorlalte unghiuri.

1.3.25. Două drepte se taie. Suma măsurilor a două dintre unghiurile care se formează este de 148°. Cîte grade are fiecare dintre unghiuri?

1.3.26. a) În figura 19, se văd 5 drepte concurente. Să se afle suma măsurilor unghiurilor notate în figură cu o cifră (toate unghiurile luate din două

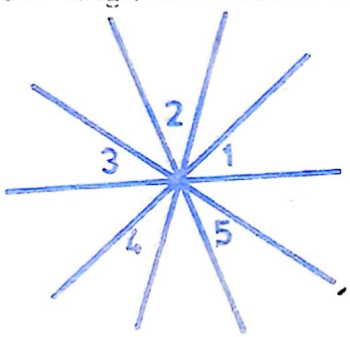


Fig. 19

în două). b) Aceeași problemă dacă se duc 101 drepte concurente. c) Să se examineze și cazul cînd numărul dreptelor este par.

1.3.27. Cîte grade are unghiul format de bisectoarele a două unghiuri opuse la vîrf.

1.3.28. Fie AOB un unghi oarecare (fig. 21) și semidreapta OC prelungirea laturii OA dincolo de O. Prin punctul O se duce o semidreaptă OD ca în figură, astfel ca unghiul COD să fie congruent cu AOB. Să se demonstreze că semidreapta OD este prelungirea semidreptei OB.

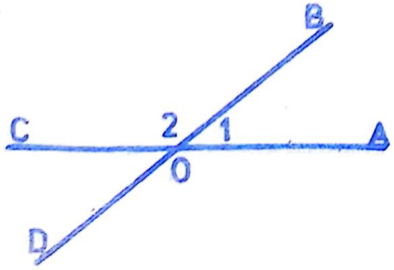


Fig. 21

1.3.29. Cîte grade are unghiul descris de acul mare al unui ceas: a) într-un minut? b) în 5 minute? c) Cîte grade are unghiul descris de acul mic al unui ceas într-o oră? d) într-un minut? (fig. 22)

Fig. 22

1.3.30. Cîte grade are unghiul format de acele unui ceas: a) la ora 12 și 5? b) la ora 12 și 10? c) la ora 12 și 15? d) la ora 12 și 20? e) la ora 12 și 25? f) la ora 12 și 30? Cum se pot obține toate răspunsurile din primul?

1.3.31*[1]. Cîte grade are unghiul format de acele unui ceas: a) la ora 1 și 5? b) la ora 2 și 10? c) la ora 3 și 15; d) la ora 4 și 20? ș.a.m.d. Cum se pot obține toate răspunsurile din primul?

1.3.32. Figura 23 reprezintă cadranul unei busole. Cîte grade are unghiul format de semidreptele care arată: a) spre N și spre E? b) spre N și spre V? c) spre S și spre E? d) spre N și spre NE? e) spre S și spre SV? f) spre SVV și spre NVV? g) spre N și spre NNV? h) spre SEE și spre SE? i) spre NV și spre SV?

---

[1] Se recomandă să se rezolve întîi problema 1.3.29.

* Problemele notate cu o steluță sînt mai grele.

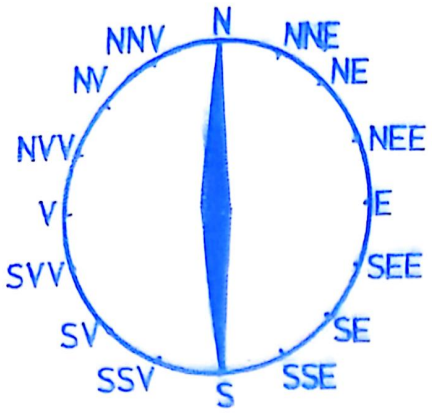


Fig. 23

1.3.33. Figura 24 reprezintă indicatorul de viteză al unei mașini, partea gradată reprezintă două treimi din cerc. Cu cîte grade deviază acul cînd viteza mașinii este de: a) 30 km/oră? b) 75 km/oră? c) 90 km/oră?

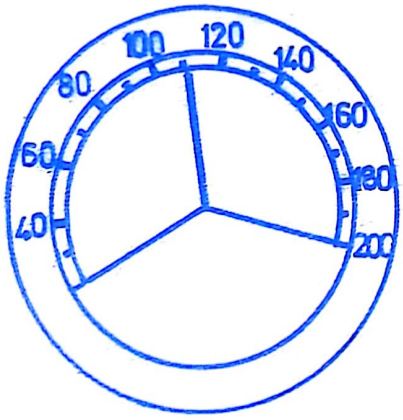


Fig. 24

1.3.34. Să se demonstreze că bisectoarele a două unghiuri adiacente cu laturile necomune în prelungire sînt perpendiculare.

1.3.35. Luăm o foaie de hîrtie cu o margine dreaptă AB (fig. 27), îndoim colțul hîrtiei care conține punctul A astfel încît punctul A să cadă într-un punct oarecare A' al foii de hîrtie, apoi îndoim și restul foii de hîrtie astfel încît semidreapta OB să coincidă cu semidreapta OA'. De ce se formează

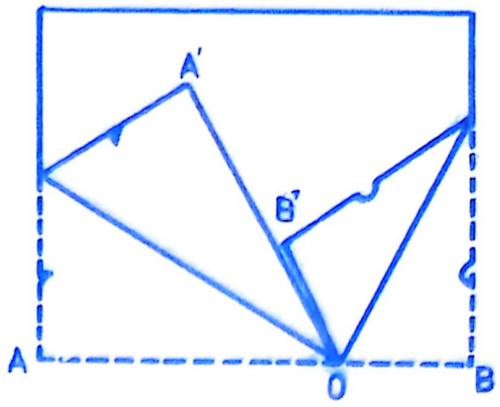


Fig. 27

un unghi drept cu vîrful în O, oricum am îndoi primul colț.

1.3.36. a) Fie AB un segment de 6 cm, de exemplu, și C un punct oarecare al lui (fig. 28). Segmentele AC și CB se împart în cîte trei părți congruente prin punctele x, y, u și v. Se cer lungimile segmentelor yu și xv. b) Fie AOC și COB două unghiuri adiacente cu laturile necomune în prelungire (fig. 29). Ele se împart în cîte trei părți congruente, ca în figură. Se cer unghiurile yOu și xOv.

Fig. 28

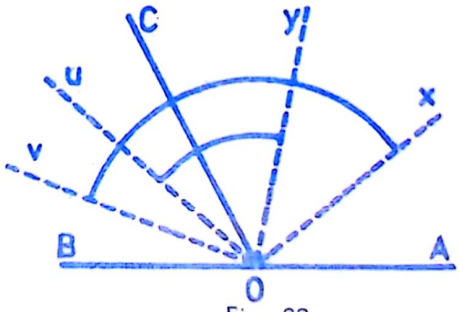


Fig. 29

1.3.37*. Fie AOB un unghi ascuțit. În vîrful O se ridică cîte o semidreaptă perpendiculară pe fiecare dintre laturile lui. Ce relație există între unghiul AOB și unghiul format de aceste semi-

drepte? Se vor examina toate cazurile posibile. Aceeaşi problemă cînd unghiul AOB este obtuz.

1.3.38*[1]. Se consideră două unghiuri care au acelaşi vîrf şi laturile perpendiculare două cîte două. Ce poziţie pot avea una faţă de alta bisectoarele lor? (Trei cazuri.)

1.3.39*. a) Pe o dreaptă se consideră un punct fix A, un punct mobil M şi mijlocul N al segmentului AM. Cînd punctul M se mişcă pe dreapta AM şi ajunge în poziţia M', punctul N se mişcă de asemenea şi ajunge în poziţia N'. Ce relaţie există între lungimile segmentelor MM' şi NN'? b) Fie AOM

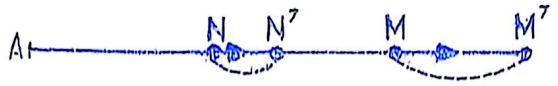


Fig. 36

un unghi şi ON bisectoarea lui. Cînd latura OA rămîne fixă şi latura OM se roteşte în jurul punctului O şi ajunge în poziţia OM', bisectoarea se roteşte de asemenea şi ajunge în poziţia ON'. Ce relaţie există între măsurile unghiurilor MOM' şi NON'?

---

[1] Se va rezolva mai întîi problema precedentă.

Capitolul 2

TRIUNGHIUL

2.1. Construcții de triunghiuri[1]

Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd:

2.1.1. Laturile $AB = 38$ mm, $BC = 60$ mm și înălțimea $AD = 33$ mm.

2.1.2. Laturile $AB = 35$ mm, $BC = 45$ mm și înălțimea $BD = 25$ mm.

2.1.3 Unghiul $A = 50°$, latura $AB = 45$ mm și bisectoarea $AE = 40$ mm.

2.1.4. Laturile $AB = 43$ mm, $BC = 32$ mm și mediana $AD = 38$ mm.

2.1.5. Unghiul $B = 70°$, latura $BC = 47$ mm și înălțimea $BD = 30$ mm.

2.1.6. Latura $BC = 60$ mm, înălțimea $AD = 30$ mm și mediana $AE = 35$ mm.

2.1.7. Unghiul $A = 54°$, bisectoarea $AE = 28$ mm și înălțimea $AD = 20$ mm.

2.1.8*. Laturile $AB = 45$ mm, $AC = 36$ mm și mediana $AD = 40$ mm.

2.1.9. Cateta $AB = 34$ mm și bisectoarea $AE = 42$ mm.

2.1.10. Bisectoarea $AE = 35$ mm și înălțimea $AD = 28$ mm.

2.1.11. Înălțimea $AD = 26$ mm și segmentul $DC = 32$ mm.

2.1.12. Cateta $AB = 28$ mm și înălțimea $AD = 25$ mm.

2.2. Congruența triunghiurilor

2.2.1. Care dintre propozițiile următoare este adevărată și care nu. În cazul cînd propoziția nu este adevărată, se va da un contraexemplu și se vor adăuga precizările necesare ca să devină adevărată.

a) Pentru ca două triunghiuri echilaterale să fie congruente, este suficient ca o latură a unuia să fie congruentă cu o latură a celuilalt. b) Pentru ca două triunghiuri dreptunghice și isoscele să fie congruente, este suficient să aibă cîte o latură congruentă. c) Pentru ca două triunghiuri isoscele să fie congruente, este suficient să aibă bazele congruente și cîte un unghi

---

[1] Pentru prescurtare, vom nota cazurile de congruență a triunghiurilor astfel: ULU (unghi-latură-unghi), LUL (latură-unghi-latură) și LLL (latură-latură-latură). Vom admite două cazuri de congruență a triunghiurilor dreptunghice. Pentru ca două triunghiuri dreptunghice să fie congruente, este suficient să aibă:

1) *ipotenuzele congruente și cîte un unghi ascuțit congruent* (IU); 2) *ipotenuzele congruente și cîte o catetă congruentă* (IC).

Cu privire la primul din aceste cazuri, v. nota de la pag. 26.

congruent. d) Pentru ca două triunghiuri dreptunghice să fie congruente, este suficient ca ele să aibă cîte o catetă congruentă şi un unghi ascuţit congruent. e) Pentru ca două triunghiuri dreptunghice să fie congruente, este suficient ca ele să aibă cîte două laturi congruente.

2.2.2. Într-un triunghi ABC prelungim latura AB dincolo de A cu un segment AD congruent cu AC. Apoi prelungim latura AC dincolo de A cu un segment AE congruent cu AB. Să se demonstreze că $DE \equiv BC$.

2.2.3. În figura 6, AOB este un unghi oarecare. Să se compare BC cu AD.

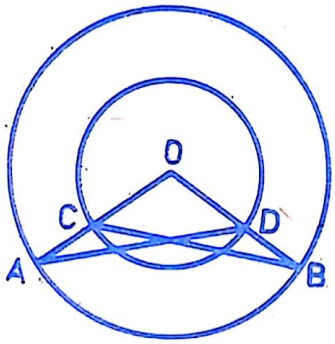


Fig. 6

2.2.4. Fie AB şi CD doi diametri ai unui cerc. Să se compare: a) segmentul AC cu DB; b) segmentul AD cu BC.

2.2.5. Fie OA şi OB două raze ale unui cerc, Ox bisectoarea unghiului AOB şi M un punct al ei. Să se compare segmentul MA cu MB.

2.2.6. Fie AB un segment şi C mijlocul lui. În C se ridică perpendiculara pe AB; fie M un punct oarecare al ei. Să se compare MA cu MB.

2.2.7. În figura 7, O este centrul, A şi B sînt două puncte oarecare ale

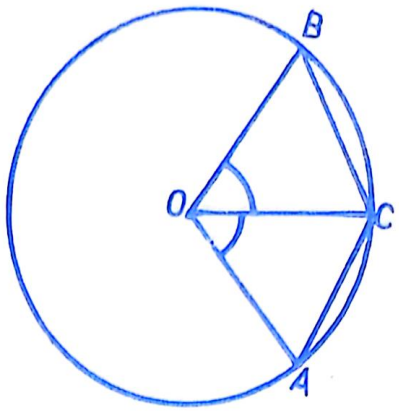


Fig. 7

cercului şi OC este bisectoarea unghiului AOB. Să se compare segmentul CA cu CB.

2.2.8. Fie ABC un triunghi oarecare şi AD una dintre bisectoarele lui, $D \in BC$. Pe semidreapta AC se poartă un segment AE congruent cu AB. Să se demonstreze că $DE \equiv BD$. Se va face o figură în care $AC < AB$ şi o altă figură în care $AC > AB$.

2.2.9. În figura 8, $\hat{1} \equiv \hat{3}$ şi $\hat{2} \equiv \hat{4}$. Să se găsească toate elementele congruente din figură.

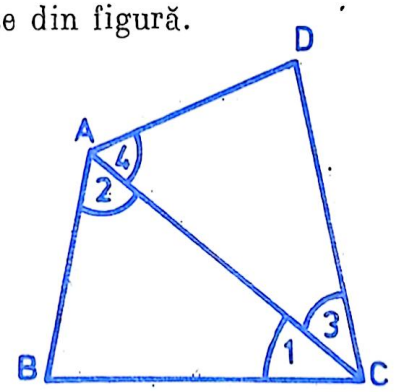


Fig. 8

2.2.10. În figura 9, $\hat{1} \equiv \hat{3}$ şi $\hat{2} \equiv \hat{4}$. Să se demonstreze că $AB \equiv DC$.

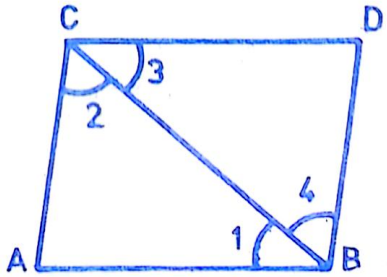


Fig. 9

2.2.11. În figura 10, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{DCB}$ și $\widehat{ACB} \equiv \widehat{DBC}$. Să se compare laturile triunghiului ABC cu ale triunghiului DCB.

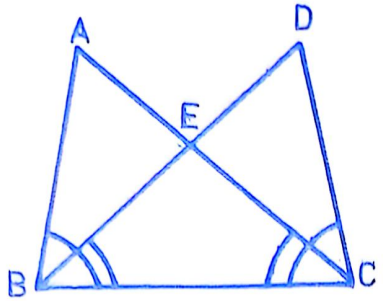


Fig. 10

2.2.12. Fie xOy un unghi și Oz bisectoarea lui. Printr-un punct A al bisectoarei se duce perpendiculara pe ea și se notează cu B și C intersecțiile ei cu laturile unghiului. Să se compare OB cu OC.

2.2.13. În figura 11, triunghiul ABC este isoscel, $CE \equiv AD$ și $AE \equiv BD$. Să se demonstreze că $\hat{D} \equiv \hat{E}$.

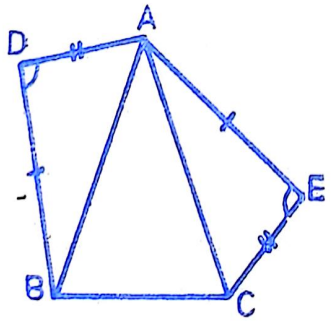


Fig. 11

2.2.14. În figura 12, O și P sînt centrele celor două cercuri. Să se compare unghiurile triunghiului OAP cu unghiurile triunghiului OBP.

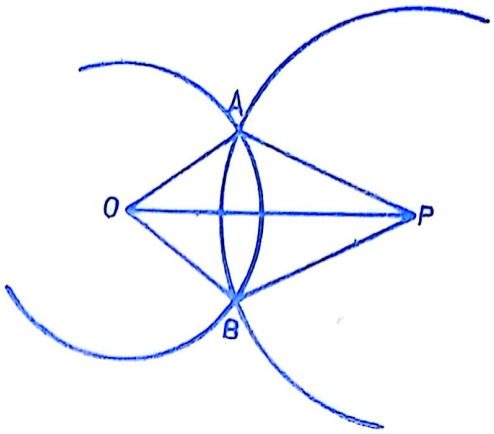


Fig. 12

2.2.15. În figura 13, O este centrul comun al celor două cercuri. Să se demonstreze că: a) dacă $\hat{1} \equiv \hat{2}$, atunci $AB \equiv CD$; b) dacă $AB \equiv CD$, $\hat{1} \equiv \hat{2}$.

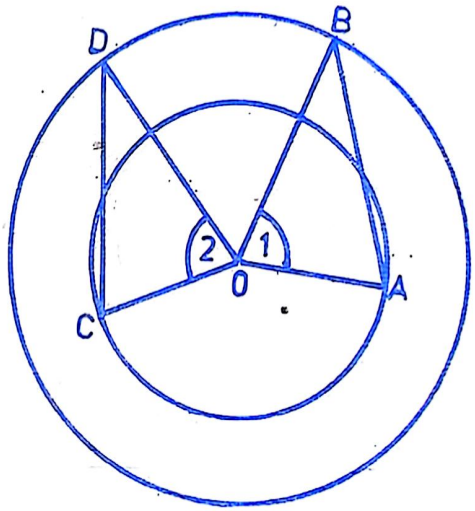


Fig. 13

2.2.16. Într-un triunghi ABC prelungim mediana AD cu un segment DE congruent cu AD. Să se compare triunghiul ABD cu triunghiul CDE. Ce elemente congruente apar?

2.2.17. Să se demonstreze că, într-un triunghi, oricare două vîrfuri sînt egal depărtate de mediana care pleacă din vîrful al treilea.

2.2.18. Fie xOy un unghi (fig. 15). Pe latura Ox se ia un punct oarecare A și se construiește un arc de cerc cu centrul în A care să taie latura Oy în

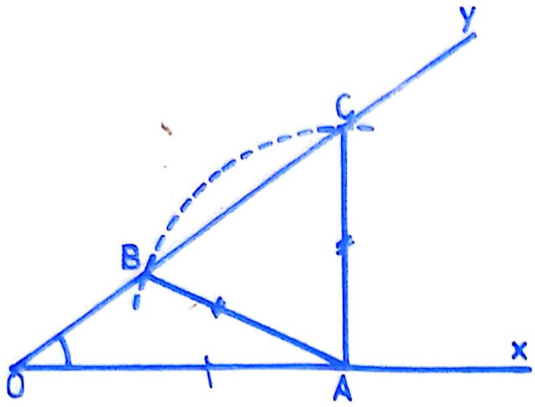


Fig. 15

două puncte, B și C. Triunghiurile AOB și AOC au cîte două laturi congruente și un unghi congruent: $OA \equiv OA$ (latură comună) $\hat{O} = \hat{O}$ (comun) și $AB \equiv AC$. Totuși, ele nu sînt congruente. Este acest lucru în contradicție cu cazul de congruență LUL?

2.3. Triunghiul isoscel

Să se construiască un triunghi isoscel ABC ($AB \equiv AC$) cunoscînd:

2.3.1. Latura $AB = 45$ mm și unghiul $A = 65°$.

2.3.2. Baza $BC = 36$ mm și unghiul $B = 55°$.

2.3.3. Înălțimea $AD = 40$ mm și unghiul de la vîrf $A = 130°$.

2.3.4. Baza $BC = 48$ mm și înălțimea $AD = 52$ mm.

2.3.5. Latura $AC = 53$ mm și înălțimea $AD = 45$ mm.

2.3.6. Baza $BC = 44$ mm și înălțimea $BD = 30$ mm.

2.3.7. Cum se poate construi un triunghi isoscel folosind numai o riglă negradată și un raportor?

2.3.8. În figura 16, $AB \equiv AC$. Să se compare unghiul 1 cu 2.

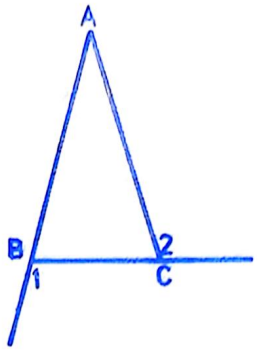


Fig. 16

2.3.9. În figura 17, $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Ce fel de triunghi se obține dacă By se prelungește pînă la intersecția cu Ax?

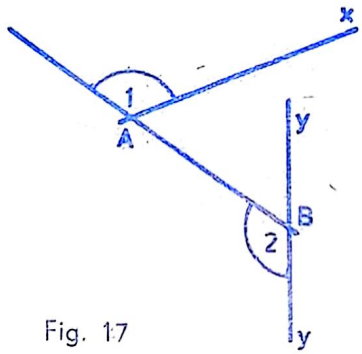


Fig. 17

2.3.10. Fie OA și OB două raze ale aceluiași cerc. Să se compare unghiul OAB cu OBA.

2.3.11. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$). a) Pe latura AB se ia un punct D și pe latura AC un punct E, unde $BD \equiv CE$. Să se compare unghiurile ADE și AED. b) Aceeași problemă dacă punctele D și E se iau pe prelungirile laturilor dincolo de vîrfurile B și C.

2.3.12. Fie xOy un unghi și A un punct al laturii Ox. Să se ducă prin A o dreaptă astfel încît, B fiind intersecția ei cu Oy, unghiul OAB să fie congruent cu unghiul OBA.

2.3.13. În figura 19, $AB \equiv AC$, $BD \equiv CE$, $DF \perp BC$ și $EG \perp BC$. Să se compare segmentul DF cu EG.

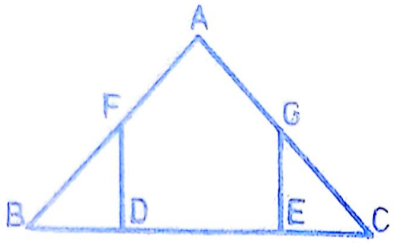


Fig. 19

2.3.14. a) În figura 20, triunghiurile ABC și ACD sînt isoscele și congruente. Să se compare unghiul ABD cu ADB. b) Să se demonstreze că $AC \perp DB$.

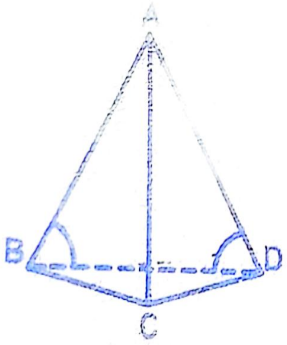


Fig. 20

c) Se construiește la dreapta triunghiului ACD încă un triunghi isoscel, ADE, $AE \equiv AD$. Să se compare unghiul ABE cu AEB.

2.3.15. Într-un triunghi isoscel ABC ($AB \equiv AC$) se duc medianele BD și CE ($D \in AC$, $E \in AB$) și se notează cu F intersecția lor. Să se demonstreze că: a) $BD \equiv CE$; b) $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ECB}$; c) $FB \equiv FC$; d) $FD \equiv FE$; e) $\widehat{FED} \equiv \widehat{FDE}$; f) Aceeași problemă dacă BD și CE sînt înălțimi.

2.3.16. Să se demonstreze că: a) Un triunghi isoscel are două înălțimi congruente. b) Reciproc, un triunghi care are două înălțimi congruente este isoscel. Se vor considera două cazuri, cînd unghiul de la vîrful triunghiului este ascuțit și cînd este obtuz. c) Ce se poate deduce de aici cu privire la înălțimile unui triunghi echilateral?

2.3.17. Să se demonstreze că un triunghi este isoscel dacă: a) o bisectoare este și înălțime; b) o mediană este și înălțime; c*) o mediană este bisectoare.

2.3.18. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$) și D intersecția bisectoarelor unghiurilor de la bază. Să se demonstreze că: a) $DB \equiv DC$; b) AD este bisectoarea unghiului A.

2.3.19*. a) Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$). Pe latura AB se ia un punct M și pe AC un punct N, unde $BM \equiv CN$; fie $BN \cap CM = P$. Să se demonstreze că: a) $BN \equiv CM$; b) $PB \equiv PC$; c) AP este bisectoarea unghiului A. d) Să se deducă de aici că medianele unui triunghi isoscel sînt concurente; e) De asemenea și înălțimile.

2.3.20. Fie xOy un unghi și M un punct din interiorul lui. O dreaptă care trece prin punctul M taie laturile unghiului în două puncte, A și B. Să se ducă această dreaptă astfel încît triunghiul OAB să fie isoscel.

2.3.21. În figura 22, triunghiul ABC este echilateral și $AD \equiv BE \equiv CF$.

Să se demonstreze că triunghiul DEF este de asemenea echilateral. b) Aceeaşi problemă cu privire la figura 23.

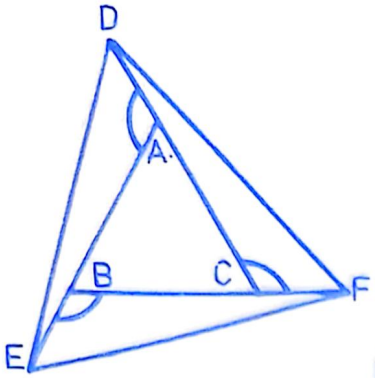


Fig. 22

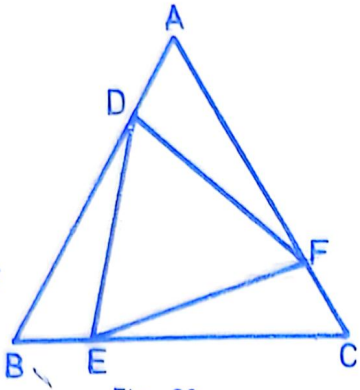


Fig. 23

2.4. Mediatoarea. Bisectoarea

2.4.1. În figura 24, $AN \equiv NB$ şi $PQ \perp AB$. Nici MN, nici PQ nu este mediatoarea segmentului AB. Dreptele

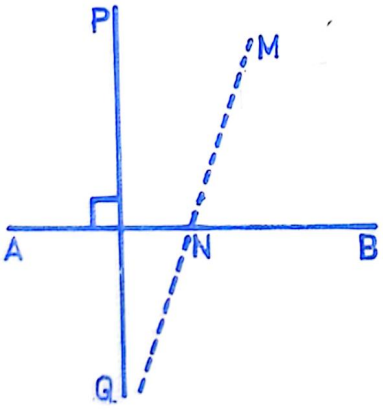


Fig. 24

MN şi PQ îndeplinesc numai în parte condiţiile cerute. Care condiţii sînt îndeplinite şi care nu?

2.4.2. În figura 25, O şi P sînt centrele celor două cercuri şi $OP \cap AB = \{C\}$. Să se explice de ce $OP \perp AB$ şi $CA \equiv CB$.

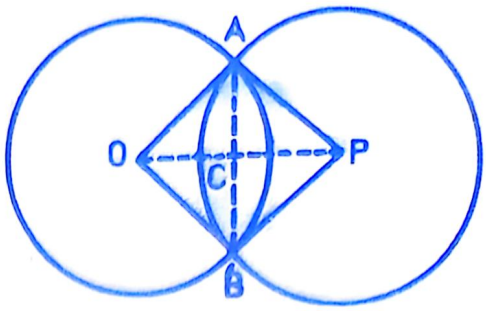


Fig. 25

2.4.3. Se consideră un cerc şi două puncte, A şi B, din interiorul lui. Să se construiască un triunghi isoscel care să aibă ca bază segmentul AB şi al treilea vîrf pe cerc. Cîte soluţii are problema?

2.4.4. Pe un cerc se iau patru puncte, A, B, C şi D. Să se construiască mediatoarele segmentelor AB, AC, AD, BC şi BD. De ce sînt concurente?

2.4.5. Fie ABC un triunghi oarecare. a) Să se găsească un punct M al dreptei AC astfel încît segmentul MB să fie congruent cu MC. b) Să se găsească un punct N al dreptei AB astfel încît segmentul NB să fie congruent cu NC.

2.4.6. Figura 27 s-a obţinut astfel. S-a construit segmentul AB şi trei perechi de unghiuri congruente, $\widehat{MAB} \equiv \widehat{MBA}$, $\widehat{NAB} \equiv \widehat{NBA}$, $\widehat{PAB} \equiv$

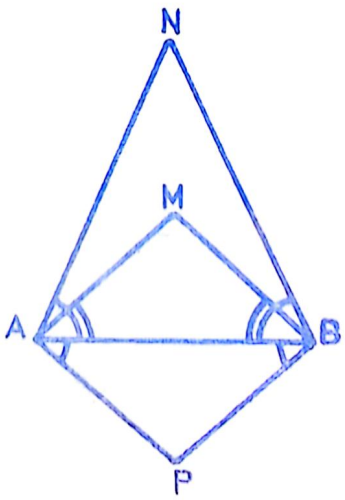


Fig. 27

$\equiv \widehat{PBA}$. De ce sînt punctele M, N și P coliniare?

2.4.7. În figura 28, se știe că $AB \equiv AC$ și $BD \equiv CE$. Să se compare AD cu AE.

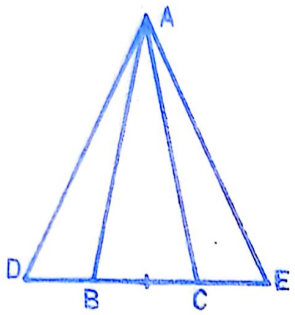


Fig. 28

2.4.8. Două sate sînt situate în apropierea unei căi ferate. Trebuie construită o gară care să fie egal depărtată de ele. Să se reprezinte satele prin cîte un punct A și B, și calea ferată printr-o dreaptă d și să se determine printr-o construcție locul gării. Se va face construcția și în cazul cînd cele două sate sînt situate de o parte și de alta a căii ferate. Ce se întîmplă cînd dreapta AB este perpendiculară pe calea ferată?

2.4.9. Pe un șantier sînt trei mașini care lucrează și noaptea. Trebuie instalat un bec într-un loc astfel ales încît toate trei mașinile să fie la fel de luminate. Să se reprezinte cele trei mașini prin trei puncte A, B și C și să se determine printr-o construcție punctul O în care trebuie instalat becul.

2.4.10. Într-un cerc se duce o rază OA și mediatoarea ei. Fie M unul din punctele în care mediatoarea taie cercul. Ce fel de triunghi este OAM?

2.4.11. Se consideră un triunghi ABC în care $AC > AB$. a) Să se găsească un punct M al laturii AC astfel încît să aibă loc relația $MA + MB = AC$. b) Să se găsească un punct N al dreptei AB astfel încît să aibă loc relația $NC - NA = AB$.

2.4.12. O foaie de hîrtie în formă de triunghi ABC se pliază astfel încît vîrful A să cadă într-un punct oarecare A' din interiorul lui. Cînd hîrtia se desface, redîndu-i-se forma inițială, apare o dungă MN. De ce sînt dreptele MN și AA' perpendiculare?

2.4.13. Într-un triunghi ABC, $AB = 5$ cm și $AC = 9$ cm. Fie xy mediatoarea laturii BC și $xy \cap AC = D$. Să se afle perimetrul triunghiului ABD.

2.4.14. Fie A, B și C trei puncte ale unui cerc. Să se găsească un punct M al cercului egal depărtat de dreptele AB și AC.

2.4.15. Fie ABC un triunghi. Să se determine un punct D al dreptei BC egal depărtat de dreptele AB și AC. Se vor considera trei cazuri, cînd $\hat{C} < 90°$, $\hat{C} = 90°$ și $\hat{C} > 90°$, se vor duce segmentele DE și DF care reprezintă distanțele de la punctul D la dreptele AB și AC. Care din ele cade în interiorul triunghiului?

2.4.16. Fie ABC un triunghi oarecare în care unghiul C este ascuțit. Prin vîrful C se duce o semidreaptă Cx care formează cu CA un unghi congruent cu unghiul C al triunghiului, din A se duce perpendiculara pe Cx și se notează cu D piciorul ei. Să se compare segmentul AD cu înălțimea AE a triunghiului ($E \in BC$).

2.4.17. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$) și D mijlocul bazei BC. Din D se duc perpendicularele pe AB și AC și se notează cu E și F picioarele lor. Să se compare DE cu DF.

2.4.18. În figura 31, Oz este bisectoarea unghiului xOy, $M \in Oz$, $MA \perp Ox$, $MB \perp Oy$. Să se compare unghiul 1 cu unghiul 2.

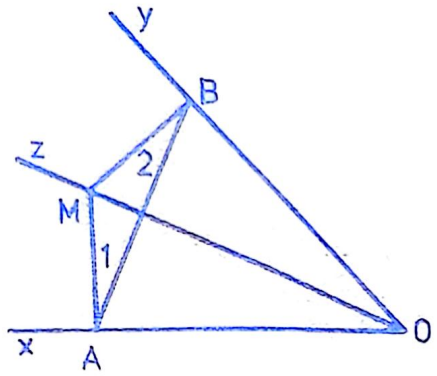


Fig. 31

2.4.19. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se găsească un punct M al înălțimii AD egal depărtat de semidreptele BA și BC. Două cazuri: a) cînd unghiul B este ascuțit; b) cînd unghiul B este obtuz.

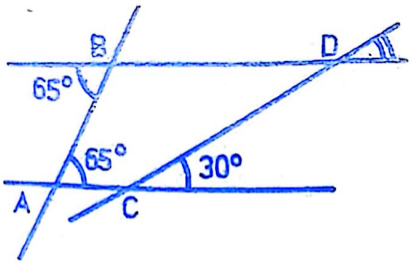
2.4.20. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se găsească un punct egal depărtat de vîrfurile B și C, și totodată egal depărtat de laturile AB și AC.

Capitolul 3

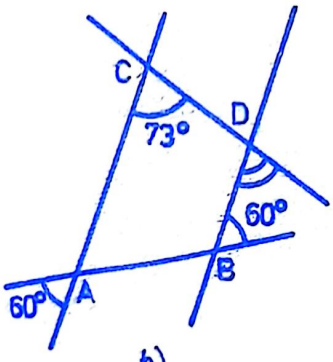
DREPTE PARALELE
SUMA UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

3.1. Drepte paralele

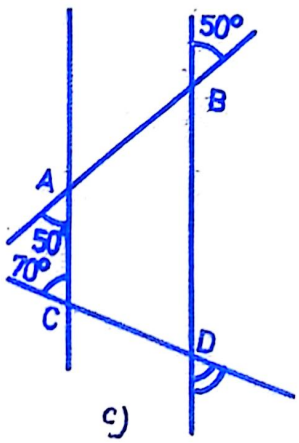
3.1.1. În figura 1, să se afle unghiurile însemnate cu două arce cunoscînd celelalte unghiuri indicate în figură. Se va arăta de fiecare dată dacă se aplică teorema directă sau reciprocă.



a)



b)



c)

Fig. 1

3.1.2. Ce este greșit în figura 2?

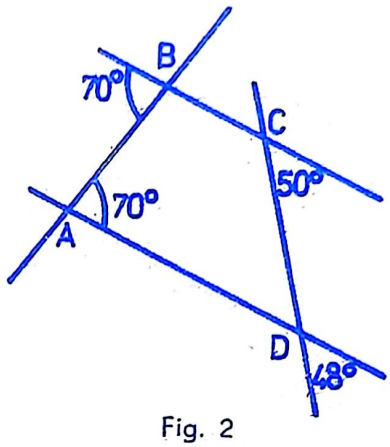


Fig. 2

3.1.3. În figura 3, $AB \parallel CD$, $\hat{1} = 30°$, $\hat{2} = 45°$. Se cere unghiul O.

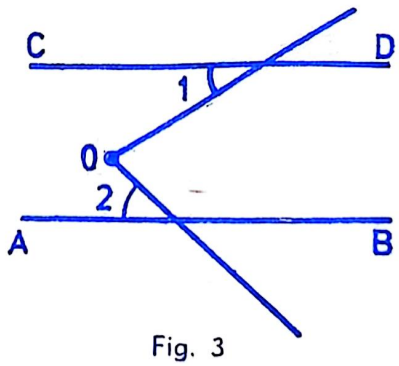


Fig. 3

3.1.4. Notațiile fiind cele din figura 4 și dreptele fiind paralele, ce relație există: a) între unghiurile 3 și 6, 4 și 5, 2 și 7, 1 și 8? b) între unghiurile 1 și 6, 2 și 5, 3 și 8, 4 și 7?

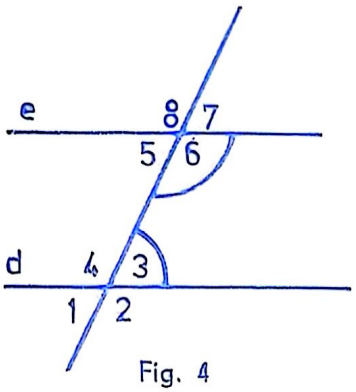


Fig. 4

3.1.5. Se dau trei drepte d, e și f. Se știe că $d \parallel e$ și $f \parallel e$. Ce poziție are dreapta d față de f? Să se completeze: Două drepte paralele cu a treia sînt...

3.1.6. Fie a, b, c trei drepte. a) Se știe că $b \perp a$ și $c \perp a$. Oare $b \parallel c$? b) Se știe că $b \perp a$ și $c \parallel b$. Oare $c \perp a$? Să se completeze: Două drepte perpendiculare pe aceeași dreaptă sînt... Dacă două drepte sînt paralele și o altă dreaptă este perpendiculară pe una din ele, ea este...

3.1.7. a) În figura 7, AOB este un unghi oarecare, C este un punct oarecare al bisectoarei sale, $CD \parallel OA$ și $CE \parallel OB$. Să se compare unghiul 3 cu unghiul 4. b) În aceeași figură, DCE este un unghi oarecare, O este un punct al prelungirii bisectoarei sale, $OA \parallel CD$ și $OB \parallel CE$. Să se compare unghiul 1 cu unghiul 2.

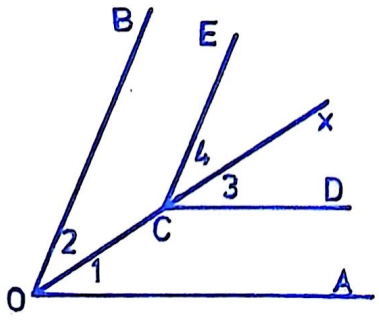


Fig. 7

3.1.8. a) În figura 8, $CA \equiv CB$ și $MN \parallel AB$. Să se compare segmentul CM cu CN. b) În aceeași figură $MP \parallel CB$. Să se compare segmentul MA cu MP.

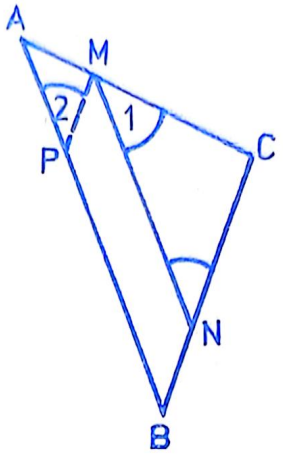


Fig. 8

3.1.9. Să se măsoare un unghi al cărui vîrf se află în afara foii de desen (a caietului).

3.1.10. a) Se dau o dreaptă xy și un punct A ($A \notin xy$). Să se ducă prin punctul A o dreaptă e astfel încît unul din unghiurile care se formează prin intersecția ei cu d să fie congruent cu un unghi dat (de exemplu de 50°). b) Sînt două soluții. În ce caz există numai o singură soluție?

3.1.11. Două paralele sînt tăiate de o secantă. Dintre cele opt unghiuri care se formează, măsura x a unuia este egală cu suma măsurilor altor trei. Cîte grade are fiecare dintre ele?

3.1.12. Două paralele sînt tăiate de o secantă. Suma măsurilor a trei dintre cele 8 unghiuri care se formează este de 246°. Să se afle toate unghiurile. (Se vor considera două cazuri: cînd cele trei unghiuri sînt congruente și cînd nu toate sînt congruente.)

3.1.13. În figura 10, $MN \parallel AB$, $NP \parallel BC$, $PM \parallel AC$. Care sînt unghiurile congruente cu unghiul 1? Cele 12 unghiuri din figură se pot grupa în 3 grupe de cîte 4 unghiuri congruente. Să se formeze aceste grupe.

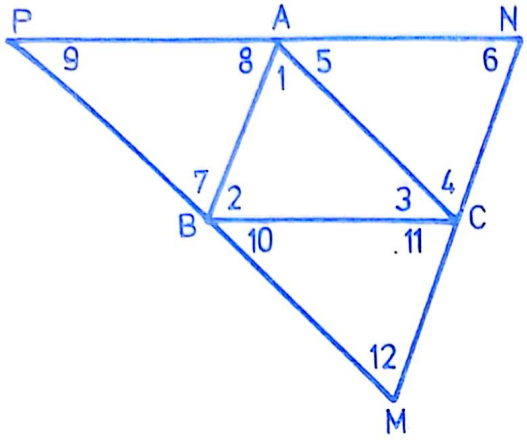


Fig. 10

3.1.14. a) În figura 11 s-au dus printr-un punct paralelele la laturile patrulaterului $ABCD$. Să se compare unghiurile 1, 2, 3 şi 4 cu unghiurile patrulaterului. Să se deducă de aici cîte grade are suma $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D}$. b) Se poate afla pe aceeaşi cale suma unghiurilor unui pentagon?

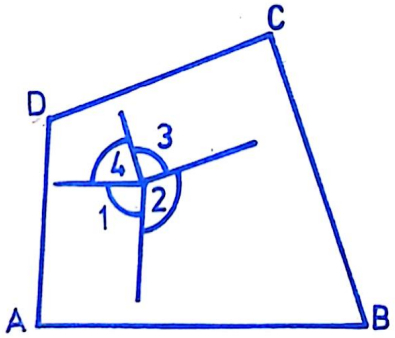


Fig. 11

3.1.15. Se consideră două drepte paralele tăiate de o secantă. a) Ce poziţie au una faţă de cealaltă bisectoarele a două unghiuri alterne interne? b) Să se găsească alte perechi de unghiuri ale căror bisectoare sînt paralele.

3.1.16. Două drepte paralele d şi e sînt tăiate de o secantă AB, $A \in d$, $B \in e$. Pe dreapta d se poartă un segment AC congruent cu AB. Să se demonstreze că BC este bisectoarea unghiului B. Se vor considera două cazuri: punctul C este de o parte sau de cealaltă a punctului A.

3.1.17. Fie xOy un unghi şi M un punct al bisectoarei sale. Prin M se duce paralela la Ox şi se notează cu N intersecţia ei cu Oy. Să se compare segmentul NM cu NO.

3.1.18. În figura 15, BI şi CI sînt bisectoare, $MN \parallel BC$. Să se demonstreze că $MN = MB + NC$.

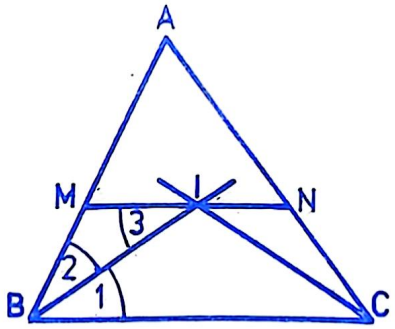


Fig. 15

3.1.19. În figura 16, $d \parallel e$, AB este o secantă oarecare, iar AC şi AD sînt bisectoare. Să se demonstreze că: a) Triunghiurile ABC şi ABD sînt isoscele. b) AB este o mediană a triunghiului ACD.

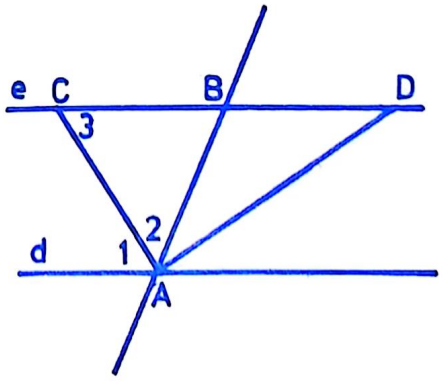


Fig. 16

3.2. Suma unghiurilor unui triunghi[1]

3.2.1. Figura 17 arată un mijloc de a verifica că suma unghiurilor unui triunghi este de 180°. ABC reprezintă o foaie de hîrtie în formă de triunghi şi AD este o înălţime. Hîrtia se pliază astfel încît vîrful A să vină în D, apoi se aduc prin pliere vîrfurile B şi C în

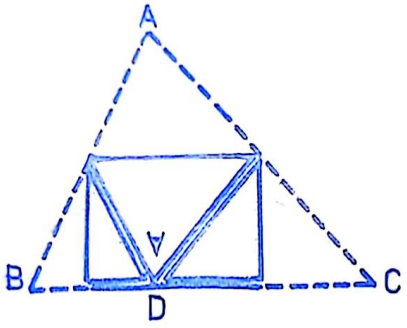


Fig. 17

punctul D. În jurul punctului D, de aceeaşi parte a dreptei BC, apar cele trei unghiuri ale triunghiului. Să se facă efectiv lucrarea.

3.2.2. Să se calculeze al treilea unghi al unui triunghi, cunoscînd două din ele: a) $\hat{A} = 58°$, $\hat{B} = 74°$; b) $\hat{B} = 104°$, $\hat{C} = 32°$; c) $\hat{A} = 72°$, $\hat{C} = 3°$.

3.2.3. Într-un triunghi dreptunghic ($\hat{A} = 90°$) se dă: a) $\hat{B} = 42°$; b) $\hat{C} = 53°$. Se cere celălalt unghi ascuţit.

3.2.4. Ce greşeală conţine fiecare dintre afirmaţiile următoare: a) Unghiurile unui triunghi sînt: $\hat{A} = 27°$, $\hat{B} = 53°$, $\hat{C} = 58°$. b) Unghiurile ascuţite ale unui triunghi dreptunghic sînt: $\hat{B} = 48°$, $\hat{C} = 52°$.

3.2.5. În figura 18-a unghiurile A şi B sînt obtuze; în figura 18-b ele sînt drepte, iar în figura 18-c unghiul A este drept şi B este obtuz. În nici una din aceste figuri, semidreptele AM şi BN nu se pot întîlni. Să se pună acest fapt în legătură cu teorema cu privire la suma unghiurilor unui triunghi.

---

[1] Dacă se ţine seamă de faptul că suma unghiurilor unui triunghi este de 180°, condiţiile din unele cazuri de congruenţă se lărgesc. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri în care $BC \equiv B'C'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$ şi $\hat{B} \equiv \hat{B}'$. Din ultimele două relaţii rezultă că $\hat{C} \equiv \hat{C}'$, deci triunghiurile sînt congruente după cazul ULU. De aici rezultă că nu este necesar ca unghiurile congruente să fie alăturate laturii. Se poate ca unul dintre unghiuri să fie alăturat şi celălalt opus, dar trebuie ca unghiurile alăturate laturilor congruente să fie congruente, de asemenea şi cele opuse. Dacă $BC \equiv B'C'$, $\hat{A} \equiv B'$ şi $\hat{B} \equiv \hat{A}'$, se poate ca triunghiurile să nu fie congruente (v. probl. 15.2.8); vom spune că unghiurile congruente trebuie să fie la fel aşezate. Cazul de congruenţă astfel lărgit se poate enunţa astfel: Pentru ca două triunghiuri să fie congruente, este suficient să aibă cîte o latură congruentă şi două unghiuri congruente două cîte două, unghiurile congruente fiind la fel aşezate. Vom nota şi acest caz de congruenţă cu ULU.

Din acelaşi motiv cazul de congruenţă a triunghiurilor dreptunghice notat cu IU devine de prisos. În adevăr. Fie ABC şi $A'B'C'$ două triunghiuri dreptunghice în A şi A', în care $BC \equiv B'C'$ şi $\hat{B} \equiv \hat{B}'$. Dat fiind că şi $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, triunghiurile îndeplinesc condiţiile teoremei de mai sus, deci se poate spune că ele sînt congruente conform cazului ULU.

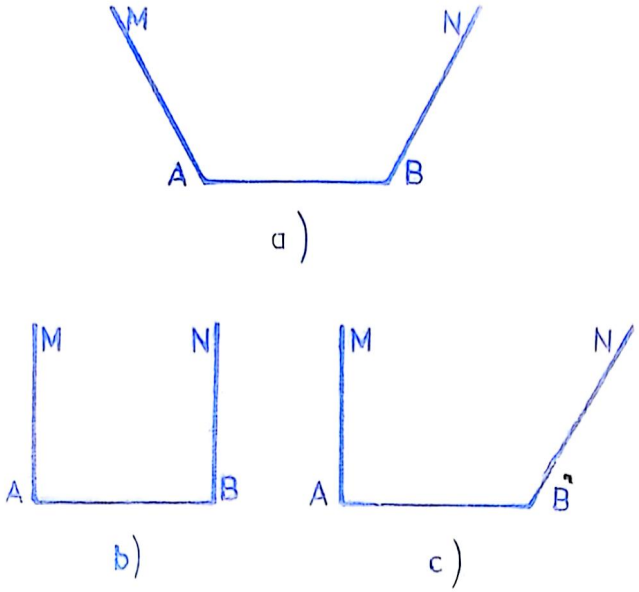


Fig. 18

3.2.6. În figura 19, $\hat{1} = 40°$. Se cere suma unghiurilor 2 și 3.

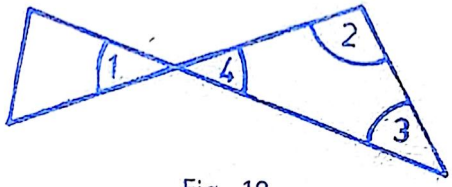


Fig. 19

3.2.7. În figurile 20 și 21, $\widehat{ADE} \equiv \hat{C}$. Să se compare unghiurile AED și B.

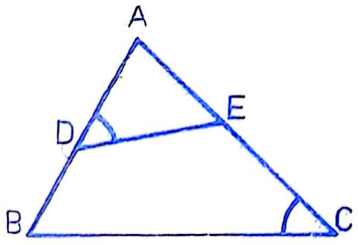


Fig. 20

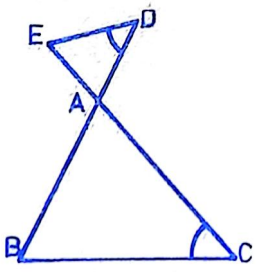


Fig. 21

3.2.8. a) Cîte unghiuri mai mari decît 60° poate avea un triunghi? b) Dar mai mici decît 60°? Să se dea exemple.

3.2.9. În figura 22, $AD \perp AB$, $BE \perp \perp BC$, $CF \perp CA$. Să se afle suma unghiurilor 1, 2 și 3.

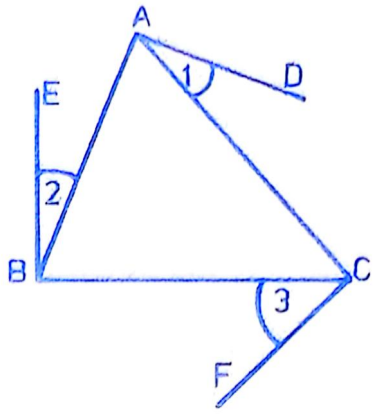


Fig. 22

3.2.10. În figura 23, $M \in BC$, $N \in CA$ și $P \in AB$. Să se afle suma măsurilor unghiurilor notate în figură cu 1, 2, ..., 6.

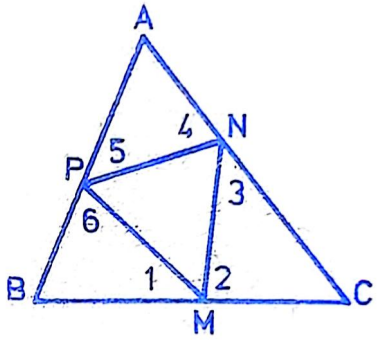


Fig 23

3.2.11. Fie ABC un triunghi oarecare și AD o înălțime. Se constată că, dacă $\hat{B} > \hat{C}$, atunci $\widehat{BAD} < DAC$. Să se explice acest fapt.

3.2.12. a) Un unghi al unui triunghi isoscel are 68°. Să se afle celelalte unghiuri ale triunghiului. b) Aceeași problemă dacă unghiul dat are 106°.

3.2.13. Un unghi al unui triunghi isoscel este congruent cu un unghi al unui alt triunghi isoscel. Se poate deduce de aici că toate unghiurile celor două triunghiuri sînt congruente două cîte două? Să se dea exemple.

3.2.14. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$). Pe dreptele AB și AC se iau două puncte M și N ($M \in AB$) astfel ca segmentele AM și AN să fie congruente. Ce poziție are dreapta MN față de BC. Trei cazuri: M este între A și B, iar N între A și C, M este pe prelungirea lui AB dincolo de B și N pe prelungirea lui AC dincolo de C, M este pe prelungirea lui AB dincolo de A și N pe prelungirea lui CA dincolo de A.

3.2.15. Fie AB și CD doi diametri ai unui cerc. Ce poziție au una față de alta dreptele: a) AC și BD; b) AD și BC.

3.2.16. a) Unghiurile de la baza unui triunghi isoscel pot fi obtuze sau drepte? b) Dar unghiul de la vîrf?

3.2.17. Fie xOy un unghi oarecare și M un punct al laturii Ox. Pe latura Oy se poartă un segment ON congruent cu OM. Să se demonstreze că, dacă punctul M se mișcă pe Ox, dreapta MN nu-și schimbă direcția.

3.2.18. a) Să se calculeze unghiurile: a) unui triunghi echilateral. b) Cîte unghiuri ale unui triunghi trebuie să măsurăm ca să ne dăm seama dacă este echilateral?

3.2.19. Fie O centrul unui cerc și A, B două puncte ale cercului astfel încît segmentul AB să fie congruent cu o rază a cercului. Se cer unghiurile triunghiului OAB.

3.2.20. Un elev vrea să deseneze cu mîna liberă un triunghi isoscel care să nu fie echilateral. El duce întîi două segmente egale care pornesc din același punct A. Cînd să tragă linia a treia, care să închidă triunghiul, își dă seama că obține un triunghi echilateral și atunci se gîndește să prelungească segmentele. Prelungirea va fi utilă?

3.2.21. a) Să se calculeze unghiurile unui triunghi dreptunghic și isoscel? b) Cîte unghiuri ascuțite ale unui triunghi dreptunghic trebuie să măsurăm ca să ne dăm seama dacă este isoscel?

3.2.22. Să se construiască, folosind numai rigla (negradată) și raportorul: a) un triunghi echilateral; b) un triunghi dreptunghic și isoscel.

3.2.23. a) Fie ABC un triunghi echilateral. Pe laturile AB și AC se poartă două segmente congruente AM și AN. Ce fel de triunghi este AMN? b) Aceeași întrebare dacă triunghiul ABC este dreptunghic și isoscel $AB \perp AC$. Două cazuri: cînd $AM > AB$ și cînd $AM < AB$. c) Aceeași problemă dacă segmentele congruente AM și AN se poartă pe prelungirile laturilor AB și AC dincolo de vîrful A.

3.2.24. a) Cîte grade are fiecare dintre unghiurile unui triunghi dreptunghic isoscel? b) Un triunghi dreptunghic are un unghi de 45°. Să se compare catetele sale. c) Un triunghi dreptunghic are un unghi de 45°. Suma catetelor sale este de 18 cm. Să se afle lungimile catetelor. d) Într-un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($AB \perp AC$), se duce înălțimea AD. Să se compare AD cu segmentele BD și DC. e) Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea este congruentă cu jumătate din ipotenuză. Să se afle unghiurile triunghiului.

3.2.25. a) Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel ($AB \perp AC$). Printr-un punct oarecare D al dreptei AB se duce perpendiculara pe dreapta BC și se notează cu E piciorul ei; fie $DE \cap AC = F$. Să se demonstreze că

$AF \equiv AD$. Se vor deosebi trei cazuri: cînd punctul D aparţine prelungirii laturii AB dincolo de A, cînd D este între A şi B şi cînd D aparţine prelungirii laturii AB dincolo de B. b) Aceeaşi problemă dacă triunghiul ABC este isoscel ($AB \equiv AC$), dar nu dreptunghic.

3.2.26. Fie AB un segment şi C un punct al său. Se construiesc două triunghiuri dreptunghice isoscele ACD şi BCE cu unghiul drept în C. a) Triunghiurile sînt de o parte şi de alta a dreptei AB. Ce poziţie au una faţă de alta dreptele AD şi BE? b) Să se determine punctul C astfel încît segmentul DE să fie minim. c) Triunghiurile sînt de aceeaşi parte a dreptei AB. Cîte grade are unghiul format de dreptele AD şi BE? d) Să se determine punctul C astfel încît diferenţa dintre CD şi CE să fie minimă.

3.2.27. a) Într-un triunghi ABC se dă: $\hat{B} = 74°$, $\hat{C} = 46°$. Se cere unghiul ascuţit format de înălţimea care pleacă din A cu bisectoarea unghiului A. b) Aceeaşi problemă, cînd se dă: $\hat{B} = 36°$, $\hat{C} = 128°$.

3.2.28. Într-un triunghi ABC se dă: $\hat{A} = 50°$, $\hat{C} = 64°$. Să se calculeze unghiul ascuţit pe care-l face bisectoarea unghiului B cu înălţimea care pleacă din A.

3.2.29. Se consideră un unghi xOy. Să se aleagă pe latura Ox un punct M şi pe latura Oy un punct N astfel încît suma unghiurilor ONM şi OMN să fie cît mai mare.

3.2.30. a) Fie AB un segment de 180 mm şi C, D două puncte ale lui (fig. 29). De la segmentul AC se ia o parte AM, de la CD o parte CN şi de la DB o parte DP. Se ştie că $AM + CN + DP = 124$ mm. Se cere suma segmentelor rămase, $MC + ND + PB$. b) În figura 30, $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 124°$. Se cere suma $\hat{4} + \hat{5} + \hat{6}$. c) Dacă în figura 30 Ax, By şi Cz sînt bisectoarele unghiurilor triunghiului, cîte grade au sumele $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$ şi $\hat{4} + \hat{5} + \hat{6}$?

Fig. 29

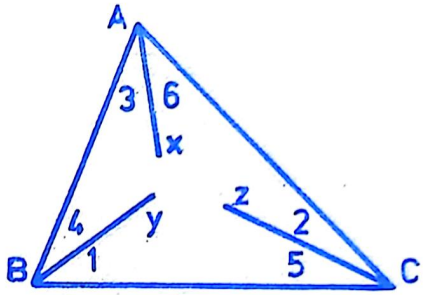


Fig. 30

3.2.31. În figura 31, unghiul A este drept şi $CD \perp BC$. Să se compare unghiul B cu unghiul 1.

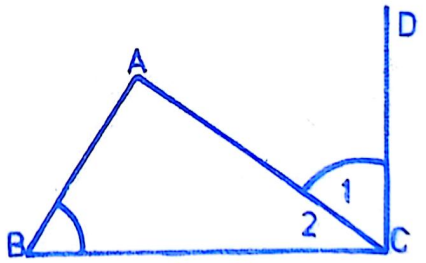


Fig. 31

3.2.32. Aşezăm două echere egale ca în figura 32. Cîte grade are unghiul 1?

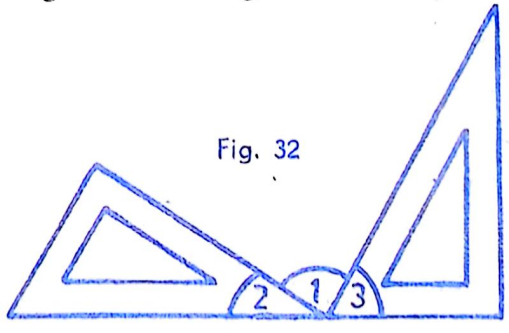


Fig. 32

3.2.33. În figura 33, AD, BE și CF sînt înălțimile triunghiului ABC. Măsurile unghiurilor triunghiului sînt: $\hat{A} = 55°$, $\hat{B} = 80°$, $\hat{C} = 45°$. Să se

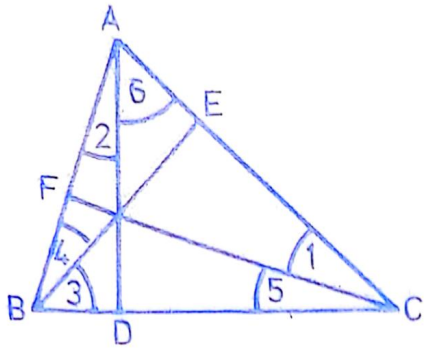


Fig. 33

afle: a) suma $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$; b) suma $\hat{4} + \hat{5} + \hat{6}$. Aceeași problemă, dacă unghiurile triunghiului sînt de 40°, 60° și 80°; să se ia și alte cazuri. De ce se obține mereu același rezultat?

3.2.34*. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și AD înălțimea lui. Să se demonstreze că: a) bisectoarea unghiului DAC este perpendiculară pe bisectoarea unghiului B; b) bisectoarea unghiului DAB este perpendiculară pe bisectoarea unghiului C.

3.2.35. În figura 35, $AB \parallel CD$, MP și NP sînt bisectoare. Cîte grade are unghiul P?

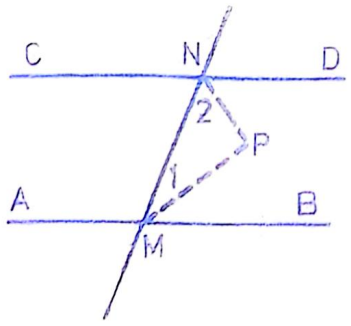


Fig. 35

3.3. Unghi exterior

3.3.1. În figura 36, semidreptele Ox și Oy sînt fixe, iar semidreapta Az se poate roti în jurul punctului A. La început ele determină un triunghi OAM. Cînd rotim semidreapta Az în jurul punctului A în sensul indicat de săgeată, astfel ca unghiul A să crească,

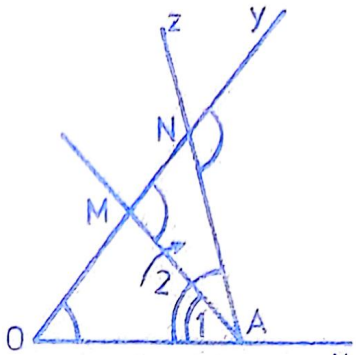


Fig. 36

se constată că unghiul AMy, care devine ANy, crește de asemenea. Să se pună acest fapt în legătură cu teorema cu privire la unghiul exterior al unui triunghi.

3.3.2. Într-un triunghi ABC, $\hat{A} = 43°$, $\hat{C} = 68°$. Să se afle unghiurile exterioare ale triunghiului.

3.3.3. Într-un triunghi ABC, $\hat{A} = 38°$, $\hat{B}' = 70°$, B' fiind unghiul exterior din B. Să se afle unghiurile triunghiului.

3.3.4. Dintre cele trei unghiuri exterioare ale unui triunghi, cîte pot fi ascuțite?

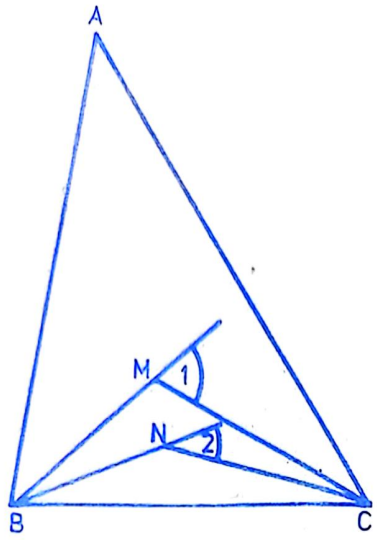
3.3.5. Fie ABC un triunghi oarecare. Se poate găsi în interiorul său un punct M astfel încît unghiul BMC să fie mai mic decît unghiul A?

3.3.6. Fie ABC un triunghi oarecare și B' și C' unghiurile exterioare din B și C. Să se demonstreze că

$$\hat{B}' + \hat{C}' - \hat{A} = 180°.$$

3.3.7. În figura 38, BM și CM sînt bisectoarele unghiurilor B și C, iar BN și CN sînt bisectoarele unghiurilor MBC și MCB. Să se demonstreze că unghiul 2 este jumătate din unghiul 1.

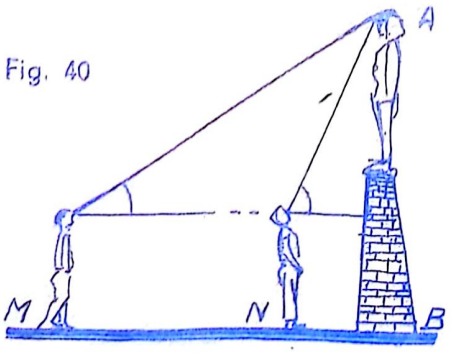
Fig. 38



3.3.8. Fie ABC un triunghi echilateral. Latura BC se prelungește dincolo de C cu un segment CD congruent cu BC. Cîte grade are unghiul BAD?

3.3.9. a) Dintre un unghi oarecare al unui triunghi și un unghi exterior nealăturat lui, care este mai mare? b) Fie AB o statuie (fig. 40). Dacă ne apropiem de statuie trecînd din poziția M în poziția N privind mereu capătul A, trebuie să ridicăm capul. Să se pună acest fapt în legătură cu răspunsul la întrebarea precedentă. c) Dacă punctul A reprezintă Luna și mergem în direcția în care o vedem, nu e nevoie să ridicăm mereu capul, se pare că Luna merge cu noi. Cum se explică această deosebire? d) Se observă aceeași deosebire cînd călătorim noaptea și zărim luminile unei localități îndepărtate și ale unei localități apropiate?

Fig. 40



3.3.10. Fie ABC o foaie de hîrtie în formă de triunghi în care unghiul A este ascuțit și $AC > BC$ (fig. 41). Indoim colțul A astfel încît vîrful A să cadă într-un punct oarecare D al laturii AB. Atunci hîrtia capătă forma indicată în figură. Ce relație există între unghiurile A și 1?

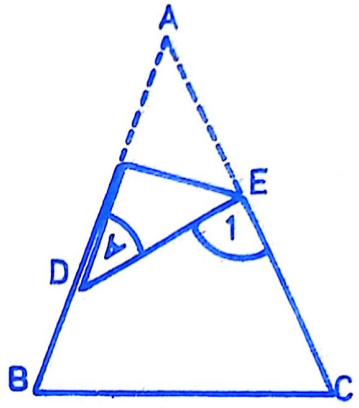


Fig. 41

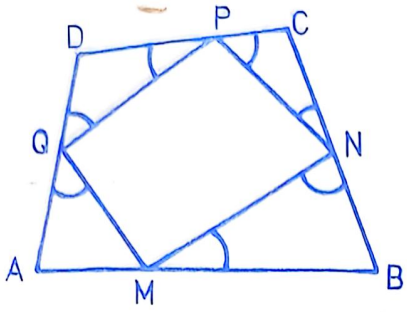
3.4. Suma unghiurilor unui poligon

3.4.1. a) Cu cît crește numărul laturilor unui poligon convex dacă i se adaugă un vîrf? b) Cu cît crește suma unghiurilor sale dacă numărul laturilor sale crește cu 1? c) Folosind acest rezultat, să se deducă formula care dă suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi.

3.4.2. a) Se consideră un poligon convex oarecare, de exemplu un octogon. Cîte diagonale se pot duce dintr-un vîrf? În cîte triunghiuri se descompune octogonul cînd ducem toate diagonalele care pleacă din același vîrf? Să se deducă de aici care este suma unghiurilor unui octogon convex. b) Aceeași problemă în cazul unui poligon convex cu n laturi.

3.4.3. a) În figura 44, M, N, P și Q sînt puncte ale laturilor patrulaterului $ABCD$ luate la întîmplare. Să se afle suma unghiurilor însemnate în figură cu cîte un arc. b) Aceeași problemă dacă în locul patrulaterului se ia un pentagon. c) De asemenea în cazul unui hexagon.

Fig. 44



3.4.4. a) Să se deseneze un patrulater convex $ABCD$ cu unghiurile $\hat{A} = 40°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 70°$. Lungimile laturilor se pot lua după voie (!). b) Ce condiție trebuie să îndeplinească trei unghiuri pentru a fi unghiuri ale unui patrulater convex? c) Ce condiție trebuie să îndeplinească 99 de unghiuri ca să fie unghiuri ale unui poligon convex cu 100 de laturi?

3.4.5. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare, A opus lui C. Să se demonstreze că suma unghiurilor exterioare din B și D este egală cu suma unghiurilor interioare A și C.

3.4.6. a) În figura 46, unghiurile notate cu cifre sînt unghiuri exterioare ale hexagonului. Să se afle suma lor. b) Se poate afla după acest procedeu suma unghiurilor exterioare unui poligon convex cu 100 de laturi? c) Să se completeze: Suma unghiurilor exterioare ale unui poligon convex este de... d) Să se deducă de aici formula care dă suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi. Cazul $n = 3$.

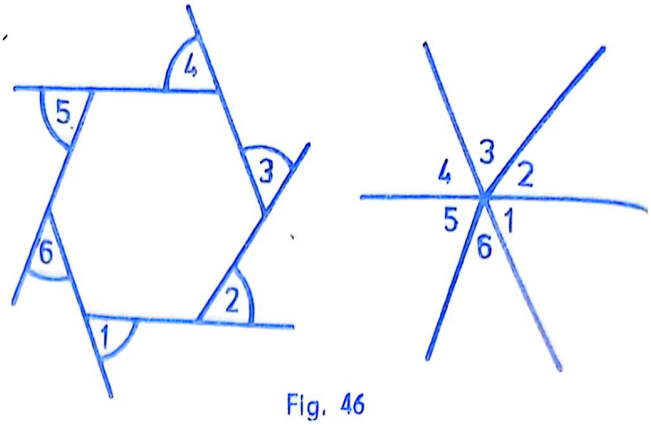


Fig. 46

3.5. Probleme diverse

3.5.1. Să se construiască un triunghi echilateral ABC cunoscînd înălțimea $AD = 45$ mm.

Să se construiască un triunghi dreptunghic isoscel ABC, $AB \perp AC$, cunoscînd:

3.5.2. Înălțimea $AD = 32$ mm.

3.5.3. Bisectoarea $BD = 42$ mm.

3.5.4. În figura 47, $Ax \perp AB$, $Ay \perp AB$, M este un punct oarecare al segmentului AB, $AC \equiv MB$ și $BD \equiv AM$. a) Ce fel de triunghi este CMD? b) Cum variază unghiul MCD cînd punctul M descrie segmentul AB?

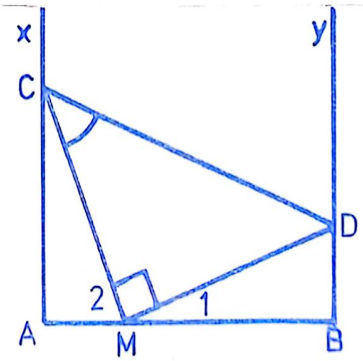
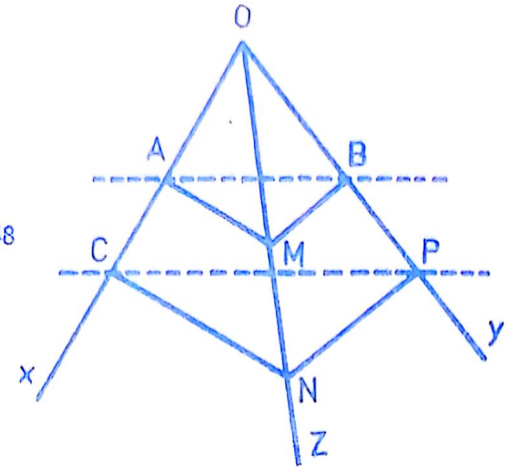


Fig. 47

3.5.5. Fie ABC un triunghi. Pe semidreapta AB se poartă un segment AD congruent cu latura AC și pe semidreapta AC se poartă un segment AE congruent cu AB. Să se demonstreze că $BE \parallel DC$.

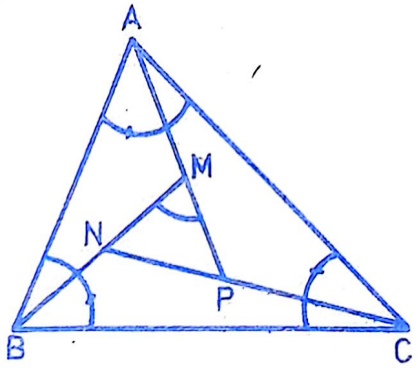
3.5.6. În figura 48, xOy este un unghi oarecare, Oz este bisectoarea lui, $M \in Oz$ și $N \in Oz$. Din M și N s-au coborît perpendicularele pe Ox și Oy. De ce este dreapta AB paralelă cu CD?

Fig. 48



3.5.7. În figura 49, ABC este un triunghi oarecare și unghiurile sale au fost împărțite în cîte trei părți congruente. Cunoscînd unghiurile A, B și C, să se afle unghiurile triunghiului MNP.

Fig. 49



3.5.8. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$) și M un punct oarecare al bazei. Pe semidreapta BA se poartă un segment BD congruent cu BM și pe semidreapta CA un segment CE congruent cu CM. Să se demonstreze că unghiul DME este congruent cu unghiurile de la baza triunghiului ABC. Se va examina și cazul cînd $BM > BA$ sau $CM > CA$.

3.5.9. Să se demonstreze că: a) Dacă un triunghi este isoscel, unghiul exterior de la vîrf este dublul unui unghi de la bază. b) Dacă un unghi exterior al unui triunghi este dublul unui unghi interior nealăturat, triunghiul este isoscel.

3.5.10. Să se demonstreze că: a) Într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului exterior de la vîrf este paralelă cu baza. b) Reciproc, dacă bisectoarea unui unghi exterior al unui triunghi este paralelă cu o latură a triunghiului, triunghiul este isoscel.

3.5.11. În figura 52, $d \parallel e$, AB este o secantă oarecare, AC este bisectoarea unghiului A, BC este bisectoarea unghiului B, $CD \perp d$ și $CD \cap e = E$. a) Să se demonstreze că: a) $CD \equiv CE$; b) dacă $CG \parallel d$, $AG \equiv GB$.

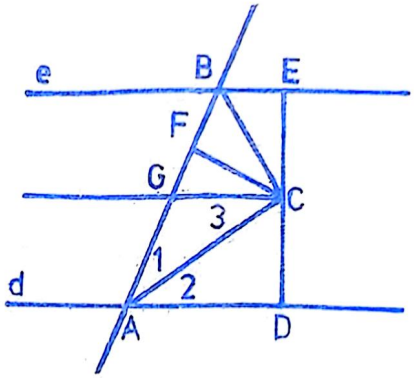


Fig. 52

3.5.12. a) Fie ABC un triunghi dreptunghic (fig. 53) în care cateta mică AB este jumătate din ipotenuză. Construim lîngă el un triunghi ACB' congruent cu el (așezăm unul lîngă celălalt două echere egale, ca în figura 54). Ce fel de triunghi este CBB'? Cîte grade are unghiul BCB'? unghiul

Fig. 53

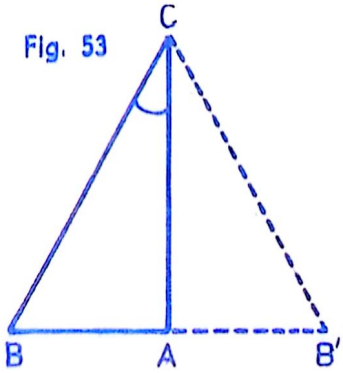
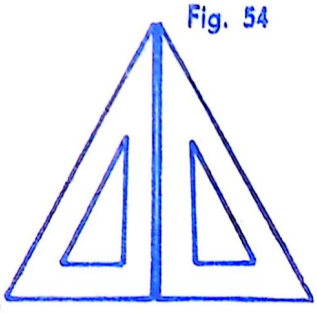


Fig. 54



BCA? Să se completeze: Dacă într-un triunghi o catetă este jumătate din ipotenuză, unghiul opus acelei catete are ... grade. b) Fie ABC un triunghi dreptunghic în care unghiul C are 30°. Construim lîngă el un triunghi congruent cu el, ca în figura 53. Cîte grade are unghiul BCB'? unghiul B? unghiul B'? Ce fel de triunghi este CBB'? A cîta parte din BB' este AB? A cîta parte din BC este AB? Să se completeze: Dacă un triunghi dreptunghic are un unghi de 30°, cateta mică este... din ipotenuză.

3.5.13. a) Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și BD, CE două dintre înălțimile lui ($D \in AC$, $E \in AB$). Să se demonstreze că $\widehat{DBC} + \widehat{ECB} = \hat{A}$. b*) Să se examineze cazul cînd triunghiul este obtuzunghic.

3.5.14. a) Într-un triunghi isoscel ABC ($AB \equiv AC$) se duc înălțimile BD și CE ($D \in AC$, $E \in AB$). Să se demonstreze că $ED \parallel BC$. b) Aceeași problemă dacă BD și CE sînt bisectoare. c) De asemenea dacă BD și CE sînt mediane.

3.5.15. Într-un triunghi ABC se duce o bisectoare AD ($D \in BC$). Să se demonstreze că diferența dintre unghiurile ADB și ADC este egală cu diferența dintre unghiurile B și C. Caz particular: $AB \equiv AC$.

3.5.16. Fie ABC un triunghi oarecare, D mijlocul laturii AC și E mijlocul laturii AB. Mediana BD se prelungește cu un segment DF congruent cu ea și mediana CE se prelungește cu un segment EG congruent cu ea. a) Să se demonstreze că punctele G, A și F sînt coliniare. b) Ce relație există între lungimile segmentelor GF și BC?

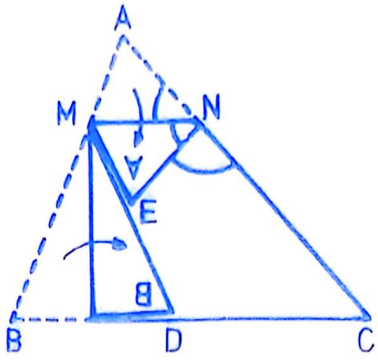


Fig. 59

3.5.17. Considerăm o foaie de hîrtie în formă de triunghi ABC (fig. 59). a) Îndoim colțul B astfel ca vîrful B să cadă într-un punct D al laturii BC aproape de poziția sa inițială. Fie M punctul în care se îndoaie latura AB; segmentul MB devine MD. Dacă repetăm lucrarea, aducînd același vîrf B într-un punct D' al bazei BC, o altă parte, $M'B$, a laturii AB devine $M'D'$. De ce sînt dreptele MD și $M'D'$ paralele? b) Colțul B fiind îndoit așa cum s-a arătat, îndoim și colțul A astfel încît semidreapta MA să coincidă cu semidreapta MD. Fie E noua poziție a vîrfului A. Cînd desfacem hîrtia, apare o dungă MN. De ce este dreapta MN paralelă cu BC? c) Cunoscînd unghiurile triunghiului ABC, să se afle unghiurile patrulaterului $DENC$.

3.5.18. Aparatul din figura 60, numit *cumpăna zidarului*, servește pentru a vedea dacă dreapta MN este orizontală. El are forma unui triunghi isoscel, $AB \equiv AC$, și are o stinghie DE, $AD \equiv AE$. În mijlocul stinghiei este gravată o linioară L. De vîrful A atîrnă un fir cu plumb AP. Aparatul se așază pe dreapta MN (un zid în construcție). Dacă firul cu plumb trece prin semnul L, dreapta MN este orizontală. De ce?

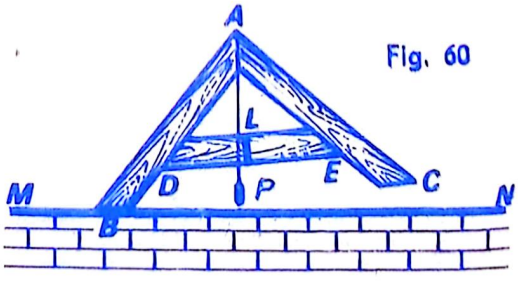


Fig. 60

Capitolul 4

INEGALITĂȚI

4.1. Perpendiculare și oblice

4.1.1. a) O scară este rezemată de un zid (fig. 1). Fie a lungimea scării și b înălțimea pînă la care ajunge scara. Să se compare a cu b. b) Regulile de circulație cer ca pietonii să traverseze străzile „perpendicular". De ce?

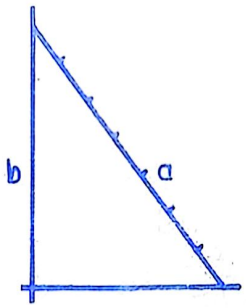


Fig. 1

4.1.2. Intr-un triunghi dreptunghic, ce este mai mare, o catetă sau ipotenuza?

4.1.3. Fie ABC un triunghi oarecare. Dintr-un punct oarecare M al laturii BC se coboară perpendicularele pe dreptele AB și AC; fie N și P picioarele lor, $N \in AB$. Să se compare lungimea liniei frînte NMP cu lungimea laturii BC. Două cazuri: cînd unghiurile B și C sînt ascuțite și cînd unul din ele este obtuz.

4.1.4. Se dau două puncte A și B. O dreaptă d care trece prin A se rotește în jurul punctului A. Ce poziție trebuie să ocupe dreapta d ca distanța de la B la ea să fie maximă?

4.1.5*. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic și M un punct al laturii BC. Din M se duce perpendiculara MN pe AC și se prelungește cu un segment NP congruent cu MN. Tot așa, se duce perpendiculara MQ pe AB și se prelungește cu un segment QR congruent cu MQ. (P și R sînt simetricele punctului M față de AC și AB.) Să se aleagă punctul M astfel încît linia frîntă RAP să fie cît mai scurtă.

4.2. Relații între laturile unui triunghi

4.2.1. a) Fie a, b și c lungimile a trei segmente. Ce calcule trebuie făcute pentru a vedea dacă cu aceste segmente se poate forma un triunghi? Să se spună dacă cu segmentele care au lungimile următoare se poate forma un triunghi: b) 5; 8; 11; c) 7; 10; 18; d) 7; 7; 5; e) 6; 6; 13.

4.2.2. Se dau segmentele de lungime: $a = 7$ m, $b = 12$ m. Între ce limite trebuie să fie cuprins un al treilea segment, pentru ca să se poată construi un triunghi cu aceste segmente.

4.2.3. Fie ABC un triunghi oarecare, D un punct al laturii AB și E un punct al laturii AC. a) Să se compare perimetrul patrulaterului $BCED$ cu perimetrul triunghiului ABC; b) de asemenea cu perimetrul triunghiului EBC.

4.2.4. Fie AB o latură a unui poligon oarecare. În apropierea acestei laturi se ia un punct M şi se formează un alt poligon care, pe lîngă vîrfurile primului poligon, are şi vîrful M. Unde trebuie să fie situat punctul M ca noul poligon să aibă un perimetru mai mare, dar o arie mai mică decît primul?

4.2.5. Lungimile laturilor unui triunghi isoscel sînt a, a şi b. Ce relaţie există între a şi b? Două cazuri: $b < a$ şi $b > a$.

4.2.6. În figura 5, punctele A, B şi C reprezintă trei localităţi. Fiecare din ele este legată de celelalte printr-o şosea dreaptă. Un camion este încărcat în A, trebuie să descarce o parte din încărcătură în C şi o parte în B şi să rămînă în B. Care este drumul cel mai scurt?

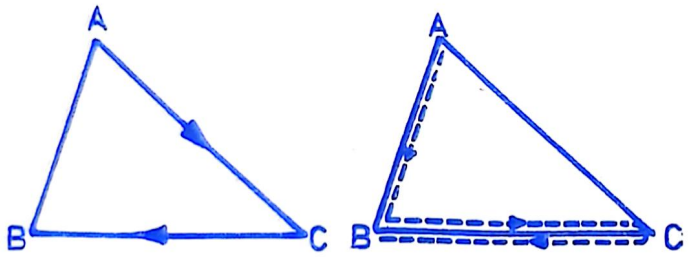


Fig. 5

4.2.7. Fie A şi B două puncte ale unui cerc. Să se compare segmentul AB cu diametrul cercului.

4.2.8. Fie a, b şi c lungimile laturilor unui triunghi. Să se compare a şi b cu $\frac{c}{2}$. Să se dea exemple.

4.2.9. a) Să se compare o latură a unui triunghi cu jumătate din perimetrul triunghiului. b) De asemenea suma a două laturi.

4.2.10. a) Fie ABC un triunghi. Pe fiecare dintre laturile lui se ia cîte un punct, $M \in BC$, $N \in CA$, $P \in AB$. Punctele M, N şi P se pot alege astfel încît perimetrul triunghiului MNP să fie egal cu perimetrul triunghiului ABC sau mai mare decît el? b) Aceeaşi problemă în cazul unui poligon convex oarecare.

4.2.11. a) Fie ABC un triunghi şi M un punct oarecare. Să se demonstreze că suma distanţelor de la punctul M la vîrfurile triunghiului este mai mare decît jumătate din perimetrul triunghiului. b) Aceeaşi problemă în cazul unui poligon oarecare.

4.2.12. Să se demonstreze că, în orice patrulater convex, suma diagonalelor este: a) mai mică decît perimetrul; b) mai mare decît jumătate din perimetrul patrulaterului.

4.3. Relaţii între laturile şi unghiurile unui triunghi

4.3.1. a) Lungimile laturilor unui triunghi sînt (în cm): $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 9$. Să se scrie în ordine crescătoare unghiurile triunghiului. b) Măsurile unghiurilor unui triunghi sînt: $\hat{A} = 40°$, $\hat{B} = 80°$. Să se scrie în ordine crescătoare laturile triunghiului.

4.3.2. a) Într-un triunghi ABC, latura BC este cea mai mică. Unghiul A poate fi obtuz? Dar drept? b) Unghiul A este obtuz. Să se compare latura BC cu celelalte laturi ale triunghiului.

4.3.3. În figura 7, punctul A este fix şi semidreapta Az se roteşte în jurul punctului A astfel încît unghiul A să crească. La început $OM < AM$ şi segmentul OM creşte. Cît de mare trebuie să fie unghiul A în comparaţie cu unghiul O ca să avem: a) $OM < AM$; b) $OM \equiv AM$; $OM > AM$?

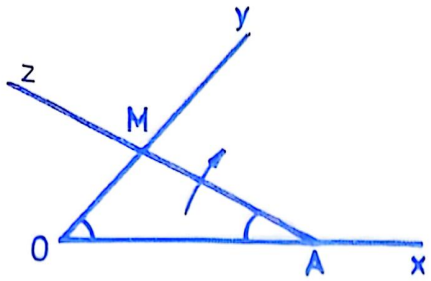


Fig. 7

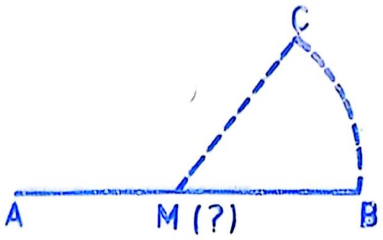


Fig. 11

4.3.4. Fie ABC un triunghi, $AB < AC$ și AD o înălțime. Care dintre unghiurile BAD și DAC este mai mare?

4.3.5. Se consideră un triunghi ABC în care $AB < AC$. Pe latura AC se iau mai multe puncte $D, E, F...$, se duce prin fiecare din ele paralela la BC și se notează cu $D', E', F'...$ intersecțiile lor cu latura AB. Să se compare segmentele: AD cu AD', AE cu AE', AF cu $AF'...$

4.3.6. Să se compare baza cu înălțimea unui triunghi isoscel: a) ascuțitunghic; b) dreptunghic; c) obtuzunghic. Să se demonstreze și propozițiile reciproce.

4.4. Probleme diverse

4.4.1*. Fie ABC un triunghi în care $BC = 2AB$. Să se compare unghiul C cu celelalte unghiuri ale triunghiului.

4.4.2.* Să se demonstreze că orice mediană a unui triunghi este mai mică decît media laturilor care pleacă din același vîrf cu ea.

4.4.3. Fie ABC un triunghi, în care $AC \neq AB$. Pe care din aceste laturi o taie mediatoarea laturii BC?

4.4.4*. a) Avem o bară de fier AB (fig. 11). Trebuie să o îndoim într-un punct M astfel încît capătul ei B să ajungă într-un punct C situat aproape de B. Să se determine punctul M printr-o construcție geometrică. b) Unde trebuie să fie situat punctul C ca problema să aibă o soluție? c) Aceeași problemă, dacă se dau două puncte C și D și se cere ca bara îndoită să treacă prin punctul C unde se îndoaie din nou astfel încît capătul B să ajungă în D. d) De asemenea, dacă se dau trei puncte, C, D și E și se cere ca punctul B să ajungă în E după ce bara a fost îndoită în punctele M, C și D.

4.4.5. Fie M un punct din interiorul unui triunghi ABC. Să se demonstreze că

$$MB + MC < AB + AC.$$

b) Să se deducă de aici că suma $MA + MB + MC$ este mai mică decît perimetrul triunghiului.

4.4.6. Fie AB un segment și M un punct nesituat pe mediatoarea lui. Să se compare segmentul MA cu MB.

4.4.7. Fie xOy un unghi ascuțit sau drept și M un punct din interiorul lui nesituat pe bisectoarea lui. Să se compare distanțele de la punctul M la laturile unghiului.

4.4.8. Fie ABC un triunghi, $\hat{C} > 90°$ (fig. 15). Dacă punctul C se mută într-un punct D al prelungirii laturii BC dincolo de C, se obține un

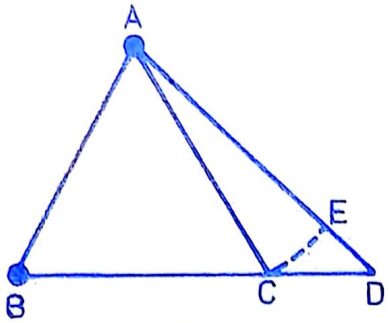


Fig. 15

alt triunghi, ABD, în care latura AB a rămas aceeaşi, iar laturile BC şi AC au devenit BD şi AD. a) Să se demonstreze că $AD > AC$. b) Care dintre laturile AB şi AC a crescut mai mult? c) Punctele A şi B reprezintă două bobine egale. Aducem capetele firelor de pe ele pînă în punctul C astfel încît porţiunile lor de la A la C şi de la B la C să fie drepte. Dacă mişcăm punctul C de-a lungul semidreptei BC, amîndouă bobinele se învîrtesc. Care din ele se învîrteşte mai repede? d) Dar dacă mişcăm punctul C de-a lungul semidreptei AC? e) Pe ce linie trebuie să mişcăm punctul C ca bobinele să se învîrtească deopotrivă de repede?

4.4.9. Într-un triunghi ABC se duce bisectoarea AD ($D \in BC$). Să se compare DB cu AB şi DC cu AC.

Capitolul 5

PATRULATERE

5.0. Recapitulare

1. Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă:

a) laturile sale sînt paralele două cîte două;

b) laturile opuse sînt congruente două cîte două;

c) are două laturi paralele şi congruente;

d) unghiurile opuse sînt congruente două cîte două.

2. Diagonalele dreptunghiului sînt congruente. Un paralelogram ale cărui diagonale sînt congruente este dreptunghi.

3. Unghiurile de la baza unui trapez isoscel sînt congruente şi diagonalele sale sînt congruente.

5.1. Patrulaterul oarecare

5.1.1. Măsurile a trei unghiuri ale unui patrulater sînt 106°, 73° şi 85°. Să se afle măsura unghiului al patrulea.

5.1.2. Un patrulater convex poate avea o singură pereche de unghiuri suplementare?

5.1.3. a) Cîte unghiuri ascuţite poate să aibă un patrulater convex? b) Aceeaşi întrebare cu privire la unghiurile obtuze. c) De asemenea cu privire la unghiurile drepte. Se vor da exemple desenînd patrulaterele.

Să se construiască un patrulater cînd se dă:

5.1.4. $AB = 50$ mm, $AD = 38$ mm, $BC = 45$ mm, $\hat{A} = 80°$, $\hat{B} = 45°$.

5.1.5. $AB = 56$ mm, $BC = 50$ mm, $CD = 20$ mm, $DA = 35$ mm, $AC = 25$ mm.

5.1.6. $AB = 60$ mm, $BC = 45$ mm, $CD = 30$ mm, $DA = 50$ mm, $\hat{A} = 75°$.

5.1.7. $AB = 60$ mm, $BC = 65$ mm, $AD = 48$ mm, $AC = 60$ mm, $BD = 54$ mm.

5.1.8. AB, BC, CD şi DA fiind lungimile laturilor unui patrulater, ce este mai mic, AB sau suma $BC + CD + DA$?

5.1.9. În figura 1, $ABCD$ este un patrulater oarecare. Să se compare: a) suma $\hat{1} + \hat{2}$ cu $\hat{5} + \hat{6}$; b) suma $\hat{3} + \hat{4}$ cu $\hat{7} + \hat{8}$.

5.1.10. *Soluţia I.* În figura 1, $ABCD$ este un patrulater oarecare şi x, y, z, u sînt unghiurile sale exterioare. Ce relaţie există între unghiurile x, 2 şi 7? Să se găsească relaţii asemănătoare între celelalte unghiuri exterioare şi unghiurile notate cu cifre. Să se compare suma măsurilor unghiurilor exterioare ale patrulaterului cu suma măsurilor unghiurilor sale interioare.

5.1.11. Se poate găsi în interiorul unui patrulater convex un punct M astfel încît unghiul BMD să fie mai mic decît unghiul A?

5.1.12. Un dispozitiv ca cel din figura 3 se numește patrulater *articulat*. El este format din patru vergele legate între ele astfel încît să se poată roti în jurul „vîrfurilor" patrulaterului. a) Un triunghi articulat este deformabil? Să se pună acest fapt în legătură cu un caz de congruență a triunghiurilor. b) Un patrulater articulat este deformabil? c) Dar dacă laturile AB și AD nu se pot roti în jurul punctului A? d) Dar dacă se adaugă o vergea care să ocupe locul unei diagonale, de exemplu al diagonalei BD?

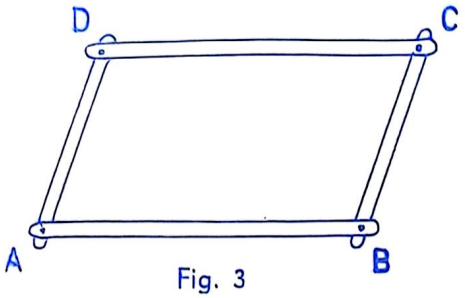


Fig. 3

5.2. Paralelogramul

5.2.1. Unghiurile unui paralelogram oarecare pot fi ascuțite? obtuze? Să se facă legătura între ceea ce arată desenul și proprietățile unghiurilor unui paralelogram.

5.2.2. Un unghi al unui paralelogram este de 63°. Să se afle celelalte unghiuri ale paralelogramului.

5.2.3. a) Într-un paralelogram, un unghi este: a) dublul, b) triplul unui alt unghi. Să se afle unghiurile paralelogramului.

5.2.4. Dacă se duc diagonalele unui paralelogram, fiecare dintre unghiurile paralelogramului este împărțit în două părți. Se formează astfel opt unghiuri. Să se compare aceste unghiuri între ele.

5.2.5. Un patrulater în care unghiurile opuse sînt congruente două cîte două este paralelogram?

5.2.6. Perimetrul unui paralelogram este de 60 cm. Una dintre laturile sale este de 13 cm. Să se afle celelalte laturi.

5.2.7. Perimetrul unui paralelogram este de 64 cm și perimetrul unuia dintre triunghiurile în care o diagonală împarte paralelogramul este de 47 cm. Să se afle lungimea diagonalei.

5.2.8. Perimetrul unui paralelogram $ABCD$ este de 30 cm și lungimea diagonalei BD este de 12 cm. Se cere perimetrul triunghiului ABD.

5.2.9. Laturile unui paralelogram sînt de 12 cm și 7 cm, iar suma diagonalelor este de 30 cm. Să se afle perimetrele triunghiurilor în care diagonalele descompun paralelogramul.

5.2.10. Avem un fir de sîrmă drept AB. Să se determine trei puncte ale lui astfel încît, încovoindu-l în acele puncte, să putem forma un paralelogram.

Notațiile fiind cele din figura 6, să se construiască un paralelogram cînd se dă:

5.2.11. $AB = 45$ mm, $BC = 35$ mm, $\widehat{DAB} = 50°$.

5.2.12. $AB = 55$ mm, $AD = 30$ mm, $BD = 40$ mm.

5.2.13. $AC = 50$ mm, $BD = 30$ mm, $\widehat{BOC} = 48°$.

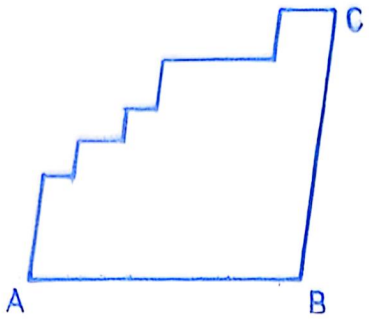
5.2.14. Să se formuleze cîteva cazuri de congruență a paralelogramelor.

5.2.15. Să se demonstreze că într-un paralelogram, orice latură este mai mică decît media aritmetică a diagonalelor.

5.2.16. În figura 5, linia frîntă în formă de scară care unește punctele A și C este formată din segmente paralele

cu AB sau cu BC. Se dau: $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm. Se cere lungimea liniei frînte.

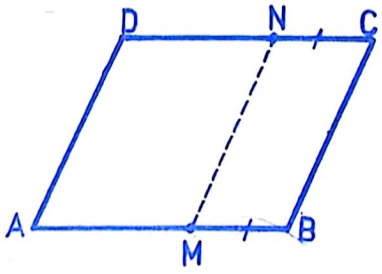
Fig. 5



5.2.17. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$). Printr-un punct D al bazei se duc paralele la AB și AC și se notează cu E și F intersecțiile lor cu dreptele AB și AC, $E \in AB$. a) Se dă: $AB = 7$ cm. Să se afle lungimea liniei frînte EDF. b) Cum trebuie ales punctul D al bazei BC ca lungimea liniei frînte EDF să fie cît mai mică?

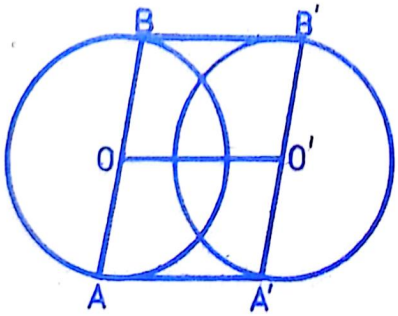
5.2.18. a) În figura 6, $ABCD$ este un paralelogram și $BM \equiv CN$. Ce fel de patrulater este $AMND$? b) Aceeași întrebare dacă segmentele BM și CN se iau pe prelungirile laturilor AB și CD dincolo de B și C.

Fig. 6



5.2.19. Cercurile din figura 7 au aceeași rază și AB, $A'B'$ sînt diametri paraleli. Ce fel de patrulatere sînt: a) $OO'B'B$; b) $OO'A'A$; c) $AA'B'B$?

Fig. 7



5.2.20. Fie $ABCD$ un paralelogram, O centrul său și M, N, P și Q mijloacele segmentelor OA, OB, OC și OD. Patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram?

5.2.21. Se dau două cercuri concentrice (care au același centru). În unul din aceste cercuri se duce un diametru AB și în celălalt un diametru CD. Ce fel de patrulater este $ACBD$?

5.2.22. În figura 8, punctul O este centrul paralelogramului $ABCD$ și MN, PQ sînt două drepte oarecare duse prin O. Să se demonstreze că $MQNP$ este un paralelogram.

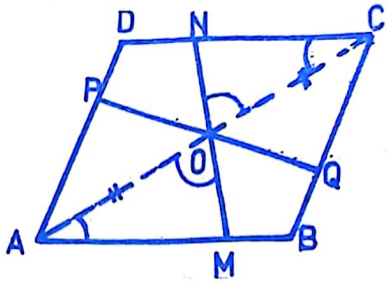


Fig. 8

5.2.23. Să se demonstreze că dacă un patrulater are două laturi paralele și una dintre diagonalele sale împarte cealaltă în părți congruente, el este paralelogram.

5.2.24. Într-un patrulater $ABCD$, A opus cu C, $AB \parallel CD$ și $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Patrulaterul este paralelogram?

5.2.25. a) Ce poziție au una față de alta bisectoarele unghiurilor ascuțite ale unui paralelogram? b) Dar bisectoarele unghiurilor obtuze? c) Cîte grade are unghiul format de bisectoarele a două unghiuri care au o latură comună?

5.2.26. Se consideră un paralelogram $ABCD$ ($AB \parallel CD$) și diagonala BD. a) Se duc bisectoarele unghiurilor ADB și DBC; fie E și F intersecțiile lor cu AB și DC. Ce fel de patrulater

este $EBFD$? b) Fie BG și DH bisectoarele unghiurilor ABD și BDC ($G \in AD$, $H \in BC$). Ce fel de patrulater este $BHDG$?

5.2.27. În figura 12, $ABCD$ este un paralelogram și BE, BF, DE și DF sînt bisectoarele unghiurilor respective. Ce fel de patrulater este $EBFD$?

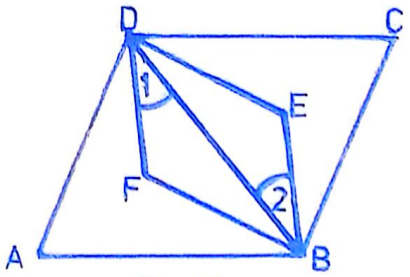


Fig. 12

5.2.28. Într-un paralelogram $ABCD$, $AB \parallel CD$, A opus lui C, se duc bisectoarele unghiurilor A și C; fie E și F intersecțiile lor cu laturile paralelogramului, $E \in DC$. Ce fel de patrulatere sînt: a) $FBED$; b) $AFCE$?

5.2.29. Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB \parallel CD$, A opus lui C, în care $AB > AD$. Să se compare unghiul CAB cu unghiul CAD și unghiul DBA cu unghiul DBC.

5.2.30. Fie xOy un unghi și M un punct nesituat pe nici una dintre laturile lui. Segmentul OM se prelungește cu un segment MA congruent cu OM. Prin punctul A se duce cîte o paralelă la Ox și Oy și se notează cu B și C punctele lor de intersecție cu dreptele Ox și Oy. Să se demonstreze că punctele B, M și C sînt coliniare. Se vor deosebi două cazuri, cînd punctul M este în interiorul unghiului și cînd este în exterior.

5.2.31. Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB \parallel CD$, A opus lui C, M mijlocul laturii AB și N mijlocul laturii CD. a) Ce fel de patrulatere sînt $AMND$ și $MBCN$? b) Ce poziție au diagonalele unuia dintre aceste patrulatere față de diagonalele celuilalt?

5.2.32. Să se deseneze un paralelogram $ABCD$ în care bisectoarele unghiurilor A și B se taie pe latura opusă CD. a) Să se compare lungimile laturilor paralelogramului. b) Perimetrul paralelogramului este, de exemplu, de 12 cm. Să se afle laturile lui. c) Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor C și D se taie pe latura AB.

5.2.33. Fie ABC un triunghi oarecare. Printr-un punct M al laturii BC se duce o dreaptă MN paralel cu CA, $N \in AB$ și o dreaptă MP paralel cu BA, $P \in AC$. Să se determine punctul M astfel încît linia frîntă $BNMPC$ să aibă lungimea maximă.

5.2.34. Fie ABC un triunghi oarecare. Printr-un punct oarecare M al laturii BC se duc paralelele la laturile BA și CA, și prin vîrful A se duce paralela la BC. Aceste drepte determină un triunghi MNP. a) Ce fel de patrulater este $BCNP$? b) Să se demonstreze că $\triangle MNP \equiv \triangle ABC$. c) Prin ce mișcare putem face ca cele două triunghiuri să coincidă?

5.2.35. Fie ABC un triunghi echilateral și M un punct al laturii BC. Pe latura BA se poartă un segment BD congruent cu BM și pe CA un segment CE congruent cu CM. Ce fel de patrulater este $ADME$? Să se afle perimetrul lui cunoscînd latura AB.

5.2.36*. Fie xOy un unghi și M un punct din interiorul lui. Să se ducă prin M o dreaptă astfel încît, A și B fiind intersecțiile ei cu laturile unghiului, M să fie mijlocul segmentului AB.

5.2.37. Se consideră un triunghi oarecare ABC. Printr-un punct M al laturii AB se duce paralela la BC; fie N intersecția ei cu AC. Să se determine punctul M astfel încît segmentul MN să fie congruent cu un segment dat s. Cît de mare poate fi segmentul s ca problema să aibă o soluție?

5.2.38. Se dau două drepte neparalele d, e și o a treia dreaptă f care nu este paralelă nici cu d, nici cu e. Printr-un punct M al dreptei d se duce paralela la f; fie N intersecția ei cu dreapta e. Să se determine punctul M astfel încît segmentul MN să fie congruent cu un segment dat s.

5.2.39. Se dau două drepte paralele, d și e, și un punct O. Să se ducă prin O o dreaptă astfel încît, A și B fiind intersecțiile ei cu dreptele d și e, segmentul AB să fie congruent cu un segment dat a. Se vor deosebi două cazuri: cînd punctul O este în interiorul fîșiei determinată de dreptele d și e sau pe una din ele și cînd este în exteriorul ei. Cît de mare poate să fie segmentul a ca problema să aibă o soluție?

5.2.40. Fie ABC un triunghi oarecare și D, E, F mijloacele laturilor sale, $D \in BC$, $E \in AC$. Segmentul DE se prelungește cu un segment EG congruent cu el și DF cu un segment FH congruent cu el. Să se demonstreze că: a) punctele H, A și G sînt coliniare; b) dreptele AD, BG și CH sînt concurente.

5.2.41. Să se deseneze două paralelograme care să aibă o diagonală comună; fie O și O' centrele lor. Ce poziție are punctul O' față de O?

5.2.42. Cercurile din figura 25 au aceeași rază și AB, $A'B'$ sînt diametri paraleli. a) Ce fel de patrulater este: a) $AO'B'O$? b) $OA'O'B$? c) Ce poziție au centrele lor unul față de celălalt?

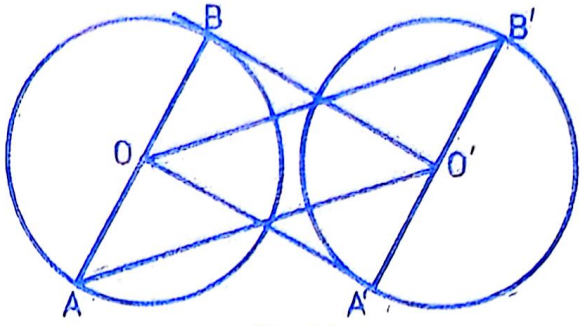


Fig. 25

5.2.43. a) Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Din vîrful D pleacă un punct M și se mișcă pe prelungirea laturii AD dincolo de D și odată cu el pleacă din vîrful B un punct N și se mișcă cu aceeași viteză pe prelungirea laturii CB dincolo de B. Punctele M și N reprezintă doi oameni și centrul paralelogramului un copac. Cei doi oameni se pot vedea unul pe celălalt? b) Aceeași problemă dacă punctul M merge de la D spre A și N de la B spre C.

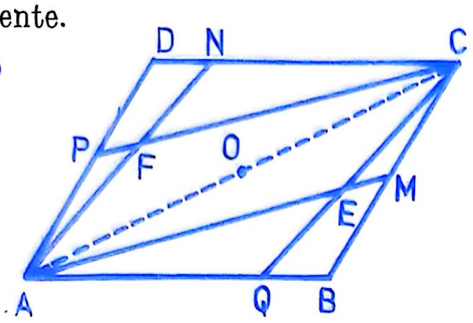
5.2.44. Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Prin vîrful A se duce o dreaptă oarecare Ax și prin C o dreaptă Cy paralelă cu Ax. Fie $Ax \cap DC = M$ și $Cy \cap AB = N$. Ce mișcare execută dreapta MN cînd dreptele Ax și By se rotesc în jurul punctelor A respectiv C rămînînd paralele între ele?

5.2.45. Se consideră un paralelogram $ABCD$, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Fie M intersecția bisectoarelor unghiurilor A și D, și N intersecția bisectoarelor unghiurilor B și C. a) Să se demonstreze că $MBND$ este un paralelogram care

are același centru cu $ABCD$. b) Să se găsească pe figură un alt paralelogram analog cu $MBND$.

5.2.46*. În figura 29, $ABCD$ este un paralelogram. Prin vîrful A s-au dus două drepte AM, AN și din vîrful C s-au dus paralele la ele, $CP \parallel AM$ și $CQ \parallel AN$. Să se demonstreze că dreptele PM, QN și FE sînt concurente.

Fig. 29



5.2.47. a) Un paralelogram articulat (v. probl. 5.1.12) se poate deforma astfel încît să nu mai fie paralelogram? b) Un patrulater care nu este paralelogram se poate deforma astfel încît să devină paralelogram? c) Figura 30 re-

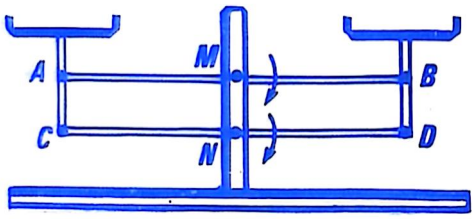


Fig. 30

prezintă schema unui cîntar. Punctele M și N sînt fixe și vergelele se pot roti în jurul punctelor: A, M, B, C, N și D. Să se explice de ce talerele rămîn orizontale, chiar dacă vergelele AB și CD se apleacă într-o parte sau alta.

5.3. Dreptunghiul

5.3.1. Cum se poate defini dreptunghiul prin măsurile unghiurilor sale? Să se deducă din această definiție că dreptunghiul este un paralelogram.

5.3.2. Fie $ABCD$ un dreptunghi și O intersecția diagonalelor sale. Să se compare unghiurile OAB, OBA, OCD și ODC; de asemenea unghiurile OAD, ODA, OBC și OCB.

5.3.3. a) Într-un dreptunghi, unul dintre unghiurile formate de diagonale este de 62°. Să se afle unghiurile formate de o diagonală cu laturile dreptunghiului. b) Într-un dreptunghi, unghiul format de o diagonală cu una din laturi este de 42°. Să se afle unghiul format de diagonale.

Notațiile fiind cele din figura 55, să se construiască un dreptunghi cînd se dă:

5.3.4. $AB = 48$ mm, $AD = 35$ mm.

5.3.5. $AB = 45$ mm, $AC = 55$ mm.

5.3.6. $AB = 50$ mm, $\widehat{CAB} = 38°$.

5.3.7. $AC = 50$ mm, $\widehat{AOB} = 130°$.

5.3.8. Să se formuleze cîteva cazuri de congruență a dreptunghiurilor.

5.3.9. Într-un paralelogram $ABCD$ diagonalele sînt congruente. Ce fel de paralelogram particular este?

5.3.10. Într-un paralelogram $ABCD$, $AB \parallel CD$, A opus lui C, unghiul $CAB \equiv$ unghiul DBA. Ce fel de paralelogram particular este?

5.3.11. Ce fel de paralelogram particular este paralelogramul în care mediatoarea unei laturi este o axă de simetrie?

5.3.12. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Printr-un punct oarecare O al diagonalei BD se duc paralelele la laturi. Fie M, N, P și Q intersecțiile lor cu laturile dreptunghiului $M \in AB$, $N \in BC$, $P \in CD$ și $Q \in DA$. Să se demonstreze că: a) $MN \parallel PQ$; b) cînd punctul O se mișcă pe diagonala BD, suma $MN + QP$ rămîne constantă.

5.3.13. a) Fie xOy un unghi și a lungimea unui segment. Să se găsească un punct M al laturii Oy astfel încît distanța de la M la Ox să fie egală cu a. Să se găsească un punct P al laturii Ox astfel încît distanța de la P la Oy să fie egală cu a. b) Se dau un cerc și o dreaptă d care nu-l taie. Să se determine un punct M al cercului astfel încît distanța de la punctul M la dreapta d să fie egală cu a.

5.3.14*. Să se construiască bisectoarea unui unghi cînd vîrful unghiului nu este pe foaia de desen.

5.3.15. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, M un punct al ipotenuzei BC, $MN \perp AB$, $MP \perp AC$, $N \in AB$, $P \in AC$. Să se determine poziția punctului M astfel încît suma $MN + MP$ să fie minimă, maximă.

5.3.16. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel ($AB \perp AC$). Pe catetele AB și AC se ia cîte un punct M și N și se coboară din ele cîte o perpendiculară pe ipotenuză; fie P și Q picioarele lor ($MP \perp BC$, $NQ \perp BC$). Să se aleagă punctele M și N astfel încît lungimea liniei frînte $PMNQ$ să fie minimă.

5.3.17. a) Să se demonstreze că, într-un triunghi dreptunghic, mediana care pornește din vîrful unghiului drept este congruentă cu jumătatea ipotenuzei. b) Reciproc, dacă o mediană a unui triunghi este congruentă cu jumătatea laturii pe care cade, triunghiul este dreptunghic.

5.3.18. a) Traversele de cale ferată (fig. 41) au, toate, aceeași lungime (se consideră numai partea dintre șine). b) De asemenea și toate fuscioarele unei scări. Să se pună aceste fapte în legătură cu o teoremă de geometrie. Să se dea și alte exemple.

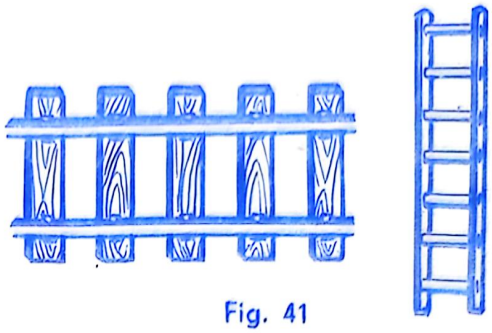


Fig. 41

5.3.19. Se dă o dreaptă d. Ce linie descrie un punct care se mișcă astfel încît distanța sa de la dreaptă să rămînă neschimbată? b) De ce sînt urmele lăsate de o greblă paralele (fig. 42)?

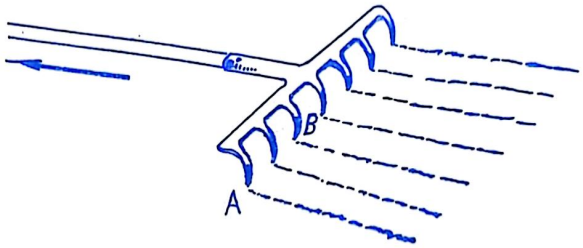


Fig. 42

5.4. Rombul

5.4.1. Cum se poate defini rombul prin lungimile laturilor sale? Să se demonstreze că rombul astfel definit este un paralelogram.

5.4.2. Într-un romb, o diagonală formează cu o latură un unghi de 15°. Să se calculeze unghiurile rombului.

5.4.3. Într-un romb, una din diagonale este congruentă cu latura. Să se afle: a) unghiurile rombului; b) unghiurile formate de diagonale cu laturile rombului.

5.4.4. Un romb are un unghi de 120°; diagonala mică este de 7 cm. Se cere perimetrul lui.

5.4.5. a) Pentru a face într-o foaie de hîrtie o gaură în formă de romb, se poate proceda astfel. Hîrtia se împăturește într-un anumit fel și se face o singură tăietură. Să se facă lucrarea.

b) Figura 45 reprezintă un motiv decorativ tăiat din hîrtie. (Romburile haşurate sînt niște găuri.) Pentru a-l face, împăturim fîșia de hîrtie într-un anumit fel și facem pe o margine o tăietură prin care scoatem un triunghi dreptunghic. Cum trebuie făcută împăturirea?

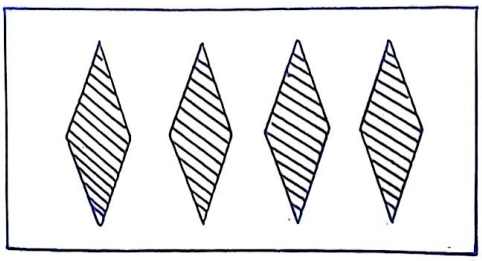


Fig. 45

5.4.6. Un romb articulat se poate deforma astfel încît să nu mai fie romb?

5.4.7. O diagonală a unui romb poate fi dublul laturii rombului? Dar mai mare?

Notațiile fiind cele din figura 29, să se construiască un romb cînd se dă:

5.4.8. $AB = 40$ mm, $\hat{A} = 50°$.

5.4.9. $AB = 45$ mm, $AC = 60$ mm.

5.4.10. $AC = 60$ mm, $BD = 42$ mm.

5.4.11. $AB = 48$ mm, $\widehat{CAB} = 25°$.

5.4.12. Să se formuleze cîteva cazuri de congruență a romburilor.

5.4.13. a) Să se demonstreze că distanța dintre două laturi opuse ale unui romb este egală cu distanța dintre celelalte două laturi opuse. b) Reciproc, dacă distanța dintre două laturi opuse ale unui paralelogram este egală cu distanța dintre celelalte două laturi opuse, paralelogramul este romb.

5.4.14. Într-un paralelogram diagonalele sînt perpendiculare. Ce fel de paralelogram particular este?

5.4.15. a) Un paralelogram $ABCD$ în care una dintre diagonale, AC, este bisectoarea unghiului A sau C este romb? b) Într-un paralelogram diagonala AC este bisectoarea unghiului A sau C. Se poate ca diagonala BD să nu fie bisectoarea unghiurilor B și D?

5.4.16. Fie ABC un triunghi oarecare. Printr-un punct M al laturii BC se duc paralelele la AB și AC; fie N și P intersecțiile lor cu aceste laturi. Să se determine punctul M astfel încît patrulaterul $ANMP$ să fie romb.

5.4.17. Fie $ABCD$ un romb. Din vîrful D se coboară cîte o perpendiculară pe dreptele AB și BC, fie E și F picioarele lor, $E \in AB$, și din vîrful B se coboară cîte o perpendiculară pe laturile DA și DC, fie G și H picioarele lor, $G \in AD$. Fie $DE \cap BG = K$ și $BH \cap DF = L$. a) Ce fel de patrulater este $DKBL$? b) Să se demonstreze că punctele A, K, L și C sînt coliniare.

5.5. Pătratul

5.5.1. Pentru a obține dintr-o foaie de hîrtie dreptunghiulară $ABCD$ o foaie în formă de pătrat, hîrtia se

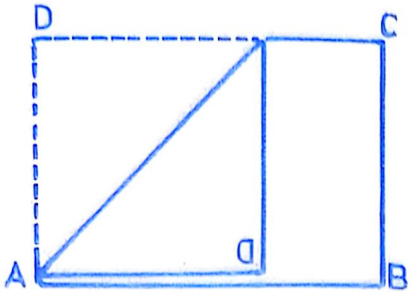


Fig. 40

pliază astfel încît latura mai mică AD să cadă peste latura mai mare AB (fig. 49) și se taie partea rămasă neacoperită. Să se demonstreze că se obține în adevăr un pătrat.

5.5.2. Pe laturile unui pătrat $ABCD$ se iau segmentele congruente AM, BN, CP și DQ ca în figura 50. a) Ce fel de patrulater este $MNPQ$? b) Să se demonstreze că cele două patrulatere au același centru. c) Aceeași problemă, dacă segmentele AM, BN... se iau pe prelungirile laturilor.

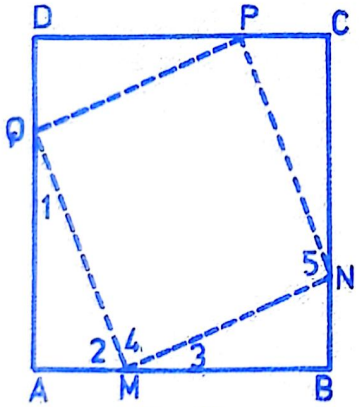


Fig. 50

5.5.3*. a) Cu cîte grade trebuie să rotim un pătrat în jurul centrului său ca fiecare dintre vîrfurile lui să ajungă într-un alt vîrf. b) Mai există un patrulater care să aibă această însușire?

5.5.4. Care este numărul maxim de axe de simetrie pe care le poate avea un patrulater? Care patrulater are acest număr de axe de simetrie?

5.5.5. În figura 52, M este un punct oarecare al segmentului AB; s-a construit un pătrat cu latura AM și un pătrat cu latura BM. Să se demonstreze că: a) punctele P, M și Q sînt coliniare; b) $AN \parallel RB$; c) cînd punctul M se mișcă pe segmentul AB, dreapta PQ nu-și schimbă direcția.

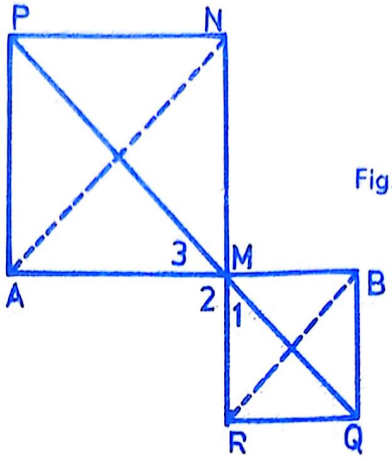


Fig. 52

5.5.6. a) Dacă pe o foaie de caiet de aritmetică ducem diagonala unui pătrățel, prelungirea ei este diagonală în toate pătrățelele prin care trece. De ce? b) Să se examineze cazul cînd pătrățelele nu sînt congruente.

5.5.7. În trei colțuri ale unui pătrat $ABCD$ se construiește cîte un pătrat, ca în figura 54. Să se demonstreze că: a) punctele A, F, M și C sînt coliniare; b) $AF \perp BL$; c) $GE \parallel PN$.

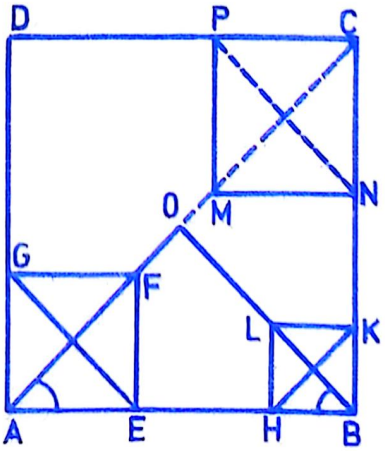


Fig. 54

5.5.8. Figura 55 reprezintă un dreptunghi format din două pătrate congruente alăturate, $ABCD$ și $BEFC$. a) Ce fel de patrulater este $MBNC$? b) Ce poziție are dreapta MN față de AE?

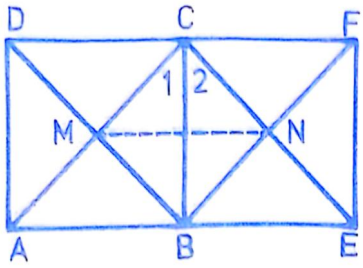


Fig. 55

5.6. Trapezul

Notațiile fiind cele din figura 56, să se construiască un trapez cînd se dă:

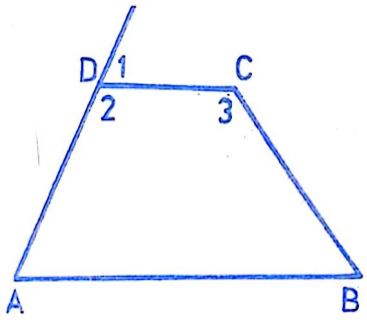


Fig. 56

5.6.1. $AB = 40$ mm, $A = 72°$, $AD = 30$ mm, $\hat{B} = 50°$.

5.6.2. $AB = 50$ mm, $\hat{A} = 65°$, $AD = 35$ mm, $BC = 40$ mm.

5.6.3. $AB = 50$ mm, $AD = 36$ mm, $BD = 60$ mm, $BC = 45$ mm.

5.6.4. $AB = 40$ mm, $BC = 25$ mm, $CD = 25$ mm, $\hat{B} = 40°$.

5.6.5. Să se enunțe cîteva cazuri de congruență a trapezelor.

5.6.6. Ce relație există între unghiurile de la baza mare și unghiurile de la baza mică ale unui trapez?

5.6.7. Într-un trapez care nu este isoscel, care dintre laturile neparalele face cu baza mare un unghi mai mare? Care face cu baza mică un unghi mai mare?

5.6.8. Să se demonstreze că într-un trapez, diferența bazelor este mai mare decît diferența laturilor neparalele.

5.6.9*. Se dau patru segmente a, b, c și d, $a > b$. Să se construiască un trapez în care bazele să fie congruente cu a și b, iar laturile neparalele să fie congruente cu c și d. Ce relație trebuie să existe între a, b, c și d ca trapezul să existe? Exemple: 1) $a = 12$, $b = 7$, $c = 3$, $d = 6$; 2) $a = 10$, $b = 4$, $c = 5$, $d = 12$.

5.6.10*[1]. Un trapez articulat se poate deforma astfel încît să se obțină un alt trapez cu aceleași baze?

5.7. Trapezul isoscel

5.7.1. Un trapez isoscel are un unghi de 50°. Să se afle celelalte unghiuri.

5.7.2. Fie $ABCD$ un trapez isoscel, $AB \parallel CD$, A opus lui C, $AB > CD$. Printr-un punct E al bazei CD se duce paralela la BC; fie F intersecția ei cu AB. Ce fel de patrulater este $AFED$?

5.7.3. Să se demonstreze că un trapez în care unghiurile de la bază sînt congruente este isoscel.

---

[1] Se va rezolva în prealabil problema 5.6.9

5.7.4. Cum se poate construi un trapez isoscel folosind numai o riglă negradată şi un raportor?

5.7.5. a) Laturile neparalele ale unui trapez isoscel se prelungesc pînă la intersecţia lor. Ce fel de triunghi se obţine? b) Într-un triunghi isoscel se duce o paralelă la bază. Ce fel de trapez se obţine?

5.7.6. Unghiurile de la baza unui trapez isoscel au cîte 60°. Cît de mari pot fi laturile neparalele în comparaţie cu baza mare?

5.7.7. a) Fie O vîrful unui unghi. Pe laturile lui se iau două segmente congruente OA, OB şi pe prelungirile lor dincolo de O se iau alte două segmente congruente, OC şi OD care să nu fie congruente cu primele. Ce fel de patrulater este $ABCD$? b) Aceeaşi întrebare dacă $OA \equiv OC$.

5.7.8. a) Un trapez în care ambele diagonale sînt bisectoarele unghiurilor de la bază este isoscel? b) Reciproca răspunsului la această întrebare este adevărată?

5.7.9. Decupăm din hîrtie două triunghiuri congruente ABC şi ABD şi le aşezăm astfel încît laturile AB să coincidă, triunghiurile să fie aşezate de aceeaşi parte a laturii AB şi să nu coincidă. Ce fel de patrulater este $ABDC$?

5.8. Probleme diverse

5.8.1. a) Un romb $ABCD$ se roteşte în jurul centrului său cu 90°. Vîrfurile A, B, C şi D trec respectiv în A', B', C' şi D'. a) Ce fel de patrulatere sînt $AA'CC'$ şi $BB'DD'$? b) Ce poziţie au laturile primului dintre aceste patrulatere faţă de laturile celui de al doilea? c) Să se demonstreze că $AB \perp A'B'$.

5.8.2. Un triunghi ABC se roteşte în jurul vîrfului A cu 180°. Fie B' şi C' respectiv noile poziţii ale vîrfurilor B şi C. Ce fel de patrulater este $BCB'C'$ dacă: a) ABC este un triunghi oarecare; b) $AB \equiv AC$; c) $\hat{A} = 90°$; d) $AB \equiv AC$ şi $\hat{A} = 90°$.

5.8.3. Tăiem din hîrtie două triunghiuri congruente şi le aşezăm unul lîngă altul ca în figura 66. Ce fel de patrulater obţinem dacă: a) ABC este un triunghi oarecare; b) $\hat{B} = 90°$; c) $AB \equiv BC$; d) $AB \equiv BC$ şi $\hat{B} = 90°$.

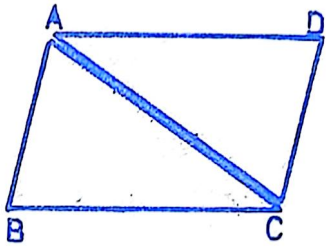


Fig. 66

5.8.4. Pliem o foaie de hîrtie (fig. 67), facem cu foarfeca două tăieturi drepte AB şi CB şi scoatem triunghiul ABC. Cînd desfacem hîrtia apare o gaură. Ce formă are această gaură dacă: a) $\hat{A} = 90°$; b) $\hat{C} = 90°$; c) $AB \equiv BC$; d) $AB \equiv BC$ şi $\hat{B} = 90°$? e) În ce caz se obţine un dreptunghi (care să nu fie

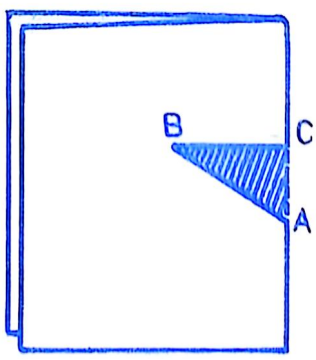


Fig. 67

pătrat)? f) un paralelogram oarecare (care să nu fie nici romb, nici pătrat şi nici dreptunghi)? Răspunsul se va da înainte de a face lucrarea.

5.8.5. Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB \parallel CD$, A opus lui C, şi O centrul lui. a) Pe diagonala AC se poartă segmentele OE şi OF congruente cu OB. Ce fel de patrulater este $EBFD$? b) Pe diagonala BD se poartă segmentele OG şi OH congruente cu OA. Ce fel de patrulater este $AGCH$? c) Ce poziţie au laturile patrulaterului $AGCH$ faţă de laturile patrulaterului $EBFD$? d) Ce fel de paralelogram trebuie să fie $ABCD$ ca $EBFD$ să fie pătrat?

5.8.6 *. Figura formată dintr-un patrulater şi diagonalele sale conţine şase segmente. Cîte din ele pot fi congruente între ele? Care este numărul maxim de segmente congruente?

Capitolul 6

CERCUL

6.0. Recapitulare

1. Tangenta la cerc este perpendiculară pe raza care trece prin punctul ei de contact.

2. Diametrul perpendicular pe o coardă trece prin mijlocul coardei și prin mijlocul arcului subîntins de coardă.

3. Într-un cerc, arcele cuprinse între două coarde paralele sînt congruente; două coarde care cuprind arce congruente sînt paralele.

4. Măsura unui unghi înscris într-un cerc este jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale.

5. Măsura unghiului format de o tangentă cu o coardă care trece prin punctul de contact este jumătate din măsura arcului subîntins de coardă.

6. Un patrulater este inscriptibil dacă și numai dacă are două unghiuri opuse suplementare.

6.1. Definiția cercului. Construcții

6.1.1. Linia din figura 1 ar trebui să reprezinte un cerc, dar în apropierea punctelor A și B este greșită. În ce constă greșeala?

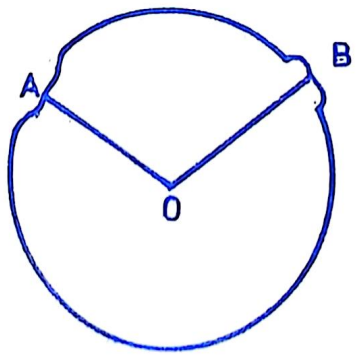


Fig. 1

6.1.2. Cînd vrem să desenăm un cerc cu ajutorul compasului și în timp ce-l desenăm deschiderea compasului se schimbă, nu mai obținem un cerc. De ce?

6.1.3. Fie O și A capetele unei vergele (unui creion). Cînd ținem punctul O fix putem mișca vergeaua astfel încît punctul A să descrie o linie foarte întortocheată, care nu este un cerc, deși distanța OA rămîne aceeași. De ce nu se obține un cerc?

6.1.4. Ce linie descrie: a) un punct oarecare de pe limba unui ceas? b) un punct oarecare de pe coperta unei cărți cînd deschidem cartea? Să se dea și alte exemple.

6.1.5. Fie O centrul unui cerc și M un punct al cercului. a) Pe prelungirea razei OM se poartă un segment MN. Ce linie descrie punctul N cînd punctul M descrie cercul și segmentul MN își păstrează lungimea? b) Aceeași întrebare dacă segmentul MN se poartă pe raza OM de la M spre O ($MN<OM$).

6.1.6. Să se deseneze cu ajutorul unei monede mai multe cercuri care trec prin același punct O. Pe ce linie se găsesc centrele lor?

6.1.7. Într-un cerc se duc două raze OA și OB care formează un unghi de 60°. Fie C și D mijloacele lor. $OA = 10$ cm. Se cere lungimea segmentului CD.

6.1.8. Fie O centrul unui cerc și P un punct al său. Se construiește un cerc cu aceeași rază și cu centrul în P. a) Ce poziție are punctul O față de acest cerc? b) Fie A și B punctele în

care se taie cele două cercuri. Ce fel de patrulater este $OAPB$? c) Să se afle unghiurile lui.

6.1.9. Fie $ABCD$ un dreptunghi și O intersecția diagonalelor sale. Se construiește cercul cu centrul în O și cu raza OA. Ce poziție au punctele B, C și D față de acest cerc?

6.1.10. Două cercuri congruente se taie; fie A, B punctele lor de intersecție și O, P centrele lor. Ce fel de patrulater este $OABP$?

6.1.11. Se dau două cercuri concentrice. Prin centrul lor comun se duc două semidrepte și se notează cu A, B, C, D punctele lor de intersecție cu cercurile. Ce fel de patrulater este $ABCD$?

6.1.12. Se dau două cercuri congruente care nu se taie; fie O și O' centrele lor. Se duc două raze paralele OA și $O'A'$. Să se demonstreze că dreapta AA' este paralelă cu OO' sau trece prin mijlocul segmentului OO'.

6.1.13. Fie O centrul unui cerc, A un punct oarecare diferit de O și M un punct al cercului. Prin M se duce un segment de dreaptă MP congruent și paralel cu OA și îndreptat în același sens. Ce linie descrie punctul P când punctul M descrie cercul?

6.1.14. Figura 4 reprezintă o fîntînă. Segmentul AB reprezintă prăjina de care este fixată ciutura. Când coborîm ciutura, prăjina ajunge în poziția $A'B'$. Ce fel de linie descrie punctul B?

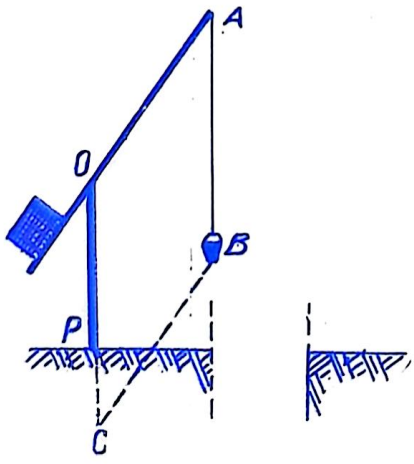


Fig. 4

6.1.15. Într-un cerc se duc doi diametri perpendiculari. Dintr-un punct oarecare M al cercului se duc perpendicularele pe acești diametri și se notează picioarele lor cu A și B. Fie P mijlocul segmentului AB. Ce linie descrie punctul P când punctul M descrie cercul?

6.1.16. Pe o foaie de hîrtie este desenat un arc de cerc. Cum se poate trasa cercul din care face parte arcul?

6.1.17. Avem o linie curbă care seamănă cu un arc de cerc. Cum se poate ști dacă e un arc de cerc sau nu?

6.1.18. Se dau două puncte A, B și o dreaptă d. Să se construiască un cerc cu centrul pe d care să treacă prin A și B. Să se examineze cazul când $d \perp AB$.

6.1.19. a) Se dau două puncte A, B și un segment r. Să se construiască un cerc de rază r care să treacă prin A și B. b) Care este lungimea minimă pe care o poate avea segmentul r ca problema să aibă o soluție.

6.2. Tangenta la cerc

6.2.1. Se consideră două cercuri concentrice. Prin centrul lor se duce o dreaptă oarecare și în punctele în care ea taie cercurile se duc tangentele la cele două cercuri. Ce poziție au aceste tangente una față de cealaltă?

6.2.2. Într-un punct A al unui cerc se duce tangenta la cerc și se poartă

pe ea două segmente congruente, AM și AN. Să se compare OM cu ON, O fiind centrul cercului.

6.2.3. Fie OA și OB două raze ale unui cerc care formează un unghi de 130°. În A și B se duc tangentele la cerc și se notează intersecția lor cu C. Să se afle unghiul C. Să se completeze: Unghiul format de două raze ale unui cerc și unghiul format de tangentele duse la capetele lor sînt...

6.2.4. Să se ducă într-un cerc o coardă AB care, împreună cu tangentele duse la capetele ei, să formeze un triunghi echilateral.

6.2.5. Se dă un cerc; fie O centrul și R lungimea razei sale. a) Cîte cercuri există care să fie tangente exterior la el și ale căror raze să aibă o lungime dată r, $r < R$. b) Ce linie formează centrele lor? c) Să se construiască un cerc tangent cercului dat într-un punct A și a cărui rază să aibă lungimea r. d) Aceeași problemă dacă cercurile sînt tangente interior.

6.2.6. a) Se dau o dreaptă d și un segment r. Cîte cercuri există care să aibă raza congruentă cu r și să fie tangente la dreapta d? b) Pe ce linie se găsesc centrele lor? c) Reprezentăm (fig. 10) o șină de cale ferată printr-o dreaptă d și o roată a trenului printr-un cerc. Ce poziție are dreapta față de cerc? d) Fie O centrul cercului. Pe ce linie se mișcă punctul O cînd roata se rostogolește?

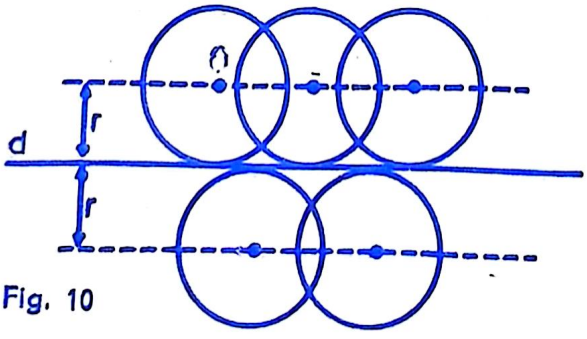


Fig. 10

6.2.7. Se dau două drepte neparalele d, e și un segment r. Să se construiască un cerc cu centrul pe dreapta e, tangent dreptei d și cu raza congruentă cu r.

6.2.8. Se dă o dreaptă d și un punct al ei A. a) Cîte cercuri există care să treacă prin A și să fie tangente la d? b) Ce linie formează centrele acestor cercuri? c) Să se construiască un cerc tangent la dreapta d în punctul A care să aibă o rază dată r.

6.2.9. a) Se dau două drepte paralele d și e. a) Cîte cercuri există care să fie tangente la ambele drepte? b) Ce linie formează centrele lor? c) Să se construiască un cerc tangent la dreptele date care să treacă printr-un punct dat A situat între d și e.

6.2.10. Fie xOy un unghi. a) Cîte cercuri există care să fie tangente la ambele laturi ale unghiului? b) Ce linie formează centrele lor? c) Să se construiască un cerc tangent la laturile unghiului care să aibă o rază de lungime dată r.

6.2.11. În figura 13 se vede o casă cu cerdac. Să se deseneze liniile curbe care mărginesc partea de sus, folosind indicațiile din figură.

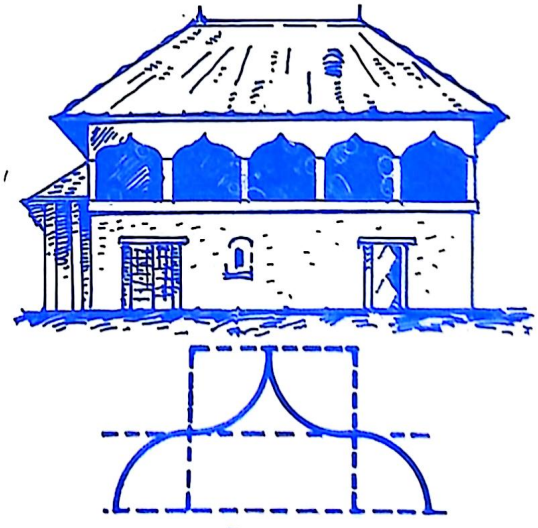


Fig. 13

6.2.12. O şosea îşi schimbă direcţia cu 30°, ca în figura 14. Arcul de cerc AB care uneşte porţiunile rectilinii are o rază de 10 m. Să se facă o schiţă a şoselei. Scara 1 : 200.

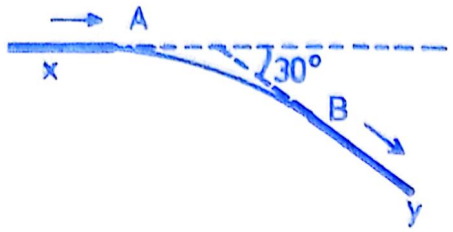


Fig. 14

6.2.13. La intrarea într-o staţie, linia de cale ferată[1] se bifurcă, aşa cum arată figura 15. Arcele de cerc AB şi BC au cîte 45° şi raza de 15 m. Să se facă schiţa liniei ferate. Scara 1 : 200.

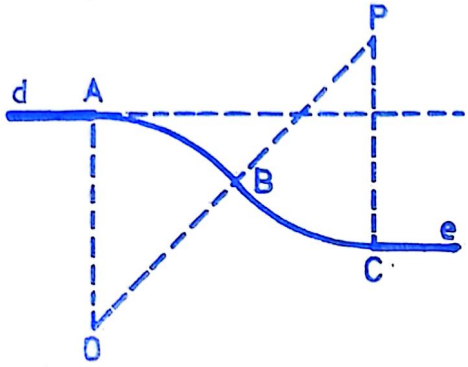


Fig. 15

6.2.14. Se consideră un unghi la centru AOB de 135°. Se duce tangenta în B la cerc şi se notează cu C intersecţia ei cu dreapta AO. Să se demonstreze că segmentul BC este congruent cu raza cercului.

6.2.15. Într-un cerc se duce un diametru AB şi o coardă AC care formează cu el un unghi de 30° În punctul C se duce tangenta la cerc şi se notează cu D intersecţia ei cu dreapta AB. Să se compare segmentele AC şi CD.

[1] Se consideră o singură şină.

6.2.16. Într-un cerc se duc două raze OA şi OB. În A se duce tangenta la cerc şi din B se duce perpendiculara pe tangentă; fie C piciorul ei. Să se demonstreze că BA este bisectoarea unghiului OBC.

6.2.17. Se consideră un cerc oarecare. Fie O centrul lui şi A un punct situat în exteriorul lui. Să se ducă prin A o dreaptă care să aibă cel puţin un punct comun cu cercul şi să fie cît mai departe de centrul cercului.

6.3. Simetria cercului

6.3.1. Să se demonstreze că, dacă două cercuri sînt secante, linia centrelor este mediatoarea coardei comune.

6.3.2. Într-un cerc se duce o coardă AB şi diametrul CD perpendicular pe ea. Ce fel de triunghi este CAB? dar DAB?

6.3.3. a) Figura 22 reprezintă două cercuri secante, O şi P sînt centrele lor, prin punctul A s-a dus o dreaptă care taie ambele cercuri, $OD \perp BA$ şi $PE \perp AC$. Se dă că $BC = 134$ mm. Se cere lungimea segmentului DE.
b) În aceeaşi figură, ce relaţie există între lungimile segmentelor OP şi BC dacă $BC \parallel OP$?

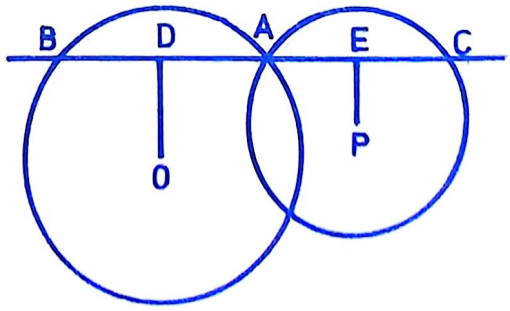


Fig. 22

6.3.4. Pe un cerc se iau două puncte oarecare A și B. Fie M și N mijloacele arcelor determinate de ele. Să se demonstreze că dreapta MN trece prin centrul cercului.

6.3.5. Fie A un punct interior unui cerc. Să se ducă prin A o coardă astfel ca A să fie mijlocul ei.

6.3.6. Fie AB o coardă a unui cerc și C mijlocul ei. Să se ducă prin punctul C o coardă deosebită de AB al cărei mijloc să fie tot punctul C.

6.3.7. a) Două cercuri concentrice sînt tăiate de o dreaptă. Să se compare cele două părți ale dreptei situate în interiorul coroanei circulare (în partea cuprinsă între cele două cercuri). Ce lungime are fiecare dintre ele cînd dreapta trece prin centrul cercurilor? Se dau razele. b) Într-un punct M al cercului mic se duce tangenta la el și se notează cu E și F intersecțiile ei cu cercul mare. Să se compare ME cu MF.

6.3.8. a) Fie AB o coardă a unui cerc și C mijlocul arcului AB. Ce poziție are tangenta dusă la cerc în punctul C față de dreapta AB? b) Fie AB o coardă a unui cerc și C punctul de contact al unei tangente paralele cu AB. Să se compare arcul CA cu CB.

6.3.9. Se dă un cerc. Să se construiască un triunghi isoscel înscris în cerc cînd se dă: a) baza triunghiului; b) una dintre laturile congruente ale triunghiului.

6.3.10. Într-un cerc se duc două coarde paralele AB și CD. Ce fel de patrulater este $ABCD$?

6.3.11. În figura 26, $AB \parallel CD$ și $BE \parallel DF$. Să se compare arcele AC și EF.

6.3.12. Într-un cerc se duc două coarde congruente și neparalele. Să se demonstreze că, dintre cele șase coarde care unesc capetele lor, două, deosebite de cele date, sînt congruente și două sînt paralele. Se vor considera două cazuri: cînd coardele nu se taie și cînd se taie.

6.3.13. În figura 28, $AB \parallel CD$ și O este centrul cercului. a) $\widehat{AOB} = 130°$, $\widehat{BOD} = 80°$. Se cer unghiurile AOC și COD. b) $\widehat{AOB} = 120°$; $\widehat{COD} = 50°$. Se cer unghiurile AOC și BOD.

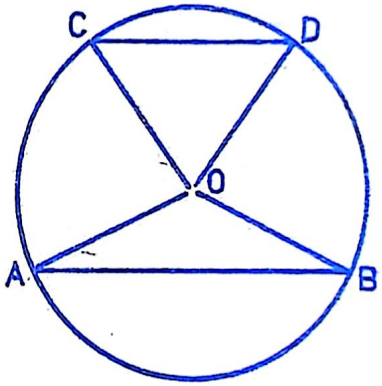


Fig. 28

6.3.14. a) Fie AOB un unghi la centru (O centrul cercului, A și B pe cerc) care are mai puțin decît 60°. Prin A se duce paralela la OB și se notează cu M punctul în care ea taie a doua oară cercul; prin B se duce paralela la OA și se notează cu N punctul în care ea taie a doua oară cercul. Să se calculeze unghiul MON cunoscînd unghiul AOB (de exemplu $\widehat{AOB} = 50°$). b) Ce se poate spune despre punctele M, O și N dacă $\widehat{AOB} = 60°$? c*) Să se examineze și cazul în care $\widehat{AOB} > 60°$.

6.3.15. a) Într-un cerc se înscrie un patrulater $ABCD$ şi se duc coardele $A'B'$, $B'C'$ şi $C'D'$ respectiv paralel cu AB, BC şi CD. Să se demonstreze că $D'A' \parallel AD$. b) Problema analoagă în cazul unui hexagon înscris într-un cerc, adică: Se duc coarde paralele la cinci laturi consecutive; să se demonstreze că dreapta care uneşte capetele liniei frînte formate de aceste coarde este paralelă cu ultima latură a hexagonului. c) Generalizare. d) Problema analogă în cazul unui triunghi şi al unui pentagon înscris în cerc. Generalizare.

6.3.16. a) Într-un cerc se duc toate coardele congruente cu un segment dat. Ce linie formează mijloacele lor? b) Avem un cerc din sîrmă (fig. 31) de care este fixat un fir de sîrmă prin două inele A şi B astfel încît să poată aluneca pe cerc. Ce linie descrie mijlocul M al firului de sîrmă cînd mişcăm firul AB?

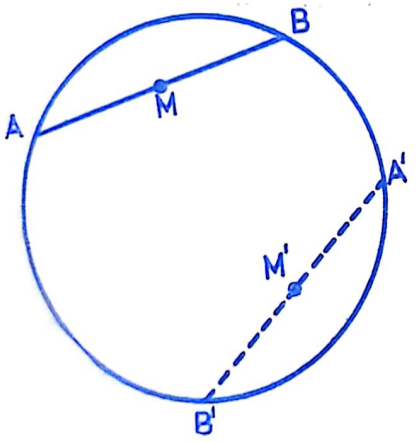


Fig. 31

6.3.17. Se consideră două cercuri concentrice. Să se ducă o tangentă la cercul mai mic astfel încît partea ei situată în interiorul celui mai mare să fie cît mai mică.

6.3.18. Într-un cerc se duc două coarde congruente AB şi AC, apoi alte două coarde congruente, AD şi AE. Să se demonstreze că $BC \parallel DE$.

6.3.19. Într-un cerc se duc un diametru AB, două coarde congruente AC şi AD, apoi alte două coarde congruente, BE şi BF. Fie $AC \cap BE = G$ şi $AD \cap BF = H$. Să se demonstreze că $GH \perp AB$.

6.4. Unghi înscris în cerc

6.4.1. Pe un cerc se iau punctele A, B, C şi D care se succed în sensul opus mişcării acelor unui ceas. $\overset{\frown}{AB} = 110°$, $\overset{\frown}{BC} = 50°$, $\overset{\frown}{CD} = 140°$. Să se afle: a) unghiurile patrulaterului $ABCD$; b) unghiurile formate de diagonale cu laturi.

6.4.2. Fie A, B, C şi D patru puncte ale unui cerc care formează un patrulater convex. Să se compare unghiurile formate de diagonale cu laturile.

6.4.3. a) Pe un cerc se iau 5 puncte A, B, C, D, E care se succed în sensul mişcării acelor unui ceas şi se duc toate diagonalele pentagonului $ABCDE$. În felul acesta, fiecare unghi al pentagonului se împarte în trei părţi, formîndu-se 15 unghiuri. Să se arate că ele se pot grupa în 5 grupe de cîte 3 unghiuri congruente. b) Problema analoagă în cazul unui hexagon. c*) De asemenea într-un poligon cu 100 de laturi.

6.4.4. Într-un cerc se duce o coardă oarecare AB. a) Să se aleagă pe arcul AB mai mare decît un semicerc un punct M astfel încît unghiul AMB să fie maxim. b) Să se aleagă pe arcul AB mai mic decît un semicerc un punct N astfel încît unghiul ANB să fie minim. c) Cînd punctul N rămîne

fix și punctul M se mișcă rămînînd de aceeași parte a dreptei AB, unghiurile MAN și MBN variază sau rămîn constante? Dar suma lor?

6.4.5. La fotbal, cînd tragi dintr-un punct M la poarta AB, este cu atît mai ușor să nimerești poarta cu cît unghiul BMA este mai mare. a) În figura 36, punctul M este aproape de poartă, iar punctul N este mai departe. Totuși din aceste două puncte este deopotrivă de ușor să nimerești poarta. De ce? b) Dacă P este un alt punct al arcului de cerc AMB, din care punct este mai ușor să nimerești poarta, din P sau din N?

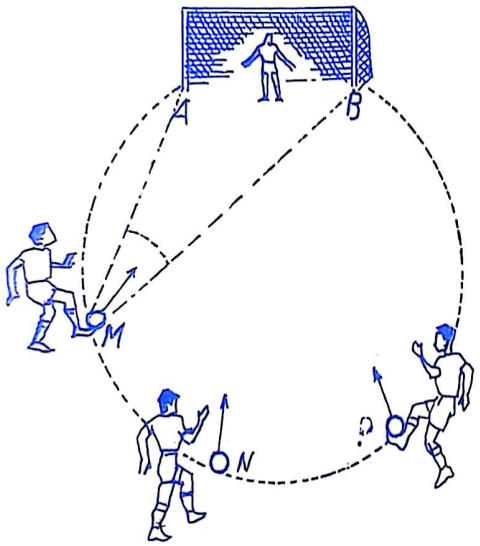


Fig. 36

6.4.6. Fie O centrul unui cerc și două unghiuri la centru adiacente, $\widehat{AOB} = 130°$, $\widehat{BOC} = 150°$. Să se afle unghiurile triunghiului ABC.

6.4.7. a) Fie O centrul cercului circumscris unui triunghi ABC. Se dă: $\hat{A} = 58°$, $\hat{B} = 63°$. Să se afle unghiurile AOB, BOC și COA. b) Aceeași problemă în general, dacă unghiurile triunghiului sînt $\hat{A}$, $\hat{B}$ și $\hat{C}$.

6.4.8. Fie AB un diametru al unui cerc și C un punct oarecare al cercului. Se mai ia un punct M al cercului. Unde trebuie să fie situat punctul M pentru ca unghiul ACM să fie: a) ascuțit; b) obtuz?

6.4.9. Fie AMB un unghi înscris și N un punct al arcului AB cuprins între laturile sale. Se dă $\widehat{AMB} = 76°$ și se cere unghiul ANB. b) Ce relație există în general între unghiurile M și N?

6.4.10. Fie O centrul unui cerc și A, M două puncte ale cercului. Punctul A este fix, iar punctul M se mișcă pe cerc astfel încît semidreapta OM să se rotească cu 30° pe minut. Cu cîte grade pe minut se rotește semidreapta AM?

6.4.11. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc și D un punct al arcului BC, punctele A și D fiind situate de o parte și de alta a dreptei BC. Ce relație există între unghiul BDC și unghiurile B și C ale triunghiului ABC?

6.4.12. Într-un cerc k se duc două coarde congruente AB și AC. a) Să se demonstreze că bisectoarea unghiului A trece prin centrul cercului. b) Cîte grade are unghiul format de diametru cu coarda BC?

6.4.13. Într-un cerc k se duce o coardă AB și se iau două puncte C și D ale cercului situate de o parte și de alta a dreptei AB. Fie CM bisectoarea unghiului ACB, $M \in k$, DN bisectoarea unghiului ADB, $N \in k$, și O centrul cercului k. Să se demonstreze că punctele M, O și N sînt coliniare.

6.4.14. Într-un cerc se duc doi diametri perpendiculari, AB și CD. Fie M un punct oarecare al cercului. Cîte grade are unghiul AMD? Punctul M se va lua pe fiecare dintre sferturile de cerc în care diametrii împart cercul. b) Aceeași problemă dacă unghiul ascuțit AOC format de diametrii AB și CD are $n°$.

6.4.15. Într-un cerc se duce o coardă oarecare AB, se iau trei puncte ale cercului M, N și P situate de aceeași parte a dreptei AB. Să se demonstreze că bisectoarele unghiurilor AMB, ANB și APB sînt concurente.

6.4.16. Se consideră un cerc k și un triunghi ABC înscris în el. Fie AD, BE și CF bisectoarele triunghiului (D, E, $F \in k$). Să se calculeze unghiurile triunghiului DEF cunoscînd unghiurile A, B și C. (Se poate trata întîi un caz particular, de exemplu $\hat{A} = 50°$, $\hat{B} = 60°$, $\hat{C} = 70°$).

6.4.17. Fie AMB un unghi înscris într-un cerc, MC bisectoarea lui (C pe cerc) și P un punct oarecare al cercului. Ce relație există între unghiurile APC și CPB?

6.4.18. Fie AOB un unghi la centru ascuțit, C punctul diametral opus cu A și CD o coardă paralelă cu OB. Să se demonstreze că OB este bisectoarea unghiului AOD.

6.4.19. Fie MAB un triunghi oarecare înscris într-un cerc k, AC bisectoarea unghiului A și BD bisectoarea unghiului B (C, $D \in k$). Să se demonstreze că, dacă punctul M se mișcă pe arcul AB rămînînd de aceeași parte a dreptei AB, coarda DC nu-și schimbă lungimea.

6.4.20. Fie AMB un unghi înscris într-un cerc. Latura AM se prelungește dincolo de vîrful M pînă într-un punct oarecare C. a) Ce relație există între unghiul BMC și arcul AMB? b) Cum variază unghiul BMC cînd punctul M se mișcă pe cerc rămînînd de aceeași parte a coardei AB?

6.4.21. Figura 45 reprezintă un octogon înscris într-un cerc. Fie A, B, C, ... unghiurile sale și a, b, c,... unghiurile sale exterioare. a) Să se afle sumele $s_1 = a + c + e + g$ și $s_2 = b + d + f + h$, adică sumele unghiurilor exterioare luate din două în două. b) Să se deducă de aici că sumele $S_1 = A + C + E + G$ și $S_2 = B + D + F + H$ sînt egale. c) Aceleași chestiuni în cazul unui poligon cu n laturi înscris într-un cerc, n fiind un număr par. d) Să se examineze cazul cînd n este impar.

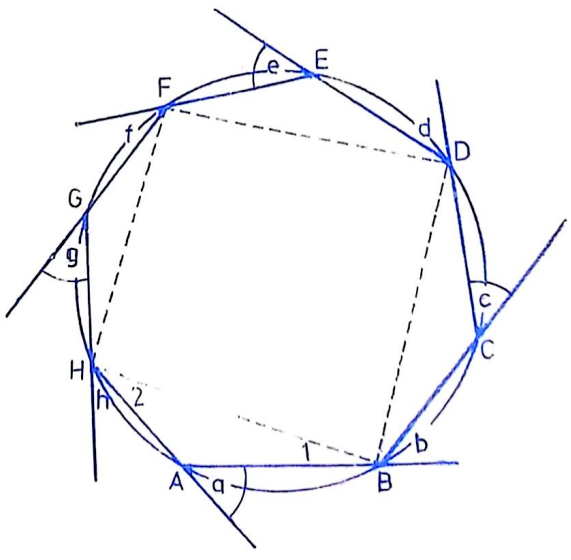


Fig. 45

6.4.22. În figura 46, A, B, C şi D sînt puncte oarecare ale unui cerc şi M, N, P şi Q sînt mijloacele arcelor respective. Să se demonstreze că: a) $MP \perp NQ$; b) unghiurile MDN şi PBQ sînt complementare. c) Să se găsească alte perechi de unghiuri complementare. (Figura este la soluţie.)

6.4.23. În figura 47, A, B şi C sînt trei puncte oarecare ale cercului, $AA' \parallel BC$, $CC' \parallel AB$ şi $AB \cap A'C = D$. Să se demonstreze că: a) triunghiul $A'C'B$ este isoscel; b) semidreapta AB este bisectoarea unghiului $A'AC'$: c) triunghiul CDB este isoscel.

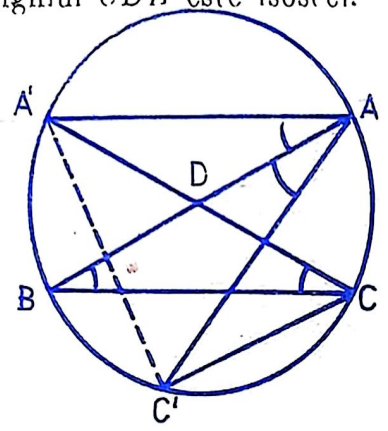


Fig. 47

6.4.24. Fie ABC un triunghi, k cercul circumscris triunghiului şi AD, BE două înălţimi, $DE \in k$. Să se demonstreze că: a) BC este bisectoarea unghiului EBD; b) $\widehat{AB} + \widehat{CD} = 180°$. Se vor deosebi două cazuri: cînd triunghiul ABC este ascuţitunghic şi cînd are un unghi obtuz.

6.4.25. a) Într-un cerc se duc două coarde perpendiculare AB şi CD. Să se demonstreze că $\widehat{BC} + \widehat{AD} = 180°$. b) Reciproc, dacă AB şi CD sînt două coarde ale unui cerc care se taie şi $\widehat{BC} + \widehat{AD} = 180°$, coardele sînt perpendiculare.

6.4.26. Se consideră un unghi înscris APB. Ce linie descrie mijlocul coardei AB cînd unghiul se roteşte în jurul vîrfului său P?

6.5. Unghi înscris într-un semicerc

6.5.1. Într-un cerc se duc două coarde perpendiculare AB şi AC. Ce poziţie au una faţă de alta tangentele duse în C şi B la cerc?

6.5.2. Într-un cerc se duc doi diametri AB şi CD. Ce fel de patrulater este $ACBD$?

6.5.3. Într-un cerc se duc trei coarde AM, AN, AP şi în punctele M, N şi P se ridică perpendicularele pe ele. Să se demonstreze că aceste perpendiculare sînt concurente.

6.5.4. Să se construiască un triunghi ABC cunoscînd latura BC şi înălţimile BD şi CE.

6.5.5. Se dă un cerc. Să se construiască un triunghi dreptunghic înscris în el cînd se dă: a) o catetă; b) un unghi al triunghiului; c*) înălţimea triunghiului.

6.5.6. Avem un triunghi ABC şi cunoaştem mijlocul D al laturii BC. Cum putem determina picioarele înălţimilor care pleacă din vîrfurile A şi B folosind numai compasul?

6.5.7. Într-un triunghi oarecare ABC se duce mediana AD, $D \in BC$ şi se prelungeşte cu un segment DE congruent cu DC. Cîte grade are unghiul BEC?

6.5.8. În figura 52, cele două cercuri au același centru O și dreapta AB este tangentă la cercul mai mic. Punctul C este diametral opus cu A. Ce poziție are dreapta OM față de BC?

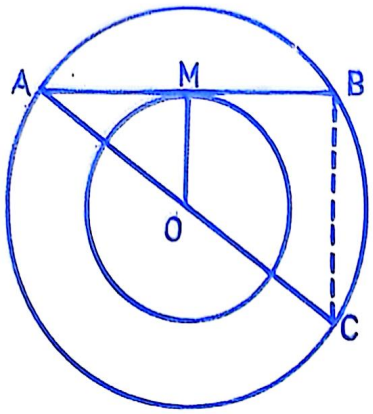


Fig. 52

6.5.9. Din toate dreptunghiurile înscrise în același cerc, care are diagonalele cele mai mici?

6.5.10. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc, D punctul în care perpendiculara din A pe BC taie cercul și E punctul diametral opus cu vîrful A. Să se demonstreze că unghiurile BAE și DAC sînt congruente.

6.5.11. Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc, BD și CE două înălțimi ale triunghiului, F intersecția lor și G punctul diametral opus cu vîrful A. Ce fel de patrulater este $BGCF$?

6.5.12. Să se demonstreze, folosind teorema cu privire la unghiul înscris într-un semicerc, că: a) Într-un triunghi dreptunghic, mediana care cade pe ipotenuză este congruentă cu jumătatea ipotenuzei. b) Dacă o mediană a unui triunghi este congruentă cu jumătatea laturii pe care cade, triunghiul este dreptunghic.

6.5.13. Figura 56 reprezintă două cercuri tangente, O și P sînt centrele lor și TA este o dreaptă oarecare care trece prin T. Ce poziție au una față de cealaltă: a) dreptele AC și BD? b) dreptele OA și PB? c) Aceeași problemă dacă cercurile sînt tangente exterior.

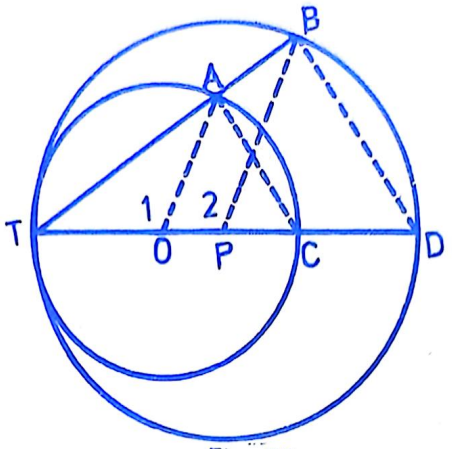


Fig. 56

6.5.14. Se consideră două cercuri dintre care fiecare trece prin centrul celuilalt (fig. 57). a) Ce poziție are dreapta AM față de cercul din dreapta? dreapta $A'M$ față de cercul din stînga? b) Să se compare segmentul MA cu MA'. c) Să se afle unghiul A.

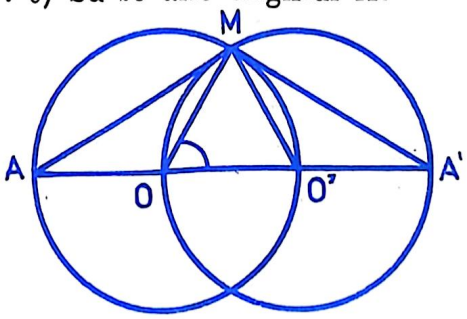


Fig. 57

6.5.15. Se consideră două cercuri secante, fie A și B punctele lor de intersecție. Prin punctul A se duce perpendiculara pe AB și se notează cu C și D punctele în care ea taie din nou cercurile. În C și D se duc tangentele la cele două cercuri și se notează cu E intersecția lor. Să se demonstreze că unghiurile E și CBD sînt suplementare.

6.6. Unghi format de o tangentă și o secantă

6.6.1. În figura 59, triunghiul ABC este isoscel. S-a dus tangenta la cerc în vîrful A. a) Să se compare unghiul 1 cu 2. b) Ce poziție are tangenta față de dreapta BC? c) În vîrful C s-a dus tangenta CE la cerc. Să se demonstreze că CA este bisectoarea unghiului BCE.

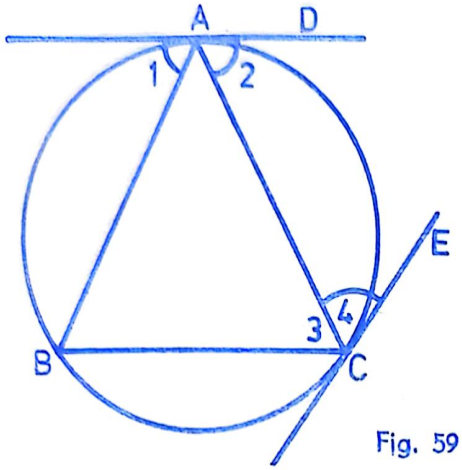


Fig. 59

6.6.2. a) În figura 60, A, B, C, D și E sînt puncte oarecare ale cercului. În aceste puncte s-au dus tangentele la cerc. Să se afle suma unghiurilor marcate în figură cu cîte un arc. b) Problema analoagă dacă, în loc de cinci, se iau șase puncte ale cercului. c) De asemenea, în cazul unui poligon cu 100 de laturi.

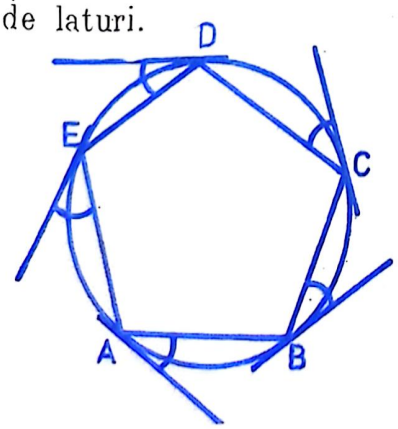


Fig. 60

6.6.3. a) În figura 61, A, B, C, D, E și F sînt puncte oarecare ale cercului. În punctele A, C și E s-au dus tangentele la cerc. Să se afle suma unghiurilor notate prin cifre. b) Problema analoagă dacă se iau 100 de puncte și se duc tangentele la cerc în aceste puncte luate din două în două.

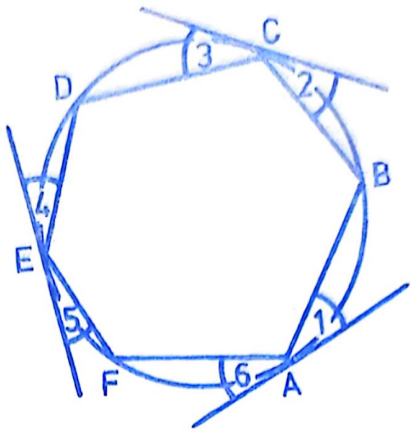


Fig. 61

6.6.4. Pe un cerc se iau două puncte A și B care nu sînt diametral opuse. În A și B se duc tangentele la cerc și se notează cu T intersecția lor. Să se determine un punct M al arcului AB astfel încît suma unghiurilor TAM și TBM să fie maximă.

6.6.5. Cercurile din figura 63 sînt tangente. O și P sînt centrele lor. Prin punctul lor de contact T s-a dus o dreaptă oarecare și s-au notat cu A și B punctele ei de intersecție cu cercurile. Să se demonstreze că $OA \parallel PB$.

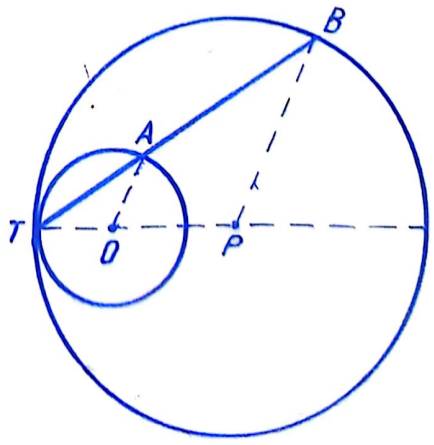


Fig. 63

6.6.6. În figura 64, AB este un diametru, M este un punct oarecare al cercului și MC este tangenta la cerc. Să se compare unghiul AMO cu unghiul BMC.

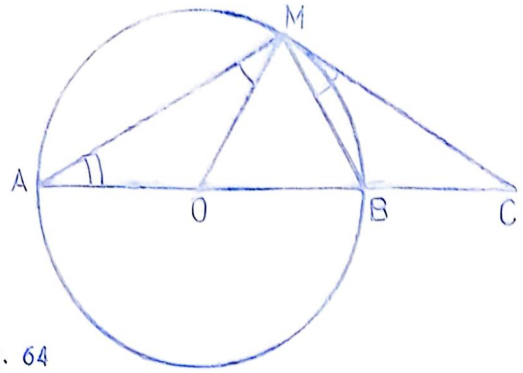


Fig. 64

6.7. Tangentele duse dintr-un punct la un cerc

6.7.1. La un cerc se duc două tangente neparalele; fie A și B punctele de contact, C intersecția lor și AD coarda paralelă cu CB. Să se compare unghiul DAB cu unghiul CAB.

6.7.2. Fie O centrul și A, B două puncte diametral opuse ale unui cerc. În A și B se duc tangentele la cerc, apoi se duce tangenta într-un punct oarecare M al cercului și se notează cu C și D intersecțiile ei cu primele două tangente, C pe tangenta în A. a) Se dă: $AC = 15$ mm, $BD = 25$ mm; se cere CD. b) Cum trebuie ales punctul M ca suma $AC + BD$ să fie minimă? c) Să se demonstreze că, oricare ar fi poziția punctului M pe cerc, unghiul COD este drept.

6.7.3. a) Dintr-un punct A se duc tangentele AB și AC la un cerc (B și C punctele de contact). Într-un punct M al arcului BC (mai mic decît un semicerc) se duce tangenta la cerc și se notează cu D și E punctele ei de intersecție cu dreptele AB și AC, $D \in AB$. Să se aleagă punctul M astfel încît perimetrul triunghiului ADE să fie minim. b) Se dă $AB = 10$ cm și se cere perimetrul triunghiului.

6.7.4. Fie ABC un triunghi circumscris unui cerc (fig. 67) și D, E, F punctele de contact ale laturilor triunghiului cu cercul. Pe arcul EF (mai mic decît un semicerc) se ia un punct oarecare G, se duce în G tangenta la cerc și se formează un triunghi AML. În mod analog, luînd un punct H pe arcul FD și un punct K pe arcul DE, se obțin triunghiurile BPN și CRQ. Să se demonstreze că, oricum s-ar lua punctele G, H și K, suma perimetrelor triunghiurilor AML, BPN și CRQ este egală cu perimetrul triunghiului ABC. Generalizare pentru cazul unui poligon oarecare circumscris unui cerc.

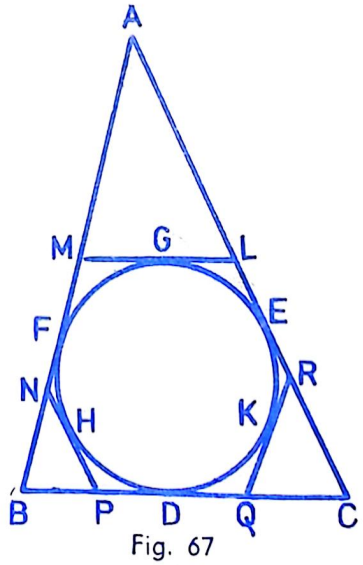


Fig. 67

6.7.5. a) Se numește *patrulater circumscris* unui cerc un patrulater ale cărui laturi sînt tangente la același cerc. Cercul este *înscris* patrulaterului (fig. 68). Să se demonstreze că, într-un patrulater circumscris unui cerc, suma a două laturi opuse este egală cu suma

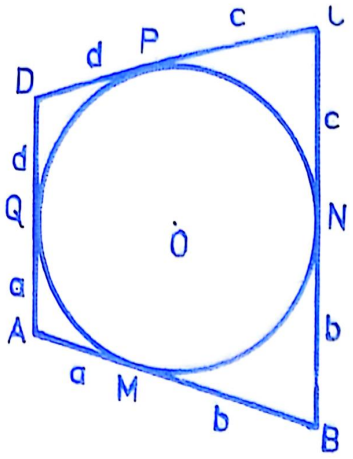


Fig. 68

celorlalte laturi opuse. b) Intr-un patrulater circumscris unui cerc $ABCD$, se dă $AB + CD = 15$ cm. Să se afle perimetrul patrulaterului. c) Un trapez isoscel este circumscris unui cerc. Latura oblică este de 6 cm. Să se afle perimetrul trapezului. Să se găsească o relaţie între latura oblică şi cele două baze ale trapezului.

6.7.6. Într-un patrulater $ABCD$ circumscris unui cerc se dă (în cm): $AB = 9$, $CD = 6$, $BC = 2AD$. Să se afle lungimile laturilor BC şi AD.

6.7.7*. a) Se consideră un hexagon circumscris unui cerc. Să se demonstreze că suma a trei dintre laturile sale luate din două în două este egală cu suma celorlalte trei laturi. b) Problema analoagă în cazul unui poligon cu 100 de laturi circumscris unui cerc. c) Să se examineze cazul unui pentagon circumscris unui cerc. Ce fel de număr trebuie să fie n ca propoziţia să fie adevărată în cazul unui poligon cu n laturi circumscris unui cerc.

6.7.8. Să se demonstreze că, dacă un patrulater este circumscris unui cerc, bisectoarele unghiurilor sale sînt concurente.

6.7.9. La un cerc se duc două tangente paralele şi alte două tangente paralele. Ce fel de patrulater determină ele?

6.7.10. Se dă un cerc. a) Să se determine un punct P astfel încît tangentele duse din el la cerc să formeze un unghi de $u°$. b) Cîte astfel de puncte există? Ce linie formează ele?

6.7.11. Fie ABC un triunghi dreptunghic ($AB \perp AC$) şi d lungimea diametrului cercului înscris triunghiului. Să se demonstreze că

$$d = AB + AC - BC.$$

6.8. Patrulaterul inscriptibil

6.8.1. Care dintre patrulaterele următoare este inscriptibil? a) Paralelogramul; b) dreptunghiul; c) rombul; d) pătratul; e) trapezul; f) trapezul isoscel.

6.8.2*. Fie ABC un triunghi echilateral. Pe latura AB se ia un punct oarecare M şi pe latura CA un punct N astfel încît segmentul CN să fie congruent cu AM. Fie $CM \cap BN = P$. Să se demonstreze că, dacă punctul M se mişcă pe latura AB, unghiul MPN rămîne constant.

6.8.3. Fie ABC un triunghi oarecare. Se construieşte cercul cu diametrul BC şi se notează cu D şi E punctele lui de intersecţie cu laturile triunghiului, $D \in AC$. a) Să se compare unghiurile triunghiului AED cu unghiurile triunghiului ABC. b) În punctul A se duce tangenta AT la cercul circumscris triunghiului. Ce poziţie are dreapta AT faţă de ED?

6.8.4. Fie ABC un triunghi care nu are nici un unghi obtuz. Dintr-un punct D al laturii BC se duc perpendicularele pe AB şi AC; fie E şi F picioarele lor, $E \in AB$. Să se demonstreze că $EF \leqslant AD$. În ce caz are loc egalitatea?

6.8.5*. Se consideră două cercuri secante şi se notează cu A şi B punctele lor de intersecţie. Prin A şi B se duc două drepte paralele şi se notează cu C, D, E şi F punctele în care ele taie din nou cercurile. Ce fel de patrulater este $CDFE$?

6.8.6. Să se demonstreze că un patrulater în care două unghiuri opuse sînt suplementare şi diagonalele sînt congruente este un trapez isoscel. Caz particular: cele două unghiuri opuse sînt drepte.

6.8.7. a) Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, C opus lui A şi AM, BM, CP şi DP bisectoarele unghiurilor sale, $AM \cap DP = Q$, $BM \cap CP = N$ Să se demonstreze că patrulaterul $MNPQ$ este inscriptibil. b*) Aceeaşi problemă dacă $ABCD$ este un patrulater oarecare. Să se enunţe o teoremă.

6.8.8*. a) Să se construiască un triunghi înscris într-un cerc dat cînd se cunosc unghiurile sale. Cîte soluţii are problema? b) Aceeaşi problemă în cazul unui patrulater convex.

6.9. Probleme diverse

6.9.1. În figura 80, AB este un diametru, Ax şi By sînt tangente la cerc, $MN \parallel AB$ şi $PQ \perp AB$. Să se demonstreze că triunghiul MQN este dreptunghic.

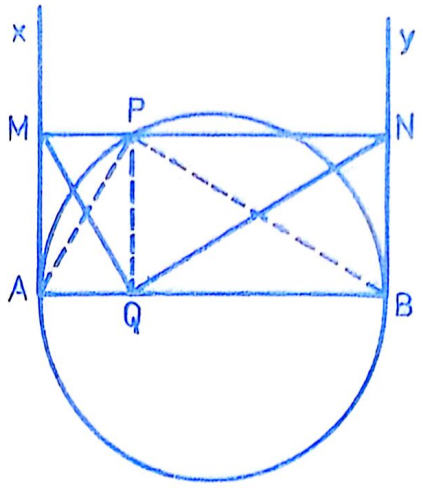


Fig. 80

6.9.2. Fie a, b, c lungimile a trei segmente. a) Să se construiască trei cercuri tangente două cîte două şi ale căror raze să aibă, respectiv, lungimile a, b şi c. Construcţia este totdeauna posibilă? b) Fie A, B, C centrele celor trei cercuri şi M, N, P punctele de contact a cîte două din ele ($M \in BC$, $N \in AC$). Ce legătură există între centrul cercului circumscris triunghiului MNP şi centrul cercului înscris triunghiului ABC?

6.9.3. Fie k un cerc, O centrul, AB un diametru şi M un punct oarecare al cercului, AN şi BP bisectoarele unghiurilor MAB şi MBA, N, $P \in k$. a) Cîte grade are unghiul PON? b) Ce poziţie trebuie să ocupe punctul M ca lungimea coardei PN să fie maximă. c) Fie Q mijlocul coardei PN. Ce linie descrie punctul Q cînd punctul M descrie cercul?

6.9.4*. Fie ABC un triunghi oarecare şi k cercul circumscris triunghiului. Se duc cele trei înălţimi ale triunghiului, AM, BN şi CP (M, N, $P \in k$). a) Să

se demonstreze că înălțimile triunghiului ABC sînt bisectoarele triunghiului MNP. b) Cunoscînd unghiurile triunghiului ABC, să se afle unghiurile triunghiului MNP.

6.9.5. a) Fie ABC un triunghi înscris într-un cerc și A', B' și C' punctele diametral opuse vîrfurilor sale. Să se demonstreze că $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$. b) Problemă analoagă în cazul unui poligon oarecare înscris într-un cerc.

6.9.6. În figura 84, AOB este un unghi oarecare. Dreapta BD a fost dusă astfel încît segmentul CD să fie congruent cu raza cercului. Să se demonstreze că unghiul D este o treime din unghiul AOB. Să se examineze și cazul cînd $\widehat{AOB} > 135°$.

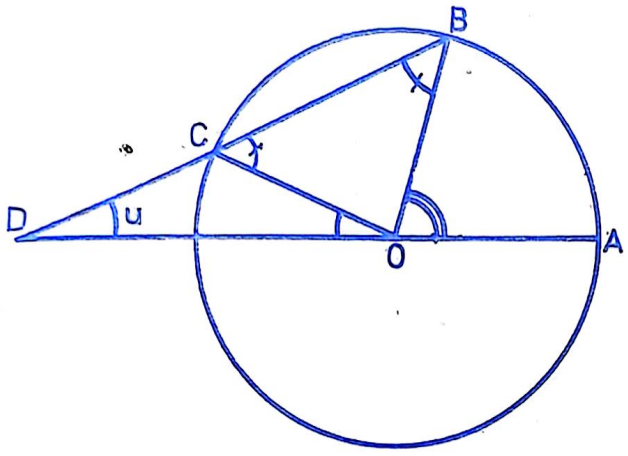


Fig. 84

6.9.7. Să se demonstreze pe baza indicațiilor din figura 86 că un unghi înscris într-un semicerc este drept.

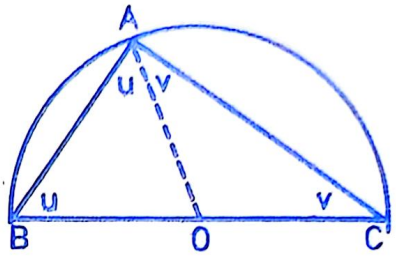


Fig. 86

6.9.8. Se consideră un echer și două drepte perpendiculare. Unul din vîrfurile unghiurilor ascuțite ale echerului alunecă pe una din drepte și celălalt pe cealaltă. Ce linie descrie vîrful unghiului drept?

Capitolul 7

POLIGOANE REGULATE

7.1. Pentru a construi un hexagon regulat, se construieşte un cerc, apoi se foloseşte de mai multe ori compasul, ceea ce ne obligă să facem mai multe înţepături pe foaia de hîrtie. a) Cîte înţepături se fac dacă se foloseşte procedeul obişnuit? b) Cum trebuie procedat pentru a face cît mai puţine înţepături?

7.2. Într-un hexagon regulat $ABCDEF$ se duc diagonalele AC, AE şi FB; fie $AE \cap FB = M$ şi $AC \cap FB = N$. Să se compare segmentele FM, MN şi NB.

7.3. Două cercuri congruente sînt aşezate astfel încît fiecare din ele să treacă prin centrul celuilalt. Să se demonstreze că atunci coarda lor comună este latura unui anumit poligon regulat înscris în unul din ele.

7.4. Fie ABC un triunghi echilateral înscris într-un cerc. În punctele B şi C se duc tangentele la cerc şi se notează cu D intersecţia lor. Ce fel de patrulater este $ABDC$?

7.5. Să se afle raportul dintre aria triunghiului echilateral şi aria hexagonului regulat înscrise în acelaşi cerc, fără a calcula ariile lor.

7.6. Figura 3 reprezintă un hexagon regulat. a) Ce fel de patrulater este $ACDF$? b) Care este raportul dintre aria lui şi aria hexagonului?

7.7. a) Se consideră un triunghi echilateral. Să se aleagă pe fiecare dintre

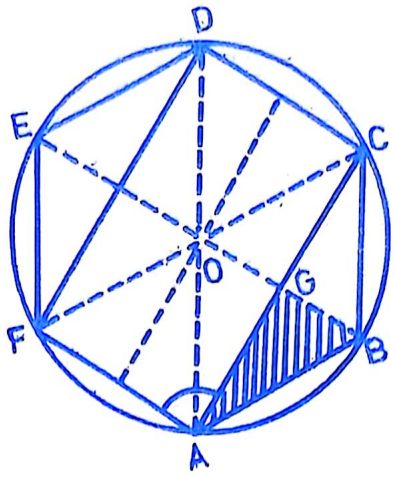


Fig. 3

laturile sale cîte două puncte astfel încît cele şase puncte să fie vîrfurile unui hexagon regulat. b) Aceeaşi problemă în cazul unui triunghi oarecare.

7.8. Fie $ABCDE$ un pentagon regulat înscris într-un cerc şi F intersecţia diagonalelor AC şi BD. a) Ce fel de triunghi este: a) ABF? b) DFC? c) FBC? d) Ce fel de patrulater este $AFDE$? e) Fie O centrul cercului circumscris pentagonului. Să se demonstreze că punctele E, O şi F sînt coliniare.

7.9. Fie $ABCDE\ldots$ un poligon regulat şi $AD \cap BE = M$. Să se demonstreze că: a) segmentul BM este congruent cu latura poligonului, $MB \equiv \equiv AB$; b) O fiind centrul cercului, punctele O, M şi C sînt coliniare.

7.10. Se consideră un poligon regulat $ABCDE\ldots$ a) Fie $AC \cap BD = M$. Să se compare segmentul MA cu MD şi segmentul MB cu MC. b) Fie $AD \cap \cap BE = N$. Să se compare segmentul NA cu NE şi segmentul NB cu ND.

c) Să se găsească şi alte perechi de diagonale care au aceeaşi proprietate.

7.11. Se consideră un poligon regulat cu n laturi. Să se demonstreze că: a) dacă n este un număr par, se pot găsi patru vîrfuri ale poligonului care determină un dreptunghi; b) dacă n este un număr impar, acest lucru este imposibil.

7.12. a) Pe laturile unui triunghi echilateral ABC se construiesc în exteriorul lui triunghiurile isoscele congruente AMB, BNC şi CPA. Cît de mari trebuie să fie unghiurile de la bază ale acestor triunghiuri pentru ca hexagonul $AMBNCP$ care se formează astfel să fie regulat? b) Problema analoagă dacă în locul triunghiului echilateral se ia un pătrat. c) Problema analoagă dacă se porneşte de la un poligon regulat cu n laturi.

7.13. a) Să se compare între ele două diagonale ale unui pentagon regulat. b) Care sînt poligoanele regulate în care toate diagonalele sînt congruente?

7.14. Cîte diagonale de lungimi diferite are un poligon regulat cu n laturi? (Se vor considera mai întîi cazurile cînd $n = 4, 5, 6, 7, 8...$).

7.15. La unele poligoane regulate laturile sînt paralele două cîte două, la altele nu. Ce legătură există între numărul laturilor unui poligon şi această proprietate? (Se vor examina întîi cîteva cazuri particulare cînd poligonul are 4, 5, 6... laturi.)

7.16. a) Un triunghi echilateral ABC se roteşte cu 60° în jurul centrului său. Fie $A'B'C'$ imaginea sa. Ce fel de poligon este $AA'BB'CC'$? b) Un pătrat se roteşte cu 45° în jurul centrului său. Ce fel de poligon formează vîrfurile pătratului împreună cu vîrfurile imaginii sale? c) Problema analoagă în cazul unui poligon regulat cu n laturi.

7.17. Un poligon $ABCDE...$ are proprietatea următoare. Există o rotaţie care duce vîrful A în B, vîrful B în C, vîrful C în D, ş.a.m.d. Poligonul este regulat?

7.18[1]. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat. Pe laturile AB, BC,... FA se iau respectiv punctele A', B', ..., F' astfel ca să aibă loc relaţiile: $AA' \equiv BB' \equiv ... \equiv FF'$. Să se demonstreze că $A'B'C'D'E'F'$ este un hexagon regulat. Generalizare pentru un poligon regulat oarecare.

7.19[1]. a) Se consideră un hexagon regulat $ABCDEF$ (fig. 14). Unghiurile lui se împart în cîte trei părţi congruente prin semidreptele AM, AN, BN, BP, ş.a.m.d. Se obţine astfel un hexagon $MNPQRS$. Să se demonstreze că acest hexagon este regulat. b) Problema analoagă în cazul unui poligon regulat cu n laturi. Cazuri particulare: $n = 3$ şi $n = 4$. Ce particularitate prezintă cazul $n = 5$?

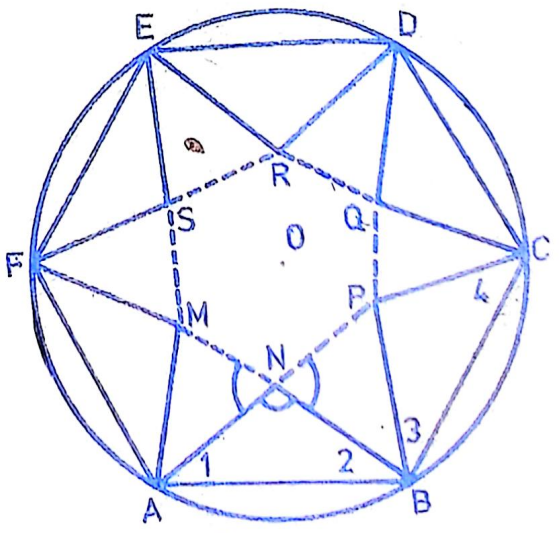


Fig. 14

[1] Se va rezolva mai întîi problema 7.17.

7.20. Fie $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi[1]. a) Se duc diagonalele A_1A_3, A_2A_4, A_3A_5, ... care subîntind cîte două părţi ale cercului circumscris (fig. 16). Fie B_1, B_2, B_3, ... punctele în care se taie cîte două dintre aceste diagonale consecutive. Să se demonstreze că poligonul $B_1B_2B_3 \ldots B_n$ este regulat. b) Se duc diagonalele A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6, ... care subîntind cîte trei părţi ale cercului. Să se demonstreze că poligonul $C_1C_2C_3 \ldots C_n$ determinat de ele este regulat. c) Generalizare.

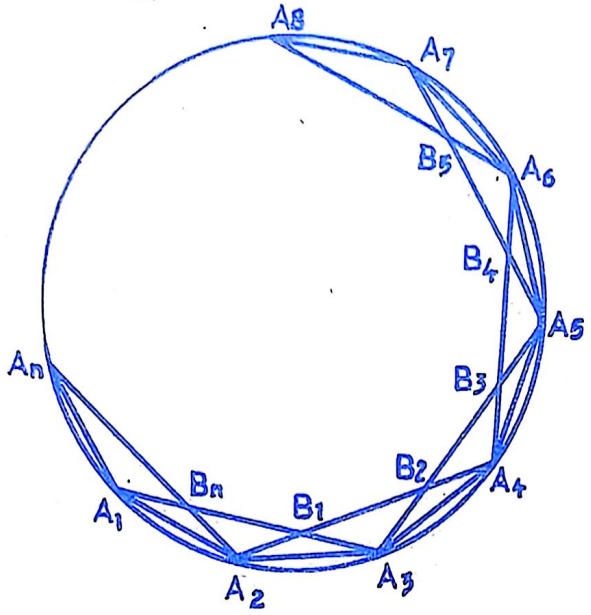


Fig. 16

7.21. Să se găsească toate poligoanele regulate cu care se poate face un pavaj[2].

7.22. Vrem să facem un pavaj cu pietre în formă de octogon regulat (fig. 20). Pentru aceasta mai sînt necesare alte pietre. Ce formă trebuie să aibă aceste pietre?

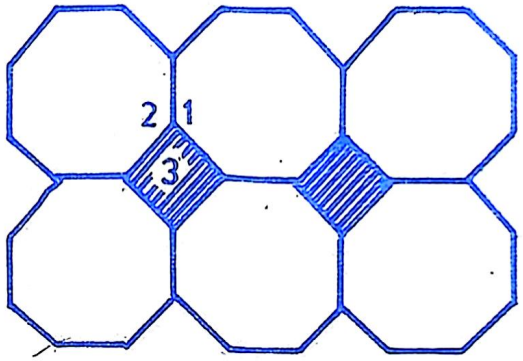


Fig. 20

[1] Se poate lua un caz particular, de exemplu $n = 8$.

[2] Cu care se poate acoperi o parte din plan, fără ca între ele să rămînă o parte din plan neacoperită si fără ca poligoanele să se suprapună.

Capitolul 8

ASEMĂNARE

8.1. Raportul a două segmente

8.1.1. Un segment AB se împarte în 12 părți congruente (fig. 1). Fie M, N și P respectiv al 3-lea, al 7-lea și al 10-lea punct de diviziune. Se cer rapoartele: $\frac{MA}{AB}$, $\frac{NA}{AB}$, $\frac{PA}{AB}$; $\frac{MN}{AB}$, $\frac{NP}{AB}$, $\frac{MP}{AB}$, $\frac{MN}{MP}$, $\frac{NP}{MP}$, $\frac{MN}{NP}$.

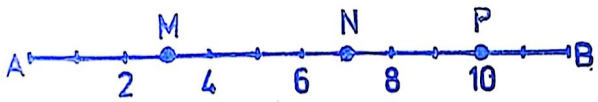


Fig. 1

8.1.2. Fie AB un segment. a) Un punct M îl împarte în raportul $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$. Se cer rapoartele $\frac{MA}{AB}$ și $\frac{MB}{AB}$. b) Aceeași problemă dacă $\frac{MA}{MB} = \frac{p}{q}$. c) Se dă $\frac{MA}{AB} = \frac{3}{11}$ și se cer rapoartele $\frac{MB}{AB}$ și $\frac{MA}{MB}$. d) Aceeași problemă dacă $\frac{MA}{AB} = \frac{p}{q}$.

8.1.3. Un segment de lungime a se împarte în 10 părți congruente; fie b lungimea unui segment format din 3 astfel de părți. Se cere: a) raportul $\frac{b}{a}$; b) raportul $\frac{a}{b}$; c) ce fracție din primul segment este segmentul al doilea? d) Ce fracție din segmentul al doilea este primul? e) Aceeași problemă dacă primul segment se împarte în 83 de părți congruente și al doilea este format din 29 astfel de părți.

8.1.4. Un segment de lungime a este $\frac{5}{8}$ dintr-un segment de lungime b. a) Să se afle raportul $\frac{a}{b}$. b) Ce fracție din segmentul al doilea este primul?

8.1.5. a) Pe un segment AB se ia un punct C astfel ca AC să fie $\frac{1}{3}$ din AB. A cîta parte din CB este AC? b) Aceeași întrebare dacă AC este $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, ... din AB. c) De asemenea dacă $\frac{AC}{AB} = \frac{1}{n}$.

8.1.6. Fie a un segment de 6 cm. Să se calculeze lungimea b a unui segment dacă: a) $\frac{a}{b} = \frac{3}{5}$; b) $\frac{a}{b} = \frac{5}{3}$; c) $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$.

8.1.7. Fie AB un segment. a) Cîte puncte există care să-l împartă în același raport $\frac{p}{q}$ $\left(\text{de exemplu } \frac{p}{q} = \frac{3}{5}\right)$?

b) Fie M și N aceste puncte; să se compare AM cu BN. c) În ce caz există numai un singur punct?

8.1.8. a) Se dă un segment $AB = 12$ cm. Un punct M situat mai aproape de A decît de B îl împarte în raportul $\frac{3}{7}$. Să se afle lungimile segmentelor MA și MB. b) Aceeași problemă dacă $AB = a$ și $\frac{MA}{MB} = \frac{p}{q}$.

8.1.9. a) Un segment AB de 60 mm se împarte în părți proporționale cu trei segmente date, de 8 mm, 20 mm și 32 mm. Să se afle lungimile părților. b) Aceeași problemă, dacă $AB = a$ și se împarte în mai multe părți proporționale cu segmente ale căror lungimi sînt p, q, r, s,...

8.2. Teorema lui Tales

8.2.1. Pe o pagină de caiet liniat se așază o linie gradată ca în figura 4. Se constată că segmentele de pe linia gradată, notate cu a, b, c,..., sînt congruente. Dacă schimbăm poziția liniei gradate, segmentele devin mai mici sau mai mari, dar rămîn congruente. Să se pună acest fapt în legătură cu o teoremă de geometrie.

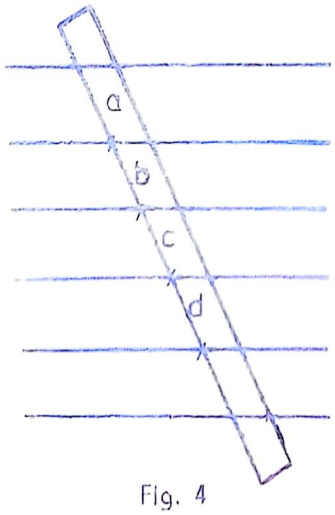


Fig. 4

8.2.2. Așezăm două linii gradate astfel încît capetele lor să coincidă (fig. 5). a) Unim punctul 1 de pe o linie cu punctul 1 de pe cealaltă și punctul 2 cu punctul 2. De ce sînt aceste drepte paralele? b) De asemenea, dacă unim punctul 1 de pe prima linie cu punctul 2 de pe linia a doua și punctul 2 de pe prima linie cu punctul 4 de pe linia a doua. c) Unim punctul 2 de pe prima linie cu punctul 3 de pe linia a doua. Cu care punct de pe linia a doua trebuie să unim punctul 4 ca să obținem o dreaptă paralelă cu prima?

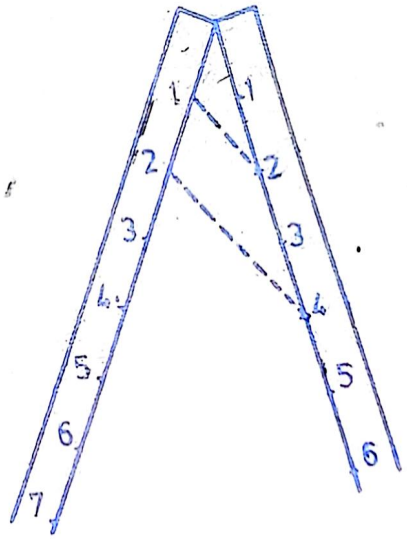


Fig. 5

8.2.3. a) Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$). Printr-un punct D al laturii AB se duce paralela la BC și se notează cu E intersecția ei cu AC. Să se compare segmentul AD cu AE. b) Se putea obține rezultatul și fără teorema lui Tales?

8.2.4. Notaţiile fiind cele din figura 6, în care $DE \parallel BC$, se dă (în cm):

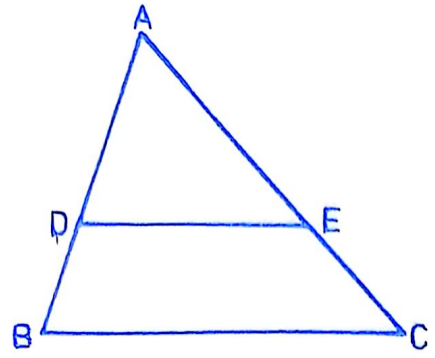


Fig. 6

se dă:	se cere:
a) $AD = 5$, $DB = 8$, $AE = 6$;	EC, AC.
b) $AC = 9$, $AE = 4$, $AD = 3$;	AB, DB.
c) $DB = 6$, $EC = 12$, $AC = 28{,}8$;	AB, AD.

8.2.5. De rezolvat mintal. Notaţiile fiind cele din figura 6, în care $DE \parallel BC$,

se dă:	se cere:
a) $AD = 5$, $DB = 15$, $AE = 7$;	EC.
b) $AD = 7$, $DB = 9$, $AE = 14$;	EC.
c) $AD = 4$, $AB = 12$, $AE = 2{,}1$;	AC.
d) $AE = 6$, $AD = 3$, $AC = 28$;	AB.
e) $DB = 2$, $EC = 6$, $AB = 17$;	AC.
f) $AB = 28$, $DB = 7$, $AC = 36$;	EC.

8.2.6. Notaţiile fiind cele din figura 6, $AB = 14$, $AC = 21$, $AD = 4$, $AE = 6$. Dreapta DE este paralelă cu BC?

8.2.7. Notaţiile fiind cele din figura 7, $DF \parallel EG \parallel AB$, $AD = 3$, $DE = 7$, $EC = 5$, $BC = 30$. Se cer lungimile segmentelor BF, FG şi GC.

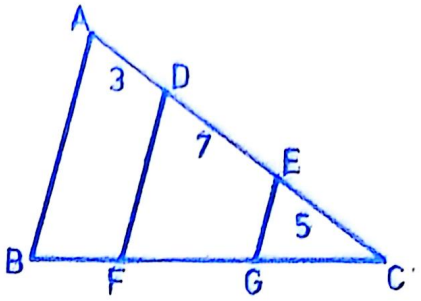


Fig. 7

8.2.8. Notaţiile fiind cele din figura 6, se duce prin E paralela AB şi se notează cu F intersecţia ei cu BC. a) Se dă (în cm): $AD = 3$, $DB = 7$, $BC = 15$. Să se afle lungimile segmentelor BF şi FC. b) În general, ce relaţie există între rapoartele $\frac{AD}{DB}$ şi $\frac{BF}{FC}$?

8.2.9. a) În figura 8, Ox, Oy şi Oz sînt semidrepte oarecare, $AB \parallel A'B'$ şi $BC \parallel B'C'$. Se dă: $OA = 4$ cm, $AA' = 6$ cm, $OC' = 9$ cm. Se cer segmentele OC şi CC'. b) În aceeaşi figură, $OA = 6$, $OA' = 8$, $OC = 9$, $OC' = 12$. Dreptele BC şi $B'C'$ sînt paralele?

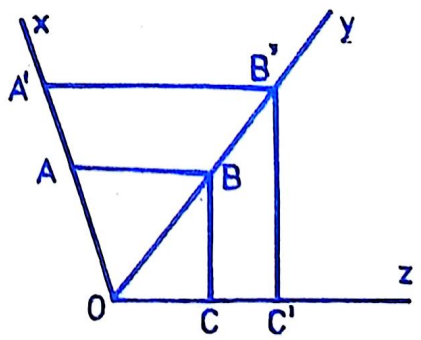


Fig. 8

8.2.10. În figura 9, $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $CD \parallel C'D'$ şi $DE \parallel D'E'$. Să se compare raportul $\frac{OA}{OA'}$ cu $\frac{OE}{OE'}$.

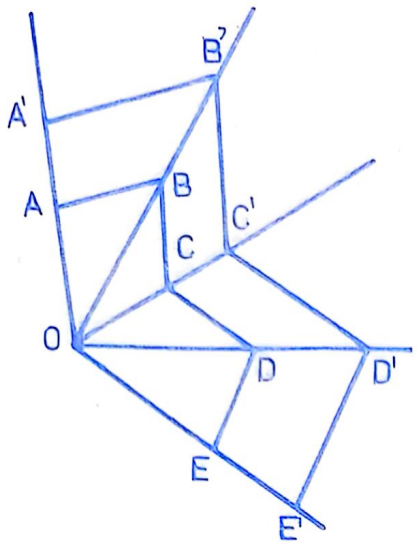


Fig. 9

8.2.11. Fie xOy un unghi. Din vîrful O pleacă în acelaşi timp două puncte, unul se mişcă pe semidreapta Ox cu viteza constantă de a metri/minut şi celălalt se mişcă pe Oy cu viteza constantă de b metri/minut. Să se demonstreze că dreapta care uneşte aceste puncte are mereu aceeaşi direcţie.

8.2.12. a) Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Printr-un punct oarecare M al diagonalei AC se duce paralela MN la CB, $N \in AB$ şi paralela MP la CD, $P \in AD$. Să se demonstreze că $PN \parallel BD$. b) Această relaţie este adevărată şi dacă $ABCD$ este un patrulater oarecare?

8.2.13. a) Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB \parallel CD$, A opus lui C, şi M un punct oarecare al laturii AD. Se duce dreapta MN paralel cu diagonala AC, $N \in DC$, apoi dreapta NP paralel cu DB, $P \in BC$, apoi dreapta PQ paralel cu AC, $Q \in AB$. Ce poziţie are dreapta QM faţă de BD? b) Să se examineze şi cazul cînd patrulaterul $ABCD$ nu este paralelogram.

8.3. Poligoane asemenea

8.3.1. Care este condiţia ca patrulaterele următoare să fie asemenea: a) două dreptunghiuri; b) două paralelograme; c) două romburi; d) două pătrate.

8.3.2. Figura 13 reprezintă două paralelograme care au unghiurile congruente două cîte două. Laturile lor sînt (în mm): 60 şi 15; 20 şi 45. Din aceste numere se poate forma proporţia

$$\frac{60}{45} = \frac{20}{15}\left(= \frac{4}{3}\right),$$

deci laturile lor sînt proporţionale (!). Totuşi, paralelogramele nu sînt asemenea, primul este mai lunguieţ. Cum se explică acest lucru?

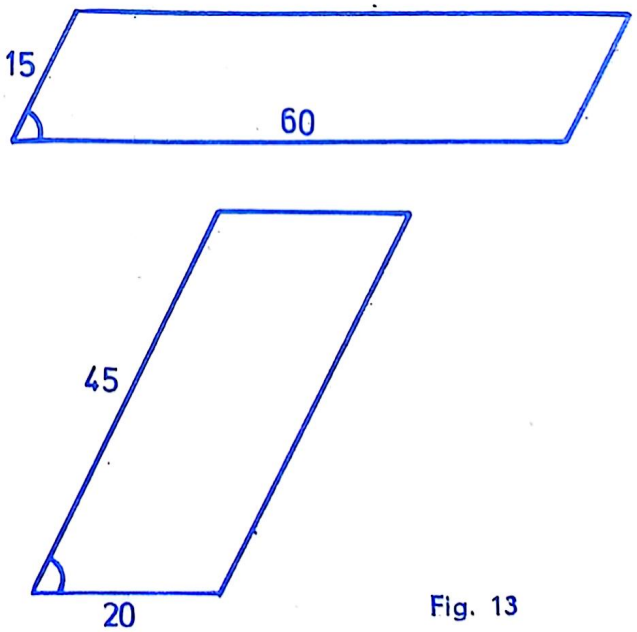
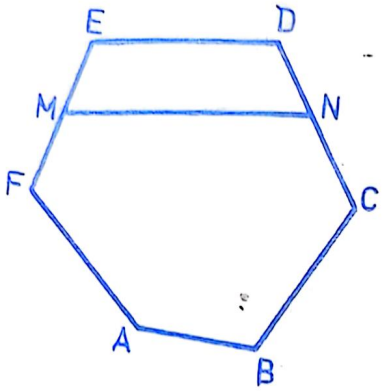


Fig. 13

8.3.3. a) Un patrulater asemenea cu un paralelogram este un paralelogram? b) Aceeaşi întrebare în cazul unui dreptunghi; c) unui romb; d) unui trapez.

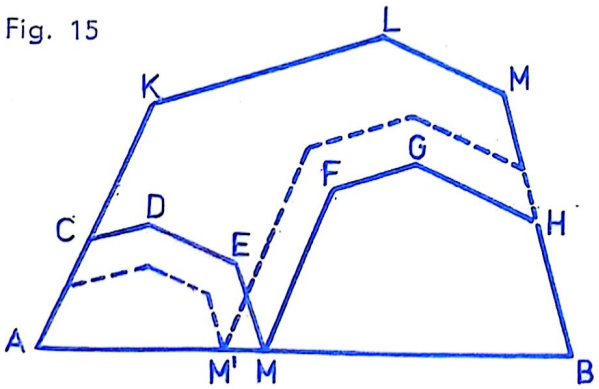
8.3.4. Fie $ABCDEF$ un poligon (fig. 14). Se poate duce o dreaptă MN paralelă cu o latură a lui astfel ca poligonul $ABCNMF$ să fie asemenea cu cel iniţial?

Fig. 14



8.3.5*. Fie AB un segment şi M un punct al lui (fig. 15). Se construiesc două poligoane asemenea $ACDEM$ şi $MFGHB$. Să se demonstreze că, dacă punctul M descrie segmentul AB şi pentru fiecare poziţie a acestui punct se construiesc două poligoane asemenea cu primele, suma perimetrelor celor două poligoane rămîne constantă.

Fig. 15



8.3.6. O piesă $ABCDEF$ are forma din figura 16; $AB = AF = a$ cm, $BC = FE = b$ cm. Pentru a o transforma într-o altă piesă asemenea cu ea, dar mai mică, trebuie să facem mai multe tăieturi şi să înlăturăm părţile de prisos. Unde trebuie făcute aceste tăieturi ca raportul de asemănare între piesa care rezultă şi cea dată să fie un număr dat k? Să se facă proba calculînd lungimile tuturor laturilor piesei obţinute. Caz particular $k = \frac{1}{2}$.

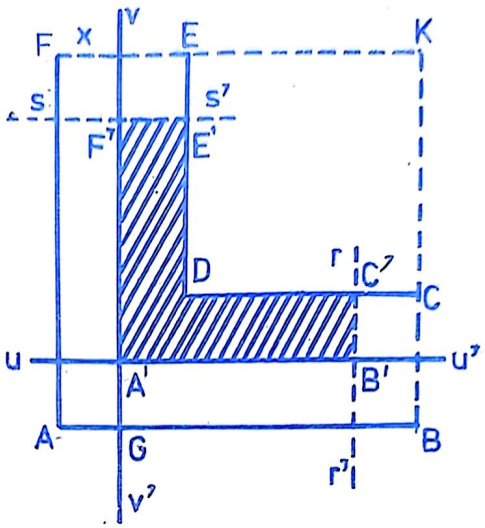


Fig. 16

8.3.7. a) O piesă are forma din figura 18. $AH = HG = GF = a$ cm, $AB = EF = b$ cm. Să se transforme piesa într-o piesă asemenea cu ea, raportul de asemănare fiind un număr dat de k ($k < 1$), printr-un procedeu analog cu cel din problema

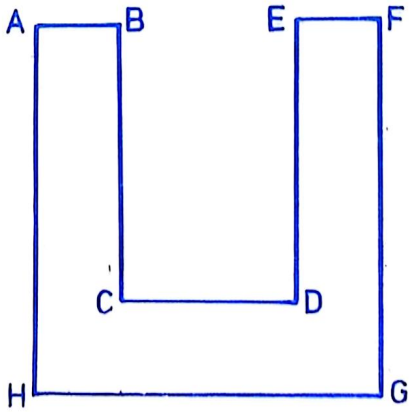


Fig. 18

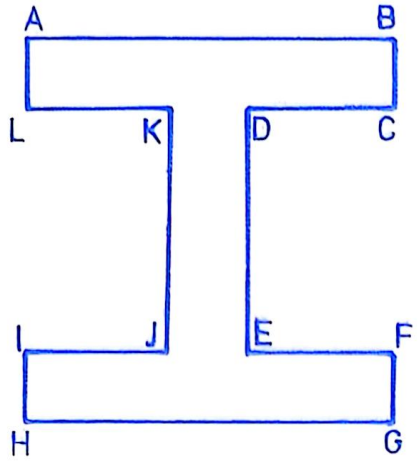


Fig. 19

precedentă. b) Aceeaşi problemă în cazul unei piese care are forma din figura 19, $AB = LC = IF = HG = a$ cm, $AL = BC = IH = FG = KD = JE = b$ cm.

8.3.8. O piesă $ABCDEFGH$ are forma din figura 20, $AB = AH + GF = BC + DE = a$, $BC = FE = b$, $HG = DC$. Trebuie să o transformăm într-o altă piesă asemenea cu ea, făcînd mai multe tăieturi şi înlăturînd părţile de prisos. Unde trebuie

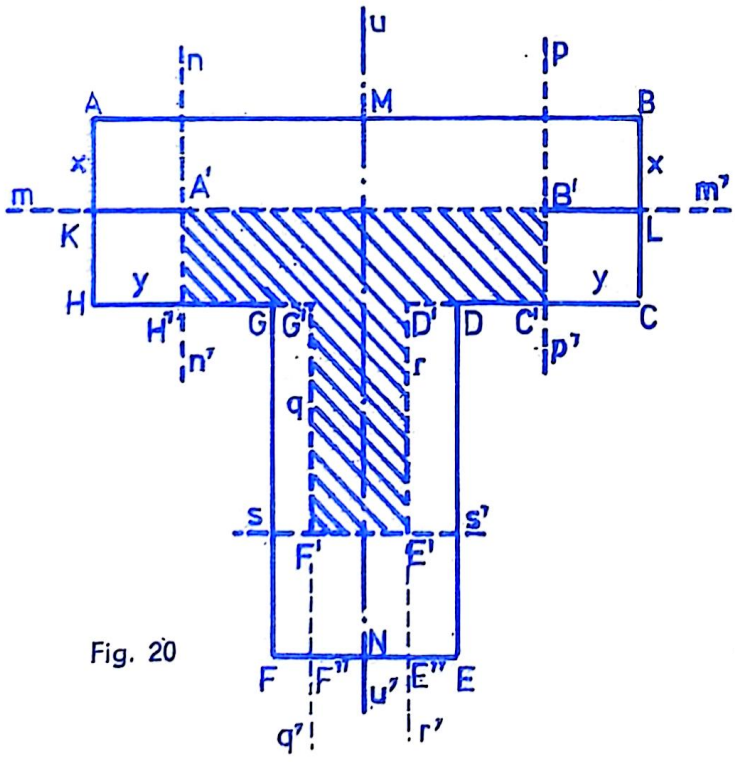


Fig. 20

făcute aceste tăieturi pentru ca raportul de asemănare să fie egal cu un număr dat k? Lucrarea este posibilă oricare ar fi numărul k? Să se facă proba calculînd toate laturile piesei obţinute. Să se arate că lucrarea se poate face prin şase tăieturi şi unde trebuie făcute tăieturile. Să se facă legătura cu problema 8.3.6.

8.4. Triunghiuri asemenea

8.4.1. Dacă două triunghiuri sînt oarecare (scalene) sau dacă amîndouă sînt isoscele, sau echilaterale, sau dreptunghice, sau dreptunghice şi isoscele, se spune că ele sînt de acelaşi fel. Este adevărat că două triunghiuri asemenea sînt de acelaşi fel?

8.4.2. Să se enunţe cîte un caz de asemănare: a) pentru triunghiurile isoscele; b) pentru triunghiurile dreptunghice; c) pentru triunghiurile echilaterale; d) pentru triunghiurile dreptunghice isoscele.

8.4.3. Fie ABC un triunghi oarecare. a) Pe prelungirea laturii AB dincolo de B se ia un punct oarecare D, prin D se duce paralela la BC şi se notează cu E intersecţia ei cu dreapta AC. Triunghiurile ABC şi ADE sînt asemenea? b) Aceeaşi întrebare dacă punctul D se ia pe prelungirea laturii AB dincolo de A.

8.4.4. Să se demonstreze că, dacă raportul catetelor a două triunghiuri este egal cu raportul dintre ipotenuzele lor, triunghiurile sînt asemenea.

8.4.5. Fie ABC un triunghi oarecare. Printr-un punct oarecare D al laturii AB se duce paralela la BC și se notează cu E intersecția ei cu AC. Să se demonstreze că $DE < BC$.

8.4.6. Fie ABC un triunghi. Printr-un punct M al laturii AB se duce o semidreaptă spre interiorul triunghiului paralelă cu BC și se poartă pe ea un segment MN astfel încît să aibă loc relația $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Punctul N cade pe latura AC? Demonstrație.

8.4.7. Un triunghi dreptunghic are un unghi de 32° și un alt triunghi dreptunghic are un unghi de 48°. Aceste triunghiuri sînt asemenea?

8.4.8. Fie ABC un triunghi. Pe latura AB se ia un punct M și pe AC un punct N astfel ca triunghiul determinat de punctele A, M și N să fie asemenea cu triunghiul ABC. Se poate trage concluzia că $MN \parallel BC$?

8.4.9. În figura 26, $AB \parallel CD$. a) Se dă (în cm): $OA = 7$, $AB = 6$, $BO = 5$, $OC = 4$. Se cer lungimile segmentelor CD și OD. b) Se dă: $OA = 10$, $OB = 7$, $OC = 4$, $CD = 5$. Se cer lungimile segmentelor AB și OD.

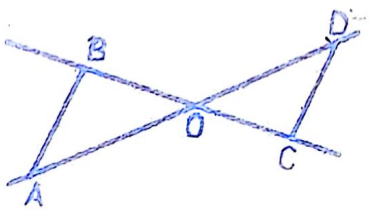


Fig. 26

8.4.10. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc și O intersecția diagonalelor sale. Se dă (în cm): $OA = 6$, $OB = 4$, $OC = 2$. Se cere OD.

8.4.11. a) Să se demonstreze că diagonalele unui trapez se împart în părți proporționale cu bazele trapezului. b) Se poate ca ele să se împartă în părți congruente?

8.4.12. Fie Ax și By două semidrepte paralele situate de o parte și de alta a dreptei AB și C un punct al segmentului AB, $\frac{CA}{CB} = \frac{m}{n}$ (de exemplu $\frac{3}{5}$). Din A și B pleacă simultan două puncte și se mișcă uniform pe Ax respectiv By, primul cu a m/sec și al doilea cu b m/sec. Ce relație trebuie să existe între vitezele a și b ca dreapta MN să treacă mereu prin punctul C? Caz particular: $CA \equiv CB$.

8.4.13. Să se demonstreze că oricare două înălțimi ale unui triunghi sînt invers proporționale cu laturile pe care cad.

8.4.14. În figura 29, $AC \perp AB$, $BD \perp AB$ și unghiul 1 ≡ unghiul 2. Să se demonstreze că AB este medie proporțională între AC și BD.

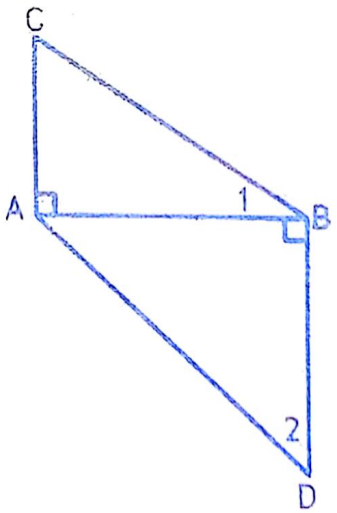


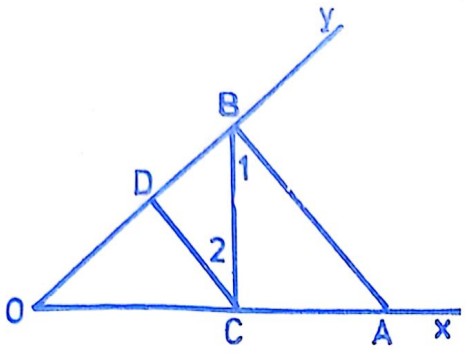
Fig. 29

8.4.15. Să se deseneze un trapez $ABCD$, $AB \parallel DC$, A opus lui C, în care unghiul A să fie congruent cu

unghiul DBC. Să se demonstreze că diagonala BD este medie proporțională între bazele trapezului.

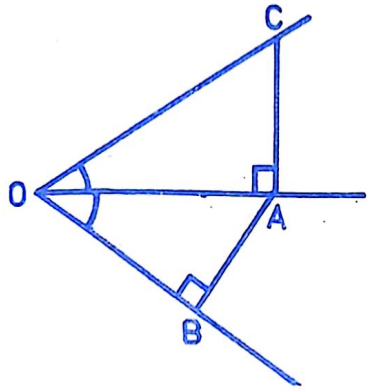
8.4.16. În figura 31, AOB este un unghi oarecare, $AB \perp OB$, $BC \perp OC$ și $CD \perp OD$. Să se demonstreze că BC este medie proporțională între AB și CD.

Fig. 31



8.4.17. a) În figura 32, OA este bisectoarea unghiului BOC, $AB \perp OB$ și $CA \perp OA$. Să se demonstreze că OA este medie proporțională între OB și OC. b) Propoziția rămîne adevărată dacă unghiul BOC este obtuz?

Fig. 32



8.4.18. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu dimensiunile $AB = a$ și $BC = b$. Din vîrful C se duce perpendiculara pe diagonala DB și se notează cu E intersecția ei cu AB. Se cere lungimea segmentului BE. Să se examineze și cazul pătratului.

8.4.19. Fie ABC un triunghi isoscel înscris într-un cerc, $AB \equiv AC$. În punctele A și C se duc tangentele la cerc; fie T intersecția lor. Să se demonstreze că $AC^2 = BC \cdot CT$.

8.4.20. Fie ABC și $A'B'C'$ două triunghiuri asemenea. Să se demonstreze că următoarele rapoarte sînt egale cu raportul lor de asemănare: a) raportul a două înălțimi omoloage; b) raportul a două bisectoare omoloage; c) raportul a două mediane omoloage.

8.4.21. Două triunghiuri asemenea înscrise în același cerc sînt congruente?

8.4.22. Se consideră trei drepte care trec prin același punct O și două drepte paralele d și e care le taie; fie A, B și C punctele în care le taie dreapta e și M, N și P punctele în care le taie dreapta d, $M \in OA$, $N \in OB$ și $P \in OC$. Să se demonstreze că $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC}$. Se vor considera două cazuri: cînd punctul O este în exteriorul fîșiei limitate de dreptele d, e și cînd O este în interiorul acestei fîșii.

8.4.23. Fie OAC un triunghi oarecare și OB una dintre medianele sale, $B \in AC$. Se duce o paralelă la AC și se notează cu M, N și P intersecțiile ei cu OA, OB și OC, $M \in OA$, $N \in OB$. Să se compare segmentul MN cu NP.

8.4.24. În figura 39, AB este un diametru, Ax și By sînt tangente la cerc. M fiind un punct oarecare al cercului, s-au dus dreptele AM și BM, și punctele lor de intersecție cu cele două tangente s-au notat cu N și P. Să se demonstreze că, ori cum am alege punctul M pe cerc,

$$AP \cdot BN = AB^2.$$

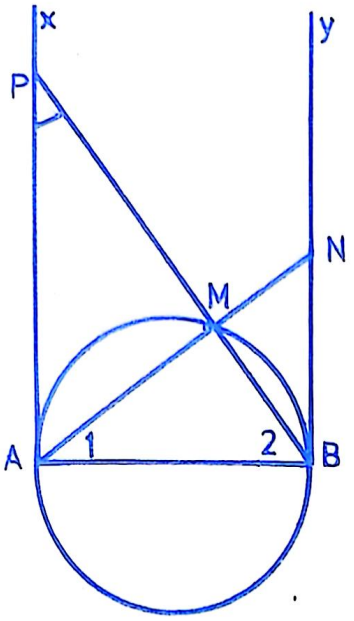


Fig. 39

8.4.25. În figura 40, AB este un diametru și Ax, By sînt tangente la cerc. Într-un punct oarecare M al cercului s-a dus de asemenea tangenta la cerc și punctele ei de intersecție cu celelalte tangente s-au notat cu N și P. Să se demonstreze că, oricum am alege punctul M pe cerc,

$$AN \cdot BP = R^2,$$

unde R este lungimea razei cercului.

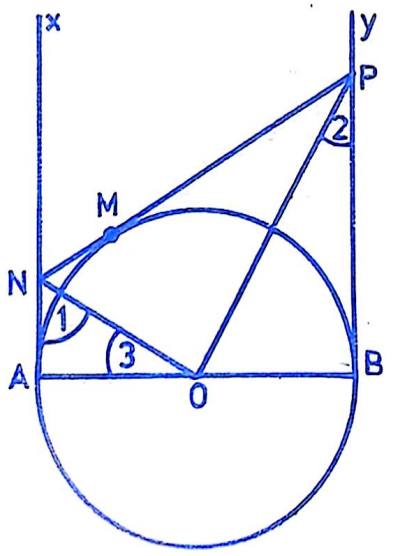


Fig. 40

8.4.26. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Printr-un punct oarecare M al laturii AD se duce paralela la baze și se notează cu N, P și Q intersecțiile ei cu AC, BD și BC, $N \in AC$, $P \in BD$. a) Să se demonstreze că $MN \equiv PQ$. b) Să se examineze cazul cînd paralela trece prin intersecția diagonalelor. Să se completeze: Dacă prin intersecția O a diagonalelor unui trapez se duce paralela la baze și se notează cu R și S intersecțiile ei cu laturile neparalele...

8.4.27. Aceeași problemă dacă $ABCD$ este un paralelogram.

8.4.28*. Prin intersecția diagonalelor unui trapez se duce paralela la baze; fie M și N intersecția ei cu laturile neparalele. Să se demonstreze că $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$, a și b fiind lungimile bazelor trapezului.

8.4.29*. a) Se dau bazele unui trapez, $AB = a$ cm, $CD = b$ cm, A opus cu C; $a > b$. Pe latura AD se ia punctul M pentru care $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{2}{5}$, se duce prin M paralela la baze și se notează cu N, P și Q intersecțiile ei cu AC, BD și BC. Se cer lungimile segmentelor MN, NP, PQ și MQ. b) Aceeași problemă dacă $\dfrac{MA}{MD} = \dfrac{p}{q}$, $p < q$. Caz particular: $p = q$.

8.4.30. Fie ABC un triunghi în care $AB^2 = AC \cdot BC$ (de exemplu în cm): $AC = 4$, $AB = 6$, $BC = 9$. Pe latura AB se poartă un segment BM congruent cu AC și pe latura BC un segment BN congruent cu AB. a) Să se demonstreze că $\triangle MBN \sim \triangle ABC$. b) Cîte elemente (laturi și unghiuri) ale triunghiului BMN sînt congruente cu cîte un element al triunghiului ABC?

8.4.31*. Fie $AB=c$, $BC=a$, $AC=b$ lungimile laturilor unui triunghi. Printr-un punct M al laturii AB se duce paralela la BC și se notează cu N intersecția ei cu AC. a) Să se determine punctul M astfel încît perimetrul trapezului $BCNM$ să fie egal cu un număr dat p. b) Între ce limite trebuie să fie cuprins numărul p ca problema să aibă o soluție?

8.4.32. Construcția fiind aceeași ca în problema 8.4.31. să se determine punctul M astfel încît perimetrul triunghiului AMN să fie egal cu perimetrul trapezului $BCNM$. Caz particular: triunghiul ABC este echilateral. În acest caz se va face proba calculînd perimetrele.

8.4.33. a) Bazele unui trapez sînt $AB=a$, $CD=b$ $(a>b)$ și laturile neparalele $BC=c$, $AD=d$. Printr-un punct M al laturii AD se duce paralela la AB și se notează cu N intersecția ei cu CB. Să se determine punctul M astfel încît segmentul MN să aibă o lungime dată s. b) Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul s ca problema să aibă o soluție.

8.4.34. Piciorul unui munte este la 890 m deasupra nivelului mării și vîrful muntelui la 1250 m. Un funicular care merge de la piciorul muntelui pînă în vîrful lui are o lungime de 600 m. La 200 m de la vîrful muntelui se află o cabană. La ce înălțime deasupra nivelului mării este cabana?

8.4.35. O lampă B (fig. 47) este instalată la înălțimea $AB=8$ m. Un copil CD, înalt de 1,50 m se află la distanța $AC=10$ m de stîlpul AB. Să se afle lungimea umbrei copilului.

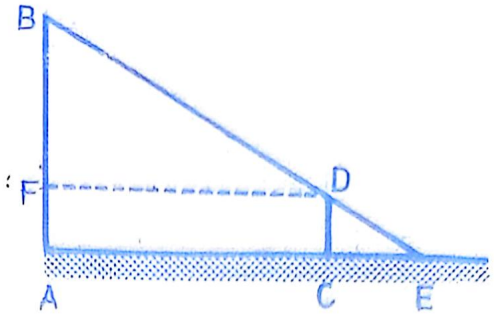


Fig. 47

8.4.36. O clădire înaltă de 10 m trebuie înconjurată cu un zid situat la 20 m de ea. Care trebuie să fie înălțimea zidului ca un om înalt de 1,80 m care stă dincolo de zid la o distanță mai mică decît 5 m de el să nu poată vedea clădirea?

8.5. Linia mijlocie a triunghiului

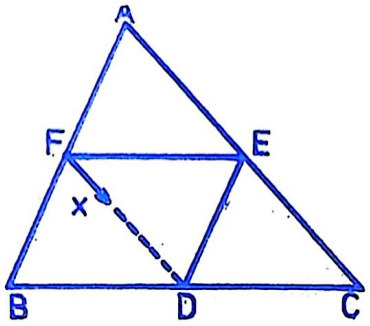
8.5.1. Fie ABC un triunghi și D, E, F mijloacele laturilor sale. Ce fel de triunghi este DEF dacă triunghiul ABC este: a) isoscel; b) echilateral; c) dreptunghic? Ce fel de triunghi este ABC dacă triunghiul DEF este: a) isoscel; b) echilateral; c) dreptunghic?

8.5.2. Fie ABC un triunghi și D, E și F mijloacele laturilor sale $D\in BC$, $E\in AC$. a) Se dă (în cm): $AB=5$, $BC=8$, $CA=10$ și se cer laturile triunghiului DEF. b) Se dă $AC=12$, $DE=5$, $EF=7$ și se cer lungimile DF, AB și BC. c) Perimetrul triunghiului ABC este 26. Se cere perimetrul triunghiului DEF.

8.5.3. Într-un triunghi ABC, $AB = 9$ cm, o linie mijlocie care trece prin mijlocul ei este de 5 cm și perimetrul triunghiului este de 30 cm. Să se afle laturile BC și AC.

8.5.4. În figura 49, ABC este un triunghi oarecare, D este mijlocul laturii BC, $DE \parallel BA$, $EF \parallel CB$, $Fx \parallel AC$. Dreapta Fx trece prin punctul D?

Fig. 49



8.5.5. Fie $ABCD$ un patrulater oarecare, A opus lui C. Un punct M descrie latura DC. Ce linie descrie mijlocul segmentului AM? Ce linie descrie mijlocul segmentului BM? Un punct N descrie latura AB. Ce linie descrie mijlocul segmentului CN? mijlocul segmentului DN? Ce fel de patrulater determină aceste linii? Să se examineze cazul cînd $CD \parallel AB$.

8.5.6. Fie $ABCD$ un patrulater înscris într-un cerc și E, F, G, H picioarele perpendicularelor coborîte din centrul cercului pe laturile sale. Se cunoaște suma diagonalelor patrulaterului $ABCD$ și se cere perimetrul patrulaterului $EFGH$.

8.5.7. Fie ABC un triunghi oarecare. Printr-un punct oarecare D al laturii BC se duc paralelele la AB și AC; fie E și F intersecțiile lor cu aceste laturi, $E \in AB$. Fie apoi H și K mijloacele laturilor AB și AC. Să se demonstreze că dreptele AD, EF și HK sînt concurente.

8.5.8. Fie AB un segment, M un punct exterior și PQ mijloacele segmentelor MA, MB. a) Punctul M descrie o dreaptă d. Să se determine poziția lui astfel încît segmentul PQ să fie minim. b) Aceeași problemă cînd punctul M descrie un cerc. c) De asemenea cînd M se mișcă liber.

8.5.9. Să se demonstreze că: a) Într-un triunghi dreptunghic, mediana care cade pe ipotenuză este congruentă cu jumătate din ipotenuză. b) Dacă într-un triunghi o mediană este jumătate din latura pe care cade, triunghiul este dreptunghic.

8.5.10*. Se consideră un triunghi ABC. Să se determine trei puncte M, N și P, cîte unul pe fiecare dintre laturile lui, astfel ca laturile triunghiului MNP să fie paralele cu laturile triunghiului ABC.

8.5.11. Fie $ABCD$ un patrulater și E, F, G, H mijloacele laturilor sale. Să se demonstreze că $EFGH$ este un paralelogram.

8.5.12. Fie ABC un triunghi și D, E, F mijloacele laturilor sale. Să se demonstreze că medianele triunghiului ABC sînt și medianele triunghiului DEF.

8.5.13. Fie ABC un triunghi oarecare, AD una dintre medianele sale, $D \in BC$, E mijlocul ei și $BE \cap AC = F$. Prin punctul D se duce paralela la BF; fie G intersecția ei cu AC. Să se demonstreze că punctele F și G împart latura AC în trei părți congruente.

8.6. Linia mijlocie a trapezului

8.6.1. a) Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, și M mijlocul laturii AD. Prin punctul M se duce paralela la baze și se notează cu N intersecția ei cu latura BC. Să se demonstreze că punctul N este mijlocul laturii BC. b) Fie M și N mijloacele laturilor AD și BC. Să se demonstreze că $MN \parallel AB$. c) Să se demonstreze că

$$MN = \frac{AB + CD}{2}.$$

Segmentul MN care unește mijloacele laturilor neparalele ale unui trapez (și este paralel cu bazele trapezului) se numește *linia mijlocie* a trapezului.

8.6.2. Se dau bazele unui trapez și se cere lungimea părții din linia mijlocie cuprinsă între diagonale.

8.6.3. În figura 62, $ABCD$ este un trapez, punctele E, F și G împart latura AD în patru părți congruente și dreptele sînt paralele cu bazele. a) Se dă: $AB = 28$ cm, $CD = 16$ cm și se cer lungimile segmentelor EH, FK și GL. b) Aceeași problemă dacă $AB = a$, $DC = b$. c) Să se demonstreze, prin calcul și fără a folosi rezultatele anterioare, că $EH + GL = AB + DC$.

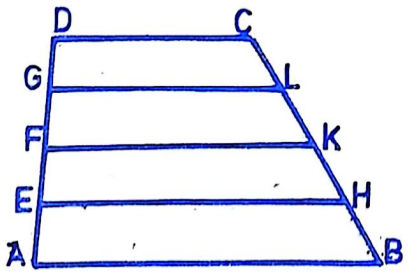


Fig. 62

8.6.4. Există în cazul paralelogramului o propoziție analoagă cu teorema cu privire la linia mijlocie a trapezului?

8.6.5. Fie ABC un triunghi oarecare și D mijlocul laturii BC. Prin punctele B și C se duc paralelele la AD, prin A se duce o dreaptă d în exteriorul triunghiului și se notează cu E și F intersecțiile ei cu aceste paralele (E pe paralela prin B). Să se demonstreze că, dacă dreapta d se rotește în jurul punctului A, suma $BE + FC$ rămîne constantă.

8.6.6. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic, $\hat{A} = \hat{D} = 90°$, și M mijlocul laturii oblice BC. Să se demonstreze că $MA \equiv MD$.

8.6.7. Pîrghia unei balanțe cu brațe egale se rotește în jurul punctului ei de sprijin. Ce poziție trebuie să aibă pîrghia pentru ca suma înălțimilor celor două talere să fie maximă? minimă?

8.6.8. În figura 66, $ABCD$ este un trapez, M și N sînt două puncte oarecare ale bazei mari, $MM' \parallel DA$, $NN' \parallel CB$, P și Q sînt centrele paralelogramelor $AMM'D$ și $N'NBC$. Ce poziție are dreapta PQ față de AB?

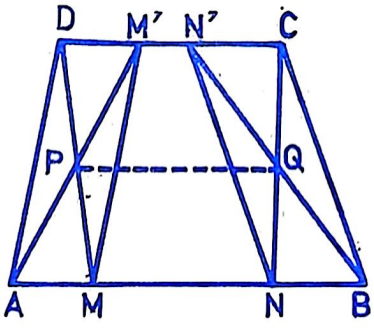


Fig. 66

8.6.9. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel DC$, A opus lui C. Pe baza mare AB se poartă un segment AE congruent cu DC. Să se demonstreze că dreptele AC, DE și linia mijlocie a trapezului sînt concurente.

8.6.10. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, MN linia lui mijlocie şi O mijlocul ei. Prin punctul O se duce o dreaptă xy care taie ambele baze; fie $xy \cap AB = E$ şi $xy \cap CD = F$. Ce fel de patrulater este $MENF$?

8.7. Probleme diverse

8.7.1*. În figura 69, ABC este un triunghi oarecare şi laturile lui au fost împărţite în cîte trei părţi congruente. Să se demonstreze că dreptele DG, EH şi KF sînt concurente.

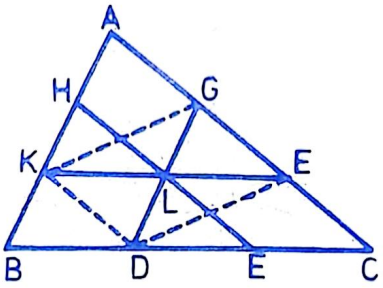


Fig. 69

8.7.2. Se dau două cercuri tangente interior, raza unuia este jumătate din raza celuilalt. Prin punctul lor de contact T se duce o dreaptă oarecare; fie M şi N punctele ei de intersecţie (deosebite de T) cu cele două cercuri, M între T şi N. Să se demonstreze că punctul M este mijlocul segmentului TN.

8.7.3. Figura 71 reprezintă un dispozitiv format dintr-o bară orizontală AB care are la capete cîte un scripete (o rotiţă). Peste ei este trecut un fir $MABN$ şi de capetele firului sînt atîrnate două greutăţi M şi N care fac ca AM şi BN să fie verticale. Să se demonstreze că, dacă punctele M şi N se mişcă fiecare pe verticala lui, dreapta MN trece printr-un punct fix.

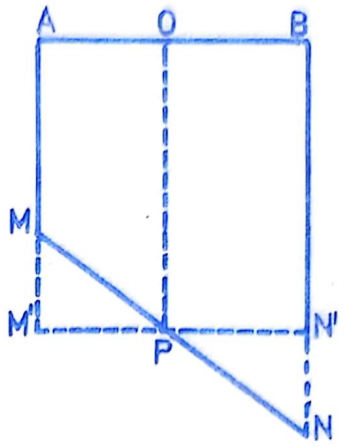


Fig. 71

8.7.4. a) Să se demonstreze că diagonalele unui trapez se împart în părţi proporţionale cu bazele trapezului. b) Se ştie că diagonalele unui paralelogram se împart în părţi congruente. Ce legătură există între aceste fapte?

8.7.5*. a) În figura 72, $Ax \perp AB$ şi $By \perp AB$. O este un punct oarecare al segmentului AB şi unghiul uOv este drept. Să se demonstreze că, dacă unghiul uOv se roteşte în jurul vîrfului său O, produsul $AM \cdot BN$ rămîne constant. b) Ce poziţie trebuie să ocupe unghiul uOv ca segmentul MN să fie minim?

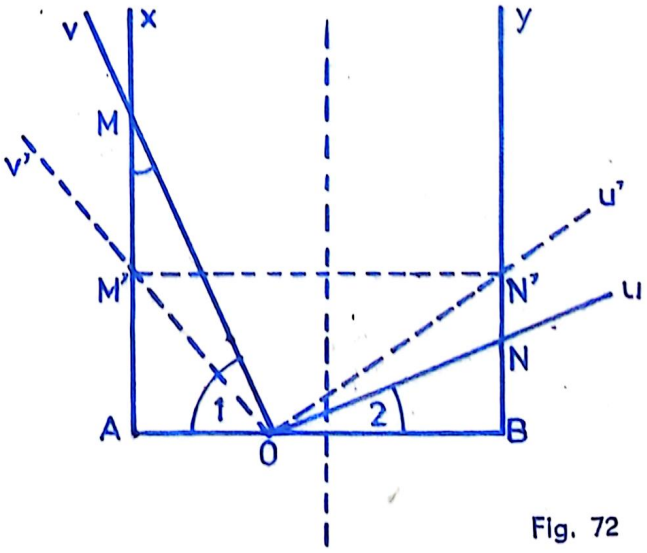


Fig. 72

8.7.6. Să se construiască un trapez $ABCD$, $AB \parallel CD$, A opus lui C, în care diagonalele AC şi BD să fie perpendiculare. Prin intersecţia O a diagonalelor se duce perpendiculara pe baze; fie E şi F intersecţia ei cu bazele, $E \in AB$. Să se demonstreze că $EA \cdot FD = OE \cdot OF = EB \cdot FC$.

8.7.7*. a) Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Prin intersecţia O a diagonalelor sale se duce paralela la AB; fie M şi N intersecţiile ei cu laturile neparalele, $M \in AD$. Să se demonstreze că $OM \equiv ON$. b) Să se demonstreze că această proprietate este caracteristică pentru trapez (un patrulater care are această proprietate este trapez).

8.7.8. a) Să se demonstreze că: a) oricare două mediane ale unui triunghi se împart în raportul $\frac{1}{2}$; b) cele trei mediane ale unui triunghi sînt concurente.

8.7.9*. Se ştie că medianele unui triunghi sînt concurente şi se împart în acelaşi raport, $\frac{1}{2}$. Să se demonstreze o reciprocă a acestei propoziţii, şi anume: Dacă într-un triunghi (fig. 74) dreptele AD, BE şi CF sînt concurente într-un punct G şi

$$\frac{GD}{GA} = \frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC},$$

ele sînt medianele triunghiului.

8.7.10. Se consideră un paralelogram $ABCD$, $AB \parallel CD$. a) Fie E şi F mijloacele laturilor AB şi DC, $E \in AB$. Să se demonstreze că dreptele AF şi EC împart diagonala DB în trei părţi congruente. b) Fie G şi H punctele care împart diagonala BD în trei părţi congruente (G mai aproape de B), $CG \cap AB = E$ şi $AH \cap CD = F$. Să se demonstreze că E şi F sînt mijloacele laturilor respective.

8.7.11[1]. Se consideră un trapez cu bazele $AB = 10$ cm, $CD = 6$ cm şi laturile neparalele $AD = 5$ cm, $BC = 7$ cm. Printr-un punct M al laturii AD se duce paralela MN la baze, $N \in BC$. Să se studieze şi să se reprezinte grafic variaţia lungimii segmentului MN cînd punctul M descrie latura DA de la D la A.

8.7.12. Se consideră un paralelogram $ABCD$, $AB \parallel CD$, A opus lui C, în care $AB = 5$ cm, $AD = 3$ cm. Printr-un punct M al laturii AD se duce dreapta Mz paralel cu AD; fie $Mz \cap AC = P$, $Mz \cap BD = Q$ şi $Mz \cap BC = N$. Să se studieze şi să se reprezinte grafic variaţia lungimii segmentului PQ, cînd punctul M descrie latura AD. (v. şi probl. 15.3.20).

---

[1] Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = ax + b$. Dacă $a > 0$, funcţia este crescătoare, iar dacă $a < 0$, ea este descrescătoare. Graficul ei este o linie dreaptă. Pentru a trasa această dreaptă, se determină două puncte ale ei dînd lui x două valori convenabile.

Capitolul 9

RELAȚII METRICE

9.1. Teorema catetei. Teorema înălțimii

9.1.1. Să se calculeze media proporțională (geometrică) și media aritmetică a numerelor următoare și să se compare rezultatele: a) 4 și 9; b) 3 și 12; c) 10 și 14,4.

9.1.2. Să se demonstreze că media proporțională a două numere pozitive diferite este cuprinsă între aceste numere, adică este mai mare decît numărul mai mic și mai mică decît numărul mai mare. Care este media proporțională a două numere egale?

9.1.3. În figura 1, ABC este un triunghi dreptunghic în A, $AD \perp BC$, $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, $DC = m$, $BD = n$.

Se dă:	Se cere:
a) $m = 16, n = 9$;	$a,\ i,\ b,\ c$.
b) $a = 5,\ b = 4$;	$m,\ n,\ i,\ c$.
c) $a = 25,\ m = 16$;	$n,\ i,\ b,\ c$.
d) $n = 5,\ i = 12$;	$a,\ m,\ b,\ c$.
e) $n = 20,\ c = 29$;	$a,\ m,\ i,\ b$.

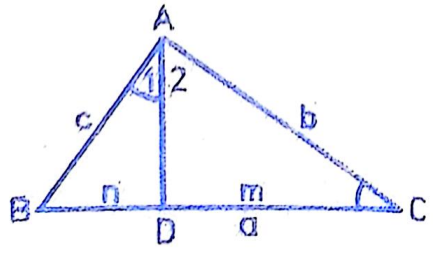


Fig. 1

9.1.4. Literele avînd semnificația din problema 9.1.3 (fig. 1), să se demonstreze că $\frac{b^2}{c^2} = \frac{m}{n}$.

9.1.5. Literele avînd semnificația din problema 9.1.3 (fig. 1), să se demonstreze că: a) $ic = bn$; b) $ib = cn$.

9.1.6. Să se demonstreze că media proporțională a două numere pozitive este mai mică decît media lor aritmetică sau egală cu ea.

9.1.7. Fie $BC = a$, $CA = b$ și $AB = c$ lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic ($AB \perp AC$). Să se afle înălțimea AD.

9.1.8. În figura 4 triunghiul ABC este dreptunghic, AD este înălțimea, $DE \perp AB$ și $DF \perp AC$. Să se demonstreze că segmentele AE și AF sînt proporționale cu catetele triunghiului ABC.

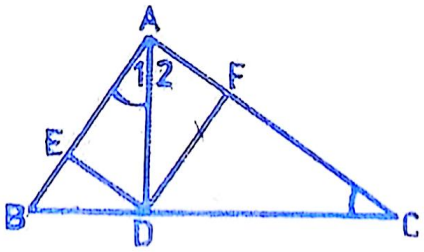


Fig. 4

9.1.9. Literele avînd semnificația din problema 9.1.8 (fig. 4), se dă: $DC = m$, $BD = n$. Se cere lungimea segmentului EF.

9.1.10. Literele avînd semnificaţia din problema 9.1.8 (fig. 4), se dau laturile triunghiului ABC şi se cer lungimile segmentelor AE şi AF.

9.1.11 Într-un cerc se duce un diametru AB. Fie M un punct al cercului şi N proiecţia lui pe AB. Se dă: $AN = 12$ cm, $NB = 3$ cm. Se cer: segmentul MN şi coardele AM şi BM.

9.1.12. Într-un cerc cu raza de 6 cm se duce o coardă AB situată la 4 cm de centru şi în punctele A şi B se duc tangentele la cerc; fie C intersecţia lor, O centrul cercului şi $OC \cap AB = D$. Se cer segmentele OC, AD şi AC.

9.1.13. Într-un cerc cu raza de 8 cm se duce o coardă AB situată la 7 cm de centrul cercului. Fie CD diametrul perpendicular pe coardă şi $AB \cap CD = E$. Se cer coardele AC şi AD. Aceeaşi problemă dacă raza cercului este R şi distanţa de la centru la coardă este d.

9.1.14 Într-un dreptunghi $ABCD$ se dau laturile $AB = a$, $AD = b$ şi diagonala $AC = d$. Din vîrful D se duce perpendiculara pe AC; fie E şi F intersecţiile ei cu AC şi AB, $E \in AC$. Se cer segmentele AF, DF, AE, ED şi EF.

9.1.15. Se consideră un unghi drept xOy şi o dreaptă d care taie laturile lui. Fie P piciorul perpendicularei coborîtă din O pe d, $Ox \cap d = M$ şi $Oy \cap d = N$. Unghiul se roteşte în jurul vîrfului său. Ce poziţie trebuie să ocupe unghiul ca produsul $PM \cdot PN$ să fie maxim?

9.1.16. Fie O centrul unui cerc, M un punct oarecare al cercului şi N proiecţia lui pe o dreaptă oarecare Ox care trece prin O. În M se duce tangenta la cerc; fie T intersecţia ei cu Ox. Cînd punctul M se mişcă pe cerc astfel ca segmentul ON să scadă, segmentul OT creşte. Să se demonstreze că produsul $ON \cdot OT$ rămîne constant.

9.1.17. Se consideră două cercuri tangente interior, cu razele de 2 cm şi 6,5 cm. În punctul cercului mic diametral opus punctului de contact se duce tangenta la el. Să se afle lungimea părţii din această tangentă situată în interiorul cercului mare. b) Aceeaşi problemă dacă razele sînt r şi R.

9.1.18*. Fie ABC un triunghi dreptunghic şi D un punct al ipotenuzei. Propoziţiile următoare sînt reciproce ale teoremei catetei şi teoremei înălţimii:

a) Dacă $AB^2 = BC \cdot BD$, AD este înălţime. b) Dacă $AD^2 = DB \cdot DC$, AD este înălţime. Aceste reciproce sînt adevărate?

9.2. Teorema lui Pitagora

9.2.1. Să se construiască un pătrat a cărui arie să fie egală cu suma ariilor a două, trei, patru ... pătrate date.

9.2.2. Distanţa dintre două oraşe A şi B este de 159 km. Există o şosea care le leagă în linie dreaptă şi o altă şosea care porneşte din A, merge în linie dreaptă pînă într-un punct C, $AC = 135$ km, apoi coteşte cu un unghi drept şi continuă în linie dreaptă pînă în B. Din A pleacă în acelaşi timp două maşini. Una merge pe primul drum cu o viteză medie de 50 km/oră şi cealaltă merge pe drumul ACB. Ce viteză medie trebuie să aibă maşina a doua ca să ajungă în B odată cu prima?

9.2.3 Într-un cerc cu raza de 65 cm se duc două coarde paralele, una de 112 cm și alta de 78 cm. Se cere distanța dintre coarde (două cazuri).

9.2.4. Fie a, b lungimile a două coarde ale aceluiași cerc, $a > b$ și c, d distanțele lor de la centru. Să se demonstreze că $a^2 - b^2 = 4(d^2 - c^2)$.

9.2.5. Fie M un punct al unui cerc. Se duc prin M două coarde perpendiculare MA și MB. Să se determine punctul M astfel încît suma $MA^2 + MB^2$ să fie maximă.

9.2.6 Într-un cerc cu raza de 65 cm se duc două coarde perpendiculare $AB = 112$ cm și $CD = 126$ cm. Se cere distanța dintre mijloacele lor și distanța de la centru la intersecția lor.

9.2.7. a) Într-un patrulater inscriptibil $ABCD$ (A opus lui C) se dă (în cm): $AB = 20$, $BC = 24$, $AD = 15$, unghiul $\hat{A} = 90°$. Se cere latura CD. b) Aceeași problemă dacă $AB = a$, $BC = b$, $AD = c$.

9.2.8*. În centrul unui teren în formă de pătrat cu latura $3a$ se găsește un bazin în formă de pătrat cu latura a. Laturile celor două pătrate sînt paralele. Să se afle lungimea drumului celui mai scurt de la un colț al terenului la colțul opus.

9.2.9. Fie AB un segment de dreaptă. Printr-un punct oarecare O al său se duce perpendiculara pe AB și se poartă pe ea, de o parte și de alta a punctului O, două segmente, OC congruent cu OA și OD congruent cu OB. Să se demonstreze că lungimea liniei frînte $ABDCA$ rămîne constantă cînd punctul O descrie segmentul AB.

9.2.10 Fie ABC un triunghi dreptunghic, D piciorul înălțimii și E, F proiecțiile punctului D pe catete. Să se demonstreze că $AE^2 + AF^2 = AD^2$.

9.2.11. Să se demonstreze că, dacă diagonalele unui patrulater sînt perpendiculare, suma pătratelor a două laturi opuse este egală cu suma pătratelor celorlalte două laturi.

9.2.12. La un cerc se duc două tangente perpendiculare; fie M intersecția lor și O centrul cercului. Ce relație există între raza cercului și lungimea segmentului OM.

9.2.13. Printr-un punct M situat în interiorul unui cerc sau pe cerc se duc două coarde perpendiculare, AC și BD. Să se demonstrece că fiecare dintre sumele $MA^2 + MB^2$, $MB^2 + MC^2$, $MC^2 + MD^2$ și $MD^2 + MA^2$ este cel mult egală cu $4r^2$, r fiind raza cercului. Unde trebuie să fie situat punctul M, ca una din aceste sume să fie maximă?

9.2.14. Se consideră un cerc; fie r raza lui. Se duc două drepte perpendiculare, distanțele de la centrul cercului la ele fiind a și b. Fie M intersecția dreptelor. Ce relație trebuie să existe între a, b și r ca punctul M să fie: a) în interiorul cercului; b) pe cerc; c) în exteriorul lui? Să se dea exemple în cazul cînd $r = 5$.

9.2.15. a) Lungimile laturilor unui triunghi sînt (în cm) 5, 7 și 9. Triunghiul este dreptunghic?

9.2.16. a) Fie $ABCD$ un patrulater în care unghiurile opuse A și C sînt drepte. Să se demonstreze că $AB^2 + AD^2 = CB^2 + CD^2$. b) Reciproca este adevărată? Adică: dacă între laturile unui patrulater există această relație, unghiurile A și C sînt drepte?

9.2.17. Se consideră un trapez dreptunghic. Se notează cu B şi b bazele şi cu D şi d diagonalele lui. Să se demonstreze că

$$B^2 + d^2 = D^2 + b^2.$$

9.2.18*. Se consideră un cerc. Printr-un punct oarecare M se duc două drepte perpendiculare care taie cercul; fie AB şi CD coardele pe care le determină în cerc. Să se demonstreze că suma $AC^2 + BD^2$ este aceeaşi, oricare ar fi punctul M. Caz particular: punctul M este centrul cercului.

Să se demonstreze pe baza teoremei lui Pitagora teoremele 9.2.19 — 9.2.23

9.2.19. a) Într-un triunghi isoscel, înălţimea corespunzătoare bazei este şi mediană. b) Reciproc, dacă într-un triunghi o înălţime este şi mediană, triunghiul este isoscel.

9.2.20. Dacă dintr-un punct se duc spre o dreaptă două oblice de lungimi diferite, atunci: a) oblica mai mare are o proiecţie mai mare; b) oblica care are o proiecţie mai mare este mai mare. (Este vorba de proiecţii pe acea dreaptă.)

9.2.21. Din două coarde de lungimi diferite ale aceluiaşi cerc: a) coarda mai mare este mai apropiată de centru; b) coarda mai apropiată de centru este mai mare.

9.2.22. Pentru ca două triunghiuri dreptunghice să fie congruente, este suficient să aibă ipotenuzele congruente şi cîte o catetă congruentă.

9.2.23. Într-un paralelogram, diagonala care uneşte vîrfurile unghiurilor ascuţite este mai mare decît cealaltă.

9.3. Probleme diverse

9.3.1. Într-un cerc cu raza de 13 cm se duce o coardă AB situată la o distanţă de 5 cm de centru. În A şi B se duc tangentele la cerc; fie C intersecţia lor. Să se afle lungimile tangentelor CA şi CB.

9.3.2. Se consideră un cerc cu raza de 12 cm. Dintr-un punct C situat la distanţa de 37 cm de centru se duc tangentele la cerc; fie A şi B punctele de contact. Se cere lungimea coardei AB.

9.3.3. Într-un cerc cu raza de 7 cm se duce un diametru AB, pe tangenta în A la cerc se poartă un segment AC de 25 cm şi din C se duce a doua tangentă la cerc; fie D punctul de contact. Se cere lungimea segmentului BD.

9.3.4. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$) înscris într-un cerc, D punctul diametral opus cu A şi $AD \cap$ $\cap BC = E$. Să se demonstreze că $BC^2 = 4EA \cdot ED$.

9.3.5. Lungimile laturilor unui triunghi sînt (în cm): $AB = 13$, $BC =$ $= 21$, $CA = 20$. Se cer înălţimile triunghiului.

9.3.6. a) Pe o masă circulară de rază R se pune o faţă de masă dreptunghiulară cu dimensiunile a şi b ($a > b >$ $> 2R$) astfel ca centrul dreptunghiului să coincidă cu centrul cercului. Care sînt lungimea maximă şi lungimea minimă a părţii din faţa de masă care atîrnă în jos? b) Care sînt aceste lungimi în cazul cînd diametrul mesei este de 60 cm şi faţa de masă are forma de pătrat cu latura de 1,50 m?

c) Înălțimea mesei este de 50 cm. Cît de mare poate fi latura pătratului ca fața de masă să nu ajungă la pămînt?

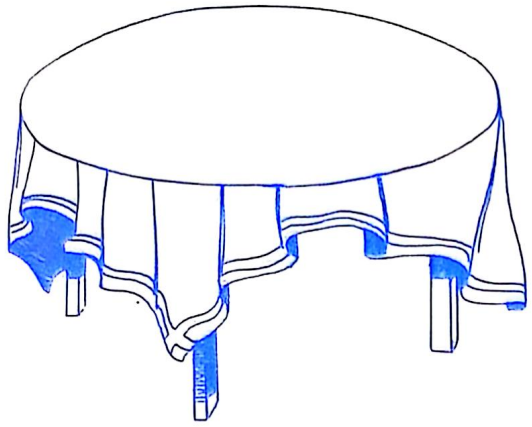


Fig. 38

9.3.7. Pe o masă în formă de pătrat cu latura a se pune o față de masă în formă de pătrat cu latura b, $b > a$, astfel ca cele două pătrate să aibă același centru și diagonalele lor să coincidă (în parte). Fața de masă fiind prea mare, ajunge în unele locuri pînă la pămînt. Pentru a evita aceasta, se face propunerea de a roti fața de masă cu 90° în jurul centrului său, astfel ca diagonalele ei să fie paralele cu laturile mesei. Propunerea este bună? Cu cît variază lungimea maximă a părții care atîrnă în jos?

9.3.8. În două puncte A și B de pe malul unui lac se găsește cîte o barcă (fig. 42). Distanța $AB = d$ metri. La un moment dat barca care se găsește în punctul A pornește și merge în linie dreaptă perpendicular pe mal cu viteza de a metri/minut. În același moment pornește cealaltă barcă din punctul B și caută să prindă prima barcă mergînd în linie dreaptă cu viteza de b metri/minut. a) Care dintre cele două viteze trebuie să fie mai mare? b) În ce direcție trebuie să meargă barca a doua? c) După cît timp o prinde? Exemplu: $a = 400$, $b = 500$, $d = 1200$.

9.3.9. Fie AB un diametru al unui cerc. El se prelungește cu un segment BC congruent cu raza cercului și din puntul C se duce tangenta CT la cerc, T fiind punctul de contact. Se dă raza cercului, R. Să se afle: a) segmentele TA și TC; b) unghiul A.

Capitolul 10

ARII

10.1. Aflarea unor arii

10.1.1. Fie b, i și $\mathcal{A}$ respectiv baza, înălțimea și aria unui triunghi. a) Se dau b și i, și se cere $\mathcal{A}$. b) Se dau b și $\mathcal{A}$, și se cere i. c) Se dau i și $\mathcal{A}$, și se cere b.

10.1.2. Laturile unui triunghi sînt: $AB = 5$ cm, $BC = 8$ cm. Înălțimea $AD = 4$ cm. Se cere înălțimea CE.

10.1.3. Se consideră două triunghiuri, ABC și DEF, în care $EF \equiv BC$, $DF \equiv AC$ și unghiurile C și F sînt suplementare. Să se compare ariile lor.

10.1.4. O latură a unui dreptunghi este de 56 m și diagonala sa este de 65 m. Se cere aria dreptunghiului.

10.1.5. O latură a unui dreptunghi este de 80 m și aria sa este de 3120 m^2. Se cere diagonala dreptunghiului.

10.1.6. Aria unui triunghi dreptunghic este de 924 m^2 și una dintre catete este de 33 m. Se cere ipotenuza triunghiului.

10.1.7. O catetă a unui triunghi este de 45 cm și ipotenuza este de 53 m. Se cere aria triunghiului.

10.1.8. Într-un triunghi ABC, $AB = AC = 65$ cm și $BC = 66$ cm. Se cere aria triunghiului.

10.1.9. Aria unui triunghi isoscel este de 3120 cm^2 și înălțimea sa este de 80 cm. Se cer laturile triunghiului.

10.1.10. Într-un patrulater $ABCD$, A opus cu C, unghiul A este drept și diagonala BD este perpendiculară pe AC. Se dă (în metri): $AD = 15$, $AB = 20$, $DC = 41$. Se cere aria patrulaterului.

10.1.11. Lungimile laturilor unui patrulater $ABCD$ sînt (în metri): $AB = 102$, $BC = CD = 85$, $DA = 96$ și diagonala $BD = 102$. Se cere aria patrulaterului.

10.1.12. Să se deducă formula pentru aria trapezului pe baza indicațiilor din figura 3-a. $NR \equiv QP$ și $PS \equiv MN$. b) De asemenea pe baza celor din figura 3-b. Punctul E este mijlocul segmentului BC și $DE \cap AB = F$.

10.1.13. Să se deducă formula pentru aria trapezului calculînd ariile triunghiurilor în care-l descompune o diagonală.

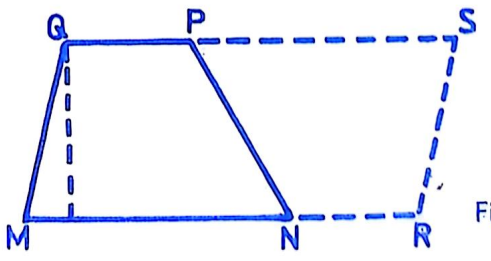


Fig. 3-a

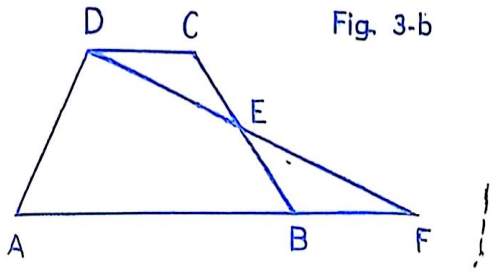


Fig. 3-b

10.1.14. Un trapez şi un paralelogram au aceeaşi arie şi aceeaşi înălţime. Fie a şi b bazele trapezului şi c baza paralelogramului. Ce relaţie există între a, b şi c?

10.1.15. Aria unui trapez este de 264 cm^2 şi înălţimea sa este de 11 cm. Se cere linia mijlocie a trapezului.

10.1.16. Fie a şi b bazele, i înălţimea şi $\mathcal{A}$ aria unui trapez. Se dau trei din aceste numere şi se cere al patrulea.

10.1.17. Într-un trapez dreptunghic, baza mică este de 8 cm, înălţimea este de 7 cm şi unul dintre unghiuri are 45°. Se cere aria trapezului.

10.1.18. Bazele unui trapez dreptunghic sînt de 12 cm şi 8 cm, şi trapezul are un unghi de 45°. Se cere aria trapezului.

10.1.19. Bazele unui trapez isoscel sînt de 18 m şi 8 m, iar laturile neparalele au cîte 13 m. Se cere aria trapezului.

10.1.20. Se consideră un trapez isoscel în care laturile neparalele sînt congruente cu baza mică şi baza mare este dublul bazei mici. Baza mică are a cm. Se cere aria trapezului.

10.1.21. Într-un trapez, baza mică este de a cm, fiecare dintre laturile neparalele este dublul bazei mici şi unul din unghiuri are 60°. Să se afle aria trapezului.

10.1.22. Se consideră un trapez cu bazele (în cm) $AB = 15$, $CD = 10$ şi înălţimea de 8 cm. Să se ducă prin vîrful A o semidreaptă astfel ca aria părţii din trapez situată sub ea (de aceeaşi parte cu vîrful B) să aibă: a) 45 cm^2; b) 80 cm^2.

10.1.23. Aria unui trapez este de 84 cm^2, înălţimea este de 7 cm şi diferenţa bazelor de 6 cm. Se cer bazele trapezului.

10.1.24. Fie $ABCD$ un patrulater în care diagonalele AC şi BD sînt perpendiculare. Se dau diagonalele $AC = d_1$, $BD = d_2$ şi se cere aria patrulaterului.

10.1.25. Figura 11 reprezintă un triunghi dreptunghic ABC şi pătratele construite pe laturile sale. $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Să se afle aria hexagonului $HKDEFG$.

10.1.26. Un dreptunghi $ABCD$ se roteşte cu 90° în jurul centrului său.

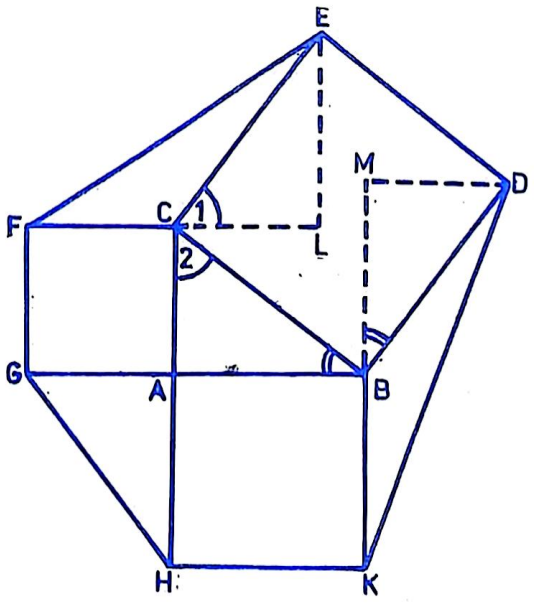


Fig. 11

Fie $A'B'C'D'$ noua sa poziție. Se dă: $AB = a$, $BC = b$. Se cere aria poligonului $AD'A'BCB'C'D$.

10.1.27. Dintr-un vîrf al unui hexagon regulat se duc cele 3 diagonale. a) Să se afle ariile triunghiurilor în care se descompune hexagonul și raportele dintre ele și aria hexagonului. Se dă latura hexagonului. b) Să se afle aceste rapoarte fără a calcula fiecare arie în parte.

10.1.28. Să se demonstreze că aria unui poligon circumscris unui cerc este dată de formula

$$\mathcal{A} = \frac{pR}{2},$$

unde p este perimetrul poligonului și R raza cercului.

10.1.29. Lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic isoscel este a. Se cere aria triunghiului. Soluția prin calcul și geometrică.

10.1.30. Să se afle raportul dintre aria unui pătrat și aria pătratului care are ca latură diagonala lui. Soluție prin calcul și geometrică.

10.1.31. Să se afle latura unui pătrat știind că: a) dacă o mărim cu 3 m, aria pătratului crește cu 51 m^2; b) dacă o micșorăm cu 4 m, aria pătratului scade cu 88 m^2. Se va da și o soluție geometrică.

10.1.32. Un tablou are forma de pătrat. Tabloul împreună cu rama are de asemenea forma de pătrat și aria lui este dublul ariei tabloului propriu-zis. Latura tabloului propriu-zis este a. Se cere lățimea ramei.

10.1.33. Într-un triunghi ABC, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Să se demonstreze că aria lui este dată de formulele

$$\mathcal{A} = \frac{ab \sin C}{2}, \quad \mathcal{A} = \frac{bc \sin A}{2},$$

$$\mathcal{A} = \frac{bc \sin A}{2}.$$

10.1.34. Aria unui triunghi ABC este 96 m^2, $BC = 16$ m, $AC = 15$ m. Se cer unghiurile triunghiului.

10.1.35. Într-un triunghi ABC se dă aria $\mathcal{A}$ și: a) latura BC și unghiul C; b) înălțimea AD și unghiul C; c) înălțimile AD și BE. Să se arate cum se pot afla celelalte laturi și unghiuri ale triunghiului. (Nu se vor efectua calculele, se va arăta numai calea.)

10.1.36. Lungimile laturilor unui paralelogram sînt $AB = 20$ cm $BC = 15$ cm și aria sa este de 240 cm^2. Se cer unghiurile paralelogramului.

10.1.37. Diagonala unui dreptunghi este de 20 m și unul din unghiurile format de diagonale are 130°. Se cere aria dreptunghiului.

10.1.38. Diagonalele unui paralelogram sînt de 14 m și 24 m, iar unul dintre unghiurile format de ele este de 50°. Se cere aria paralelogramului.

10.1.39. Vrem să construim n cercuri concentrice astfel ca ariile coroanelor circulare determinate din cîte două cercuri consecutive și aria cercului celui mai mic să fie egale între ele. Să se demonstreze că razele acestor cercuri trebuie să fie proporționale cu $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ..., $\sqrt{n}$.

10.1.40. Figura 23 s-a obținut astfel: S-a desenat un triunghi dreptunghic și cîte un semicerc pe fiecare dintre latu-

rile lui ca diametru. Să se demonstreze că suma ariilor părţilor haşurate este egală cu aria triunghiului.

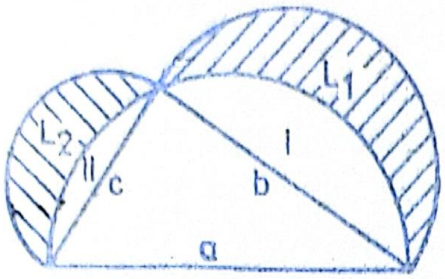


Fig. 23

10.2. Comparaţii de arii

10.2.1. Se consideră două dreptunghiuri. Să se demonstreze că: a) dacă bazele lor sînt congruente ariile lor sînt proporţionale cu înălţimile lor; b) dacă înălţimile lor sînt congruente, ariile lor sînt proporţionale cu bazele lor. c) Aria unui dreptunghi este de 503,519 m², un alt dreptunghi are aceeaşi bază cu el, dar înălţimea lui este de 10 ori mai mare. Se cere aria dreptunghiului al doilea. d) Aria unui dreptunghi este 333,440 m². Un alt dreptunghi are aceeaşi înălţime, dar baza lui este de 100 ori mai mică. Se cere aria dreptunghiului al doilea. e) Baza unui dreptunghi se înmulţeşte cu 3 şi înălţimea se înmulţeşte cu 5. Cu cît se înmulţeşte aria dreptunghiului? f) Baza unui dreptunghi se înmulţeşte cu 5 şi înălţimea se împarte la 8. Care este raportul dintre ariile celor două dreptunghiuri.?

10.2.2. Aceeaşi problemă în cazul a două triunghiuri.

10.2.3. Într-un triunghi ABC se duce o mediană AD. Să se compare ariile triunghiurilor ABD şi ADC.

10.2.4. Se consideră un paralelogram. Să se compare între ele ariile celor patru triunghiuri în care îl descompun diagonalele.

10.2.5. Într-un triunghi oarecare ABC se duce o mediană AD; fie E mijlocul ei. Punctul E se uneşte cu B şi C. Să se compare ariile celor patru triunghiuri în care se descompune astfel triunghiul ABC.

10.2.6. Se dau două drepte paralele, d şi e, şi două segmente a şi b. Pe dreapta d se ia un segment AB congruent cu a şi pe dreapta e un segment CD congruent cu b. Unde trebuie aşezate aceste segmente ca aria trapezului $ABCD$ să fie minimă?

10.2.7. Avem o parcelă în formă de trapez şi, pentru a o mări, ni se permite să mărim una dintre baze cu un segment dat. Ce este mai bine, să mărim baza mare sau baza mică?

10.2.8. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, A opus lui C şi M mijlocul laturii BC. Prin M se duce o dreaptă care taie semidreptele AB şi DC; fie N şi P punctele de intersecţie, $N \in AB$. Să se aleagă dreapta astfel încît aria trapezului $ANPD$ să fie maximă (minimă).

10.2.9. În figura 28, $ABCD$ este un trapez, $ED \perp DC$, $FC \perp DC$ şi $DE = FC =$ înălţimea trapezului. Aria trapezului este de 90 cm², $DC = 7$ cm, $DE = 6$ cm. Se cere suma ariilor triunghiurilor EAD şi FCB.

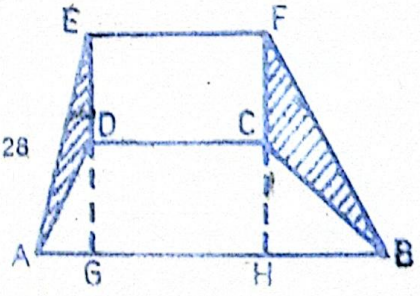


Fig. 28

10.2.10. Fie $ABCD$ un paralelogram, $AB \parallel CD$, A opus cu C. Să se determine un punct M din interiorul lui astfel încît suma ariilor triunghiurilor MAB și MCD să fie maximă.

10.2.11. Fie $ABCD$ un paralelogram. Una dintre laturile sale se înmulțește cu un număr oarecare n, iar cealaltă latură și unghiurile rămîn neschimbate. Cu cît se înmulțește aria paralelogramului?

10.2.12. În figura 31, O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC, $OD \perp BC$, $OE \perp AC$, $OF \perp AB$. A cîta parte din aria triunghiului ABC este suma ariilor părților haşurate?

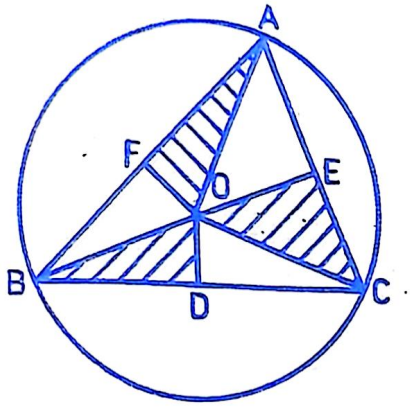


Fig. 31

10.2.13. Fie I centrul cercului înscris triunghiului ABC. Să se demonstreze că ariile triunghiurilor IAB, IBC, ICA sînt proporționale cu laturile triunghiului.

10.2.14. Fie ABC un triunghi oarecare și D, E și F mijloacele laturilor sale, $D \in BC$, $E \in CA$ și $F \in AB$. a) Să se compare între ele ariile patrulaterelor $AFDE$, $BDEF$ și $CEFD$. A cîta parte din aria triunghiului este fiecare dintre aceste arii? b) Aceleași întrebări cu privire la ariile patrulaterelor $BCEF$, $CAFD$ și $ABDE$.

10.2.15.* Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Să se găsească pe baza mare un punct M astfel încît dreapta MC să împartă trapezul în două părți echivalente.

10.2.16. Fie ABC un triunghi. Latura AB se prelungește cu un segment BM, latura BC cu un segment CN și latura CA cu un segment AP unde $BM \equiv AB$, $CN \equiv BC$ și $AP \equiv CA$. Se cere raportul dintre ariile triunghiurilor PMN și ABC.

10.2.17. În figura 36, laturile dreptunghiului au fost împărțite a) în cîte două; b) în cîte 3; c) în cîte 4 părți congruente. A cîta parte din aria dreptunghiului este partea haşurată?

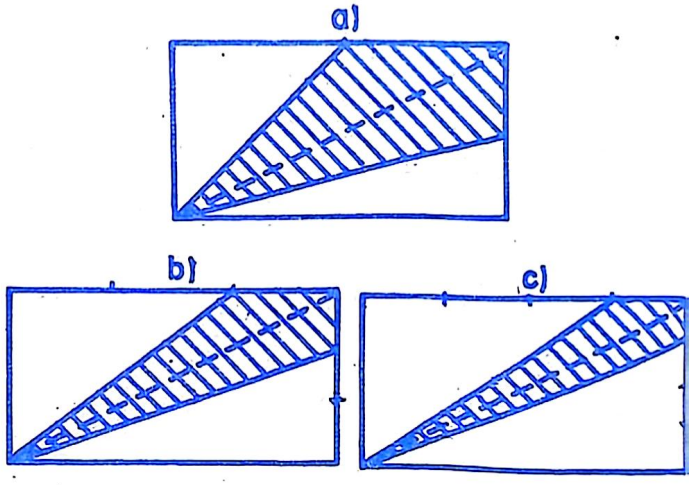


Fig. 36

10.2.18. Să se ducă printr-un vîrf al unui dreptunghi niște semidrepte care să împartă dreptunghiul: a) în 6 părți echivalente; b) în 7 părți echivalente; c*) în n părți echivalente.

10.2.19. Avem o placă în formă de pătrat $ABCD$. $AB = a$ și M este un punct al laturii CD, $DM = \frac{a}{3}$. Placa trebuie împărțită în n părți echivalente prin tăieturi drepte care trec prin

punctul M. Să se determine semidreptele care reprezintă aceste tăieturi dacă: a) $n = 4$; b) $n = 5$; c) $n = 7$.

10.2.20. Fie $ABCD$ un patrulater, A opus lui C, și O intersecția diagonalelor sale. a) Să se demonstreze că, dacă $AB \parallel CD$ ($ABCD$ este trapez), triunghiurile OAD și OBC sînt echivalente. b) Reciproca este adevărată?

10.2.21. Fie $ABCD$ un trapez, A opus lui C, M un punct al bazei AB, N un punct a bazei CD, $AN \cap DM = P$ și $MC \cap BN = Q$. Să se demonstreze că aria patrulaterului $NPMQ$ este suma ariilor triunghiurilor APD și BQC.

10.2.22. a) Fie AB și CD două segmente congruente și neparalele. Să se determine un punct M astfel încît triunghiurile MAB și MCD să fie echivalente. Pe ce linie se poate mișca punctul M? Se vor face două figuri, una în care segmentele se taie și una în care nu se taie. b) Aceeași problemă dacă $AB \parallel CD$.

10.3. Raportul ariilor a două poligoane asemenea

10.3.1. Să se demonstreze că raportul ariilor a două poligoane asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

10.3.2. a) În figura 49, laturile triunghiului ABC au fost împărțite în cîte 7 părți congruente. Să se afle raportul dintre aria hexagonului $EFGHIJ$ și aria triunghiului ABC. b) Aceeași problemă, dacă laturile triunghiului se împart în cîte n părți congruente și se ia mereu al m-lea punct de diviziune, $m < \frac{n}{2}$.

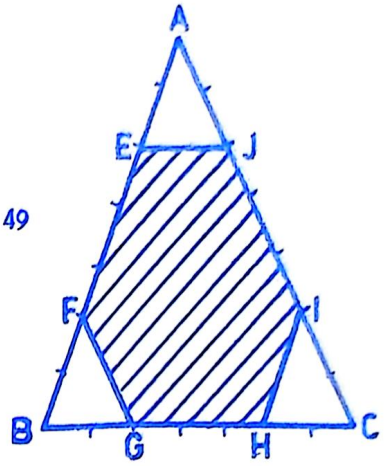


Fig. 49

10.3.3. În figura 50, ABC este un triunghi oarecare, punctele D și E împart baza în trei părți congruente, $DF \parallel AB$ și $EG \parallel AC$. A cîta parte din aria triunghiului ABC este aria fiecăruia din cele patru părți (I, II, III, IV) în care s-a descompus triunghiul?

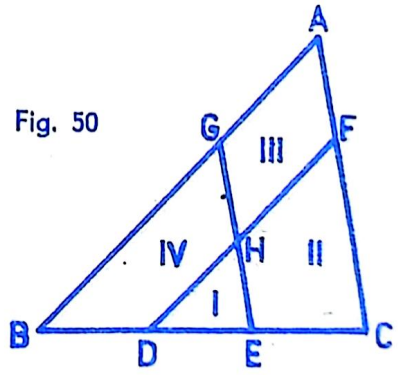


Fig. 50

10.3.4. În figura 51, $ABCD$ este un paralelogram, O este centrul lui. Prin punctul O s-au dus paralelele la laturile paralelogramului, care l-au des-

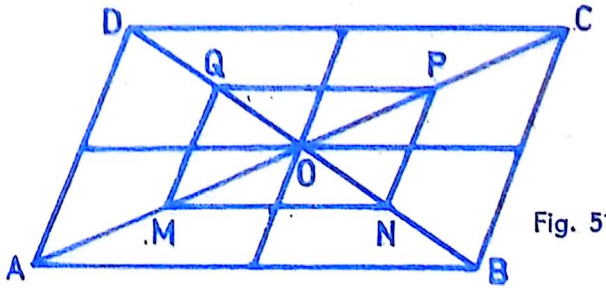


Fig. 51

compus în patru paralelograme. M, N, P, Q sînt centrele acestor paralelograme. Se dă aria paralelogramului $ABCD$ ($= \mathcal{A}$) şi se cere aria paralelogramului $MNPQ$.

10.3.5. Să se ducă o paralelă la o latură a unui triunghi care să împartă triunghiul în două părţi echivalente.

10.3.6. a) În figura 52, aria pătratului $AMNP$ este jumătate din aria pătratului $ABCD$. Să se afle raportul dintre laturile acestor pătrate. b) În figura 53, aria cercului mic este egală cu aria coroanei. Să se afle raportul dintre razele celor două cercuri. c) În figura 54 arcul MN împarte sectorul OAB în două părţi echivalente. Să se afle raportul $OM : OA$. d) Generalizare

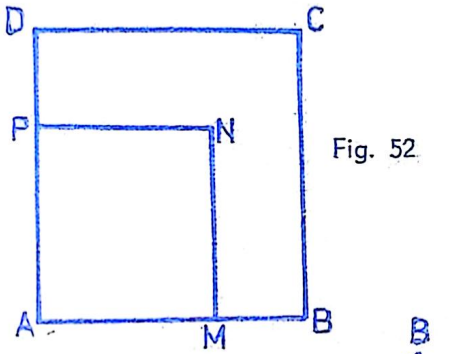
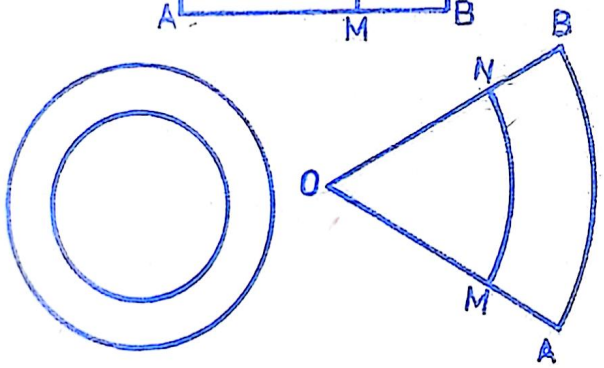


Fig. 52



10.3.7. Latura AB a unui triunghi ABC se împarte în 5 părţi congruente şi prin punctele de diviziune se duc paralele la latura BC. A cîta parte din aria triunghiului este aria fiecăreia dintre părţile în care se descompune triunghiul? b) Aceeaşi întrebare dacă latura AB se împarte în 100 de părţi congruente.

10.3.8. Să se demonstreze că două poligoane asemenea şi echivalente sînt congruente.

10.4. Demonstraţii bazate pe arii

10.4.1. Fie ABC un triunghi isoscel, $AB = AC$. Dintr-un punct M al bazei BC se duc perpendicularele pe AB şi AC; fie N şi P picioarele lor. Să se demonstreze că, dacă punctul M se mişcă pe baza BC, suma $MN + MP$ rămîne constantă.

10.4.2. a) Se consideră un triunghi echilateral. Dintr-un punct O din interiorul lui se duc perpendicularele pe laturi; fie M, N şi P picioarele lor. Să se demonstreze că, dacă punctul O se mişcă în interiorul triunghiului, suma $OM + ON + OP$ rămîne constantă. b) Aceeaşi problemă în cazul unui poligon regulat oarecare.

10.4.3. Într-un triunghi ABC, se duce bisectoarea AD, $D \in BC$. a) Să se afle raportul dintre ariile triunghiurilor ADB şi ADC considerînd ca baze laturile DB şi DC. b) Să se afle raportul aceloraşi arii considerînd ca baze AB şi AC. c) Să se deducă de aici o relaţie între rapoartele $\frac{DB}{DC}$ şi $\frac{AB}{AC}$. d) Să se completeze: O bisectoare a unui triunghi împarte latura pe care o taie în părţi proporţionale cu... e) Ce ne arată această propoziţie în cazul cînd $AB \equiv AC$. f) Să se demonstreze că propoziţia obţinută este adevărată şi dacă AD este bisectoarea unghiului exterior A.

10.4.4. Fie b şi c catetele şi a ipotenuza unui triunghi dreptunghic. Se construieşe un pătrat cu latura $b + c$

și patru triunghiuri congruente cu triunghiul dat, așezate ca în figura 61. Apoi se construiesc patru triunghiuri congruente cu triunghiul dat, așezate ca în figura 62. Să se calculeze aria părții din pătrat care rămîne neacoperită de triunghiuri și să se compare rezultatele. Ce teoremă se obține?

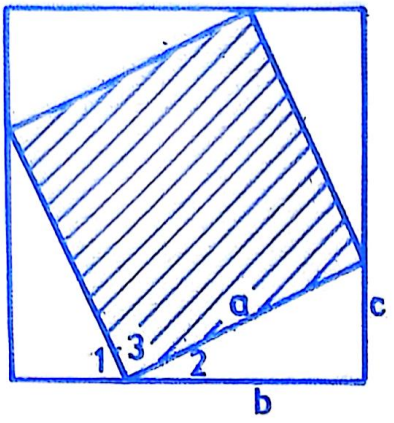


Fig. 61

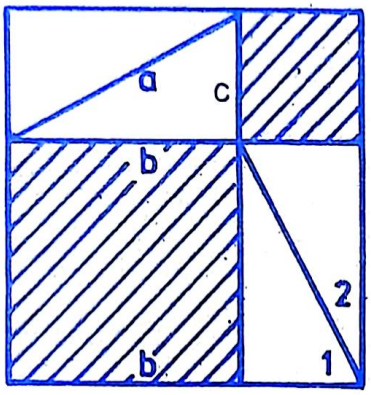


Fig. 62

10.4.5. a) Fie ABC un triunghi dreptunghic ($AB \perp AC$) și AD înălțimea lui. Se știe că triunghiurile ADB și ADC sînt asemenea cu ABC, deci raportul dintre ariile lor este egal cu pătratul raportului de asemănare. Fie $\mathcal{A}$ aria triunghiului ABC și $\mathcal{A}_1$ aria triunghiului ABD; raportul de asemănare este

$$\frac{AB}{BC}, \text{ deci } \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}} = \frac{AB^2}{BC^2}.$$

La fel se obține

$$\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}} = \frac{AC^2}{BC^2}$$

unde $\mathcal{A}_2$ este aria triunghiului ADC. Se adună aceste relații și se ține seamă că $\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$. Ce teoremă se obține? b) Se consideră un triunghi în care unghiul A este obtuz. Prin vîrful A se duc semidreptele AD și AE, $D, E \in BC$ unde unghiul $BAD \equiv$ unghiul C și unghiul $EAC \equiv$ unghiul B. Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ respectiv ariile triunghiurilor ABC, ABD și ACD. Proporțiile de mai sus rămîn valabile? Ce relație apare acum în locul relației $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$? Să se adune proporțiile și să se deducă o relație între pătratele laturilor triunghiului ABC. c) Aceeași chestiune dacă unghiul BAC este ascuțit (și mai mare decît unghiurile B și C).

10.4.6. Figura 67 reprezintă un triunghi dreptunghic ABC și pătratele construite pe catete și pe ipotenuza BC; $AH \perp BC$. Să se demonstreze că: a) $\triangle CEB \equiv \triangle FAB$; b) triunghiurile CEB și DEB sînt echivalente; c) de asemenea triunghiurile ABF și HBF; d) de asemenea pătratul $EBAD$ și dreptunghiul $FKHB$. e) Să se deducă de aici teorema lui Pitagora.

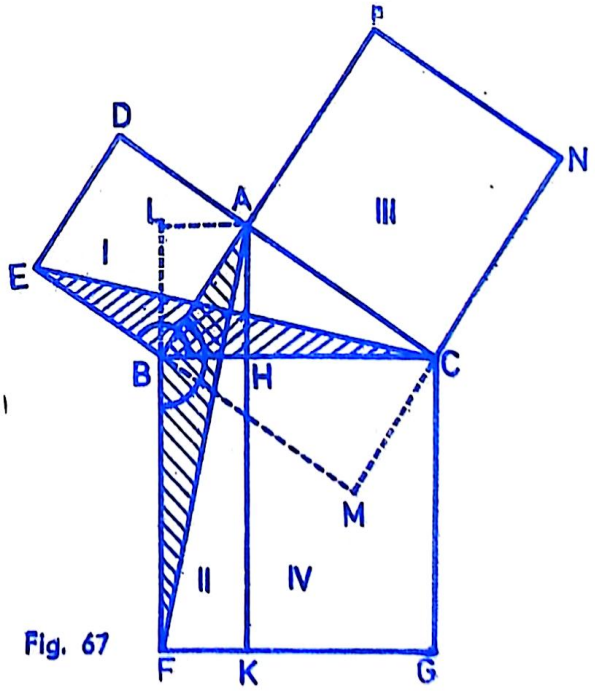


Fig. 67

10.4.7. Pentru a rezolva, de exemplu, ecuaţia $x^2 + 6x = 55$, putem proceda precum urmează (fig. 68). Pentru a reprezenta $x^2 + 6x$, pornim de la un pătrat $ABCD$ cu latura x; aria lui este x^2. Urmează să adăugăm $6x$. Pentru aceasta adăugăm cele două dreptunghiuri haşurate, care au dimensiunile $BE = DG = 3$ şi $BC = DC = x$; suma ariilor lor este $3x + 3x = 6x$. Poligonul $AEFCHG$ reprezintă suma $x^2 + 6x$; se dă că aria lui este 55.

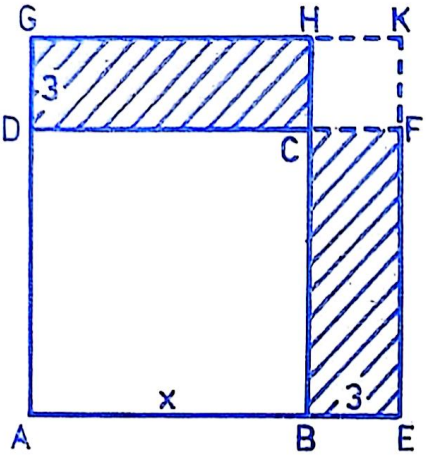


Fig. 68

Dacă la acest poligon adăugăm pătratul mic (punctat) $CFKH$, care are aria 9, obţinem pătratul mare $AEKG$; aria lui este $55 + 9 = 64$. Deci latura lui $AE = \sqrt{64} = 8$. Ecuaţia este rezolvată: $x = AB = AE - BE = 8 - 3 = 5$. a) Să se rezolve după acest model ecuaţia $x^2 + 8x = 48$. b) De asemenea ecuaţia $x^2 - 6x = 27$. c) Ce condiţii trebuie să îndeplinească coeficienţii ecuaţiei $ax^2 + bx + c = 0$ ca ecuaţia să poată fi rezolvată prin acest procedeu? Se află ambele rădăcini?

10.5. Transformări care păstrează aria

10.5.1. Să se demonstreze că, dacă baza unui triunghi este fixă şi vîrful opus se mişcă pe o paralelă la ea, aria triunghiului rămîne constantă.

10.5.2[1]. Să se transforme un patrulater dat într-un triunghi echivalent cu el, care să aibă o latură şi un unghi alăturat comune cu el. În cîte moduri se poate face transformarea? Să se examineze şi cazul cînd patrulaterul dat nu este convex.

10.5.3. a) Fie $ABCD$ un paralelogram. Printr-un punct M al diagonalei BD se duc paralelele la laturile sale şi se notează cu E, F, G şi H intersecţiile lor cu laturile paralelogramului $E \in AB$, $F \in BC$, $G \in CD$. Să se demonstreze că paralelogramele $AEMH$ şi $MFCG$, pe care nu le traversează diagonala, sînt echivalente b) Aplicaţie: Să se transforme un paralelogram dat într-un alt paralelogram a cărui bază să fie congruentă cu un segment dat.

10.5.4. Să se transforme un dreptunghi într-un pătrat echivalent cu el.

10.5.5. Să se transforme un triunghi într-un triunghi dreptunghic echivalent cu el care să aibă ca ipotenuză una dintre laturile triunghiului. În ce caz are problema o soluţie?

[1] Se presupune cunoscută propoziţia de la problema 10.5.1.

Capitolul 11

DREPTE ŞI PLANE ÎN SPAŢIU

11.1. Reprezentarea corpurilor. Primele noţiuni

11.1.1. Figura 1 reprezintă un paralelipiped* E, F şi G sînt puncte oarecare ale muchiilor respective. Care dintre perechile de drepte următoare sînt concurente, paralele, necoplanare (oarecare)?

a) EF şi DC; b) EF şi $A'B$; c) BD' şi DC'; d) AD' şi $A'D$; e) BD' şi DB'; f) EG şi $A'B'$; h) EG şi DC; i) $A'C$ şi AC'; j) $A'B$ şi AD. (Dreptele despre care este vorba se vor trasa cu creion negru şi se vor şterge după ce s-a găsit răspunsul.)

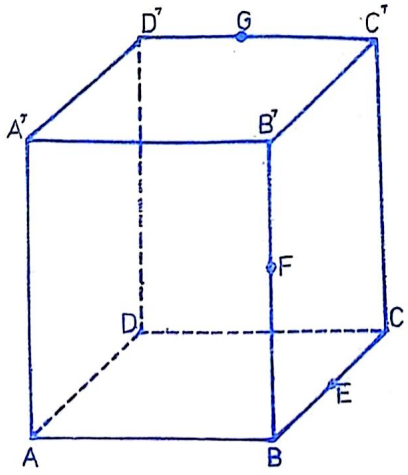


Fig. 1

* Se recomandă ca prisma şi paralelipipedul să fie prezentate, prin simple descrieri, la începutul anului, dacă acest lucru nu s-a făcut într-o clasă anterioară. Datorită acestor corpuri, dreptele şi planele de care se ocupă prima parte a Geometriei în spaţiu se concretizează.

11.1.2. Figura 2 reprezintă o prismă triunghiulară. D şi E sînt puncte oarecare ale muchiilor respective. Care dintre perechile de drepte următoare sînt concurente şi care nu? a) $A'D$ şi AC; b) $A'C$ şi BB'; c) $A'D$ şi BC; d) $A'D$ şi AB'; e) $A'D$ şi AC; f) BE şi $A'B'$; g) CE şi AB'; h) AE şi $A'C$; i) BE şi $A'B'$; j) BE şi AC.

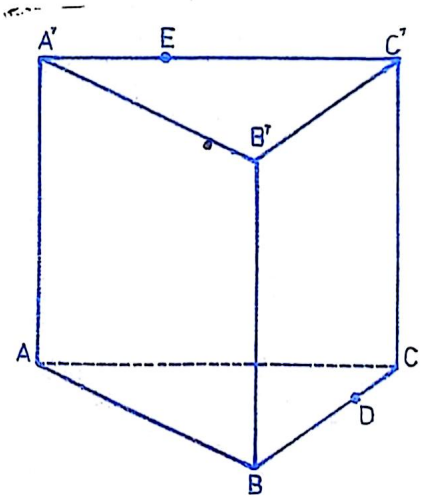


Fig. 2

11.1.3. Se consideră figura care reprezintă o prismă triunghiulară cu notaţiile din figura 2. a) Cîte drepte (segmente) conţine figura? b) Care din ele sînt în acelaşi plan cu dreapta AA' şi care nu? c) De asemenea cu dreapta AB?

11.1.4. Aceeaşi problemă dacă se duc şi diagonalele feţelor laterale.

11.1.5. Aceleaşi întrebări ca în problema 11.1.3 în legătură cu un paralelipiped (notaţiile din figura 1).

11.1.6. Aceeaşi problemă dacă se duc şi diagonalele tuturor feţelor paralelipipedului.

11.1.7. Se consideră o prismă care are ca bază un poligon $ABC...$ cu n laturi printre care nu se găsesc două paralele. a) Care dintre muchiile prismei sînt în acelaşi plan cu o muchie laterală, AA'? b) Cu o muchie a bazei, AB? Exemplu: $n = 6$.

11.1.8. Se consideră figura care reprezintă un paralelipiped, cu notaţiile din figura 1. Se duce diagonala $A'C$. a) Care drepte (segmente) din figură sînt acelaşi plan cu $A'C$. b) Aceeaşi întrebare dacă se duc diagonalele tuturor feţelor.

11.1.9. Se consideră un paralelipiped, cu notaţiile din figura 1. Să se găsească două muchii care să nu fie în acelaşi plan şi nici una din ele să nu fie în acelaşi plan: a) cu muchia AB; b) cu muchia AA'..

11.1.10. Figura 3 reprezintă un paralelipiped $AE \equiv DG$ şi $AF \equiv DH$. Dreptele FAG şi DEH sînt concurente?

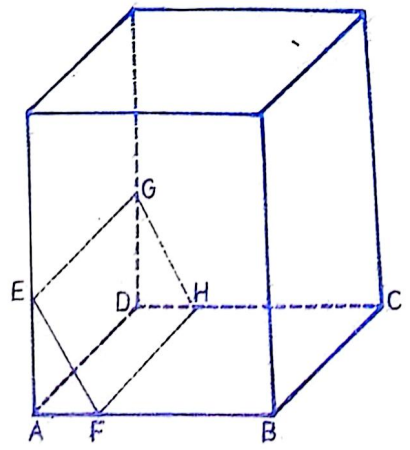


Fig. 3

11.1.11. Se consideră un paralelipiped, notaţiile fiind cele din figura 1. Să se determine pe figură intersecţia planelor: a) $ABC'D'$ şi $BCD'A'$; b) $ADC'B'$ şi $A'B'CD$.

11.1.12. Se consideră o prismă dreaptă care are ca bază un triunghi echilateral, notaţiile fiind cele din figura 2.

a) Să se reprezinte pe cîte o schiţă intersecţia ei cu planele ABC', BCA' şi CAB'. b) Intersecţiile sînt congruente? c) Se dă: $AB = 5$ cm, $AA' = 12$ cm. Se cere perimetrul secţiunii.

11.1.13. Se consideră un paralelipiped dreptunghic (fig. 4). a) Să se determine intersecţia planelor BDC' şi $B'D'C$. b) Fie MN partea din intersecţie situată în interiorul corpului. Se dă: $AB = 24$ cm, $BC = 7$ cm. Se cere lungimea MN.

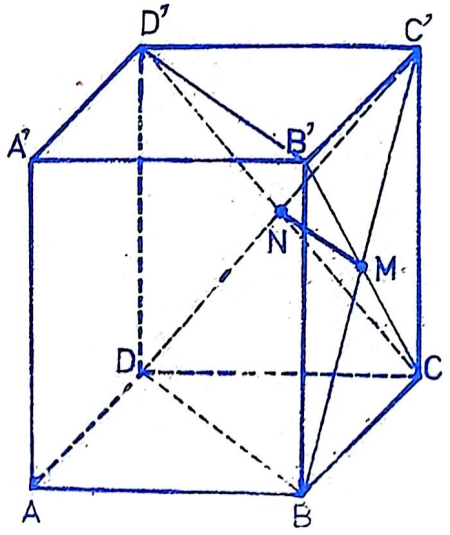


Fig. 4

11.1.14. Se consideră un paralelipiped dreptunghic, notaţiile fiind cele din figura 4. a) Să se determine intersecţia planelor ACD' şi DBC'. b) Fie OP partea din intersecţie situată în interiorul corpului. Se dă: $BC = 10$ cm, $CC' = 24$ cm. Se cere lungimea segmentului OP.

11.1.15. Se consideră o prismă triunghiulară (fig. 5). Pe fiecare dintre muchiile ei laterale se ia cîte un punct: $D \in AA'$, $E \in BB'$, $F \in CC'$. Fie P planul determinat de aceste puncte.

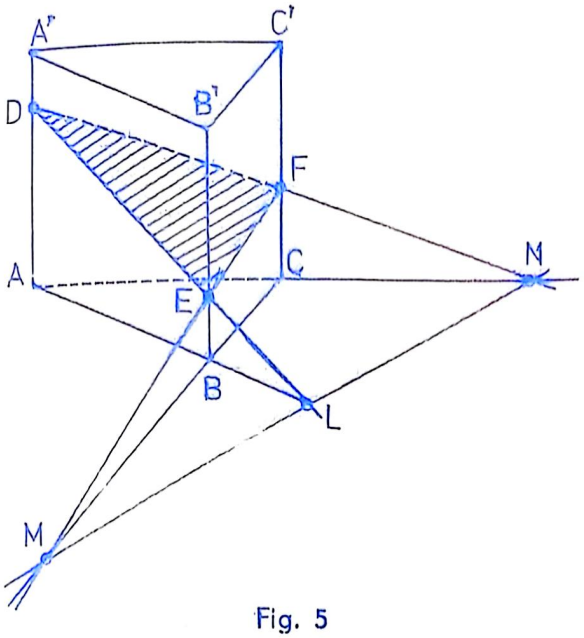


Fig. 5

Să se determine pe schiță intersecția planului P: a) cu planul ABC; b) cu planul $A'B'C'$.

11.1.16. Se consideră o prismă triunghiulară, notațiile fiind cele din figura 5. Pe muchiile AA', BB' și $B'C'$ se iau respectiv punctele D, E și F ($D \in AA'$, $E \in BB'$). Fie P planul determinat de aceste puncte. Să se determine intersecția planului P: a) cu prisma: b) cu planul bazei ABC.

11.2. Drepte și plane paralele

11.2.1. Se consideră o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$. Fie D, E și D' puncte ale muchiilor AB, AC și $A'B'$ ($D \in AB$, $E \in AC$). Ce formă are intersecția prismei cu planul P determinat de aceste puncte?

11.2.2. Se consideră o prismă triunghiulară, notațiile fiind cele din figura 5. Fie D, E și D' respectiv mijloacele muchiilor AB, BC și $A'B'$ ($D \in AB$, $E \in BC$). Prisma se taie cu planul P determinat de aceste puncte. Se dă: $AC = 8$ cm, $AA' = 15$ cm. Se cere perimetrul secțiunii.

11.2.3. Se consideră un paralelipiped, cu notațiile din figura 3; fie E un punct al muchiei AD. Ce formă are intersecția paralelipipedului cu planul P determinat de muchia BB' și punctul E?

11.2.4. Se consideră un paralelipiped dreptunghic, cu notațiile din figura 3. Se dă (în cm): $AB = 5$, $BC = 9$, $AA' = 12$. Să se afle perimetrul intersecției sale cu planul P determinat: a) de vîrfurile A', B și C; b) de vîrfurile A, B și C'.

11.2.5. Se consideră un paralelipiped cu notațiile din figura 3. Fie E și F două puncte ale muchiei AB, P planul determinat de muchia $A'D'$ și punctul E, și Q planul determinat de aceeași muchie și punctul F. a) Să se determine intersecțiile planelor P și Q cu planul bazei $ABCD$. b) Ce poziții au una față de cealaltă cele două intersecții?

11.2.6. Se consideră o prismă triunghiulară cu notațiile din figura 6. Fie D' și E' două puncte ale muchiei $A'C'$. Planul determinat de dreapta AB și punctul D' taie baza de sus $A'B'C'$ după o dreaptă $D'F'$ ($F' \in B'C'$) și planul determinat de dreapta AB și punctul E' o taie după o dreaptă $E'G'$ ($G' \in B'C'$). Ce fel de patrulater este $D'E'G'F'$?

11.2.7. Se consideră un paralelipiped cu notațiile din figura 3. În planul ABB' se duce o dreaptă EF, $E \in AA'$, $F \in BB'$ care nu este paralelă cu AB, și în planul ADD' se duce o dreaptă EG,

$G \in DD'$. Să se determine intersecția planului P determinat de aceste drepte cu prisma. Două cazuri: a) Paralela dusă prin F la EG taie muchia CC'; b) ea taie muchia $B'C'$.

11.2.8. Se consideră o prismă $ABCA'B'C'$ care are ca bază un triunghi echilateral. a) Să se determine intersecția prismei cu planul P determinat de muchia AA' și mijlocul D al muchiei BC și cu planul Q determinat de muchia CC' și mijlocul E al muchiei AB. b) Să se determine intersecția planelor P și Q. c) Fie $P \cap Q = d$. Ce poziție are dreapta d față de AA'? d) Să se compare lungimea părții din d situată în interiorul prismei cu lungimea AA'.

11.2.9[1]. Se consideră o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$. Pe muchiile $A'B'$, $B'C'$ și BB' se iau respectiv punctele D, E și F ($D \in A'B'$, $E \in B'C'$). Fie P planul determinat de aceste puncte. a) Să se determine pe schiță intersecția planului P cu planul ABC. b) Ce poziție are această intersecție față de dreapta DE? c) Să se deducă din figura obținută o propoziție de geometrie plană.

11.2.10. Se consideră un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$. Fie E, F, G și H respectiv mijloacele muchiilor AD, AB, $B'C'$ și $C'D'$. a) Ce poziție au una față de cealaltă dreptele EF și GH? b) Să se determine pe figură intersecția planelor EFG și ACC'.

11.2.11. Se consideră un paralelipiped cu notațiile din figura 3. a) Pe muchiile $A'B'$ și $D'C'$ se iau punctele E și F ($E \in A'B'$, $F \in D'C'$), $A'E \equiv D'F$, și pe muchiile BB' și CC' se iau punctele G și H ($G \in BB'$, $H \in CC'$), $BG \equiv CH$. Ce poziție are dreapta GH față de EF? b) Fie K și L mijloacele muchiilor AA' și AB. Ce poziție are dreapta KL față de $D'C$?

11.2.12. Care dintre propozițiile următoare sînt adevărate și care sînt false? Literele mici d, e, f reprezintă drepte și literele mari P, Q, R plane. a) Dacă $d \parallel e$ și $e \parallel f$, $d \parallel f$. b) Dacă $P \parallel Q$ și $Q \parallel R$, $P \parallel R$. c) Dacă $d \parallel P$ și $e \parallel P$, $d \parallel e$. d) Dacă $d \parallel P$ și $P \parallel Q$, $d \parallel Q$. e) Dacă $P \parallel d$ și $Q \parallel d$, $P \parallel Q$. f) Dacă $d \parallel e$ și $e \subset P$, $d \parallel P$. g) Dacă $d \parallel P$ și $e \subset P$, $d \parallel e$.

11.3. Dreaptă perpendiculară pe un plan

11.3.1. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$. $BC \perp$ planul ABB' și $A'B \subset$ planul ABB', deci $BC \perp A'B$ sau $A'B \perp BC$. Tot așa, $AD \perp$ planul ABB' și $A'B \subset ABB'$, deci $AD \perp A'B$ sau $A'B \perp AD$. Deci dreapta $A'B$ este perpendiculară pe două drepte din planul bazei, BC și AD. Rezultă că $A'D \perp$ planul bazei — ceea ce nu este adevărat. Unde e greșeala?

11.3.2. Se consideră o prismă triunghiulară dreaptă (muchia laterală $\perp$ planul bazei) $ABCA'B'C'$. Fie M, N și P mijloacele laturilor bazei, $M \in BC$, $N \in AC$, $P \in AB$. Cîte grade are unghiul format de muchia AA' cu dreptele BC, AM, BN, CP, MN, NP, PM?

[1] Se va rezola mai întîi problema 11.1.15.

11.3.3. Fie xOy un unghi. O dreaptă Oz este perpendiculară pe Ox și Oy. Să se aleagă un punct A pe Ox și un punct B pe Oy astfel încît unghiul format de Oz cu AB să fie maxim (minim).

11.3.4. Fie ABC un triunghi oarecare. Să se ducă prin vîrful A o dreaptă care să fie perpendiculară pe AB și BC și să formeze cu AC un unghi de 60°.

11.3.5. Se duc diagonalele tuturor fețelor unui paralelipiped dreptunghic. Se obține o figură formată din 20 de drepte. Fie AA' o muchie a prismei. Care sînt toate dreptele din figură perpendiculare pe AA'? De asemenea cele perpendiculare pe muchia AB.

11.3.6. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$. a) $AC \perp BD'$? b) $AC \perp DB'$? c) $BD \perp AC'$? d) $BD \perp CA'$? e) Răspunsurile rămîn valabile în cazul oricărui paralelipiped drept care are ca bază un pătrat? f) Dar în cazul unui paralelipiped dreptunghic oarecare?

11.3.7.[1] Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$. Să se compare distanțele: a) de la vîrful B' la muchiile AD și CD; b) de la vîrful A' la muchiile BC și DC; ș.a.m.d. c) Răspunsurile sînt valabile în orice prismă dreaptă cu bază pătrată?

11.3.8. Într-un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, se dă $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Să se afle distanța[1] dintre dreptele următoare: a) AA' și CC'; b) AA' și $B'C'$; c) AA' și $C'D'$; d) AA' și BC'; e) AA' și $B'C$; f) AA' și $D'C$; g) AA' și DC'.

[1] Prin distanța dintre două drepte se înțelege lungimea perpendicularei lor comune.

11.3.9. Se consideră o prismă dreaptă $ABCA'B'C'$ care are ca bază un triunghi echilateral și muchiile laterale congruente cu latura bazei; fie a muchia ei. Să se afle distanța[1] dintre dreptele: a) $A'C'$ și AB; b) $A'B'$ și CC'; c*) AA' și BC'.

11.3.10. Să se spună despre fiecare dintre propozițiile următoare dacă e adevărată sau nu. Literele d, e și f reprezintă drepte și P, Q și R plane.
a) Dacă $d \perp f$ și $e \perp f$, $d \parallel e$. b) Dacă $d \perp f$ și $e \parallel d$, $e \perp f$. c) Dacă $d \perp P$ și $e \perp P$, $d \parallel e$. d) Dacă $P \perp d$ și $Q \perp d$, $P \parallel Q$. e) Dacă $P \perp d$ și $Q \parallel P$, $Q \perp d$. (Nu se cer demonstrații.)

11.4. Teorema celor trei perpendiculare

11.4.1. În centrul O al unui dreptunghi se ridică perpendiculara pe planul dreptunghiului și se poartă pe ea un segment OM de 12 cm. Laturile dreptunghiului sînt de 10 cm și 18 cm. Se cer distanțele de la punctul M la laturile dreptunghiului.

11.4.2. Fie $ABCD$ un pătrat. În vîrful D se ridică perpendiculara pe planul pătratului și se poartă pe ea un segment DE congruent cu AB. Se dă $AB = a$ și se cere distanța de la punctul E: a) la laturile AB și BC; b) la diagonala AC.

11.4.3. Fie ABC un triunghi echilateral. În vîrful A se ridică perpendioulara pe planul triunghiului și se poartă pe ea un segment AD congruent cu AB. Se dă $AB = a$ și se cere distanța de la punctul D la latura BC.

11.4.4. Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel ($AB \perp AC$). În vîrful A se ridică perpendiculara pe planul triunghiului și se poartă pe ea un segment AD congruent cu AB. a) Ce fel de triunghi este DBC? Să se demonstreze că distanța de la punctul D la dreapta BC, distanța de la punctul B la dreapta DC și distanța de la punctul C la dreapta BD sînt egale.

11.4.5. Fie ABC un triunghi în care $BC = 15$ cm. Pe perpendiculara ridicată în A pe planul triunghiului se poartă un segment AD de 24 cm. Distanța de la punctul D la dreapta BC este de 26 cm. Se cere aria triunghiului ABC.

11.4.6. Se consideră un triunghi ABC. Latura BC se găsește într-un plan P; fie A' piciorul perpendicularei coborîte din A pe planul P. Pe ce linie se mișcă punctul A' cînd triunghiul se rotește în jurul dreptei BC? Caz particular: $AB \equiv AC$.

11.4.7. Figura 14 reprezintă o carte cartonată, M este un punct oarecare al copertei și M' este piciorul perpendicularei coborîtă din M pe cealaltă parte a copertei. Pe ce linie se mișcă punctul M' cînd deschidem cartea?

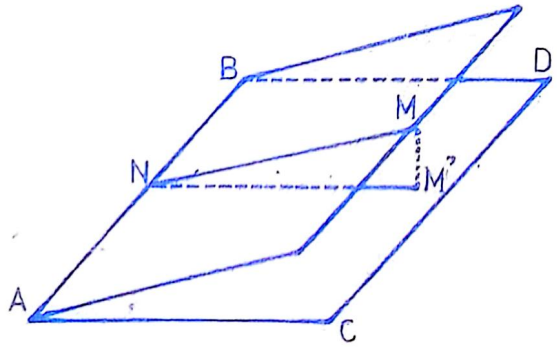


Fig. 14

11.5. Unghi format de o dreaptă cu un plan

11.5.1. Într-un punct O al unui plan P se ridică perpendiculara pe plan și se poartă pe ea un segment OA de lungime dată a. Prin punctul O se duce în plan o dreaptă și se poartă pe ea un segment OM. Să se afle unghiul format de dreapta AM cu planul P dacă: a) OM a; b) $OM = \frac{AM}{2}$. c) Prin punctul O se mai duce în planul P o dreaptă și poartă pe ea un segment ON. Ce relație trebuie să existe între OM și ON ca dreptele AM și AN să formeze cu planul P unghiuri congruente?

11.5.2. Fie ABC un triunghi echilateral. În mijlocul D al laturii BC se ridică perpendiculara pe planul triunghiului și se poartă pe ea un segment DE congruent cu AD. Se cer unghiurile pe care le formează dreptele EA, EB și EC cu planul triunghiului.

11.5.3. În centrul O al unui poligon regulat $ABCD...$ se ridică perpendiculara pe planul poligonului; fie M un punct al ei. Să se compare între ele: a) unghiurile pe care le formează dreptele MA, MB, MC, ... cu planul poligonului; b) lungimile segmentelor MA, MB, MC,....

11.5.4. Fie AOB un unghi și C mijlocul segmentului AB. În punctul C se ridică perpendiculara pe planul unghiului și se ia pe ea un punct oarecare M. Să se compare unghiurile pe care le formează dreptele MA și MB cu planul unghiului.

11.5.5. Fie xOy un unghi. Într-un punct A al bisectoarei sale se ridică

perpendiculara pe planul unghiului și dintr-un punct oarecare M al ei se coboară perpendicularele MB și MC pe Ox și Oy $B \in Ox$, $C \in Oy$. Să se compare unghiurile pe care le formează dreptele MB și MC cu planul unghiului și MB cu MC.

11.5.6. În figura 19, ABC reprezintă un triunghi echilateral, vîrful A se află într-un plan P și laturile AB și AC fac cu planul P unghiuri de cîte 45°. Să se demonstreze că: a) Dreapta BC este paralelă cu planul P; b) proiecția triunghiului ABC pe planul P este un triunghi dreptunghic.

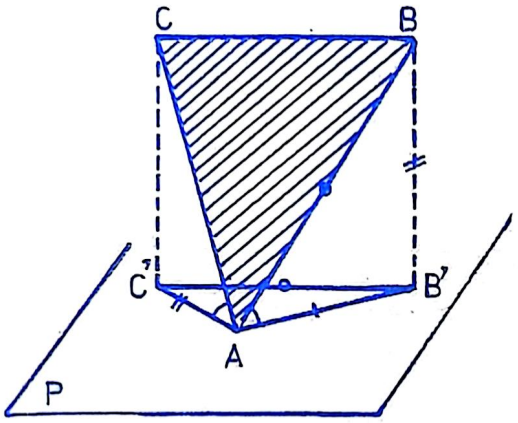


Fig. 19

11.5.7. a) Fie AOB un unghi drept și P un plan care conține latura OA. Cîte grade are proiecția unghiului pe planul P? b) Fie M un punct oarecare al laturii OB și M' proiecția lui pe planul P. Pe ce linie se mișcă punctul M' cînd unghiul se rotește în jurul laturii OA?

11.6. Unghiuri diedre

11.6.1. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$. Să se afle unghiul format de planul $DBB'D'$: a) cu planul $ADD'A'$; b) cu planul $ACC'A'$.

11.6.2. Fie $ABCD$ un pătrat. Latura AB este conținută într-un plan P și planul pătratului face cu planul P un unghi de 45°. Se cer unghiurile pe care le formează diagonalele pătratului cu planul P.

11.6.3 Fie $ABCD$ o foaie de hîrtie în formă de dreptunghi și MN dreapta care unește mijloacele laturilor AB și CD. Partea $MBCN$ se rotește în jurul dreptei MN astfel încît proiecția dreptei BC pe planul $AMND$ să treacă prin centrul dreptunghiului $AMND$. Cîte grade are unghiul diedru care se formează astfel?

11.6.4. a) Un pătrat $ABCD$ se îndoaie după diagonala AC astfel încît planul DAC să fie perpendicular pe planul ABC. Să se demonstreze că triunghiul DAB este echilateral. b) Pătratul se îndoaie astfel încît unghiul format de planele DAC și BAC să aibă 60°. Se cere distanța BD.

11.6.5*. Fie ABC un triunghi dreptunghic și isoscel. Ipotenuza BC se află într-un plan P și planul triunghiului face cu planul P un unghi de 45°. Să se afle unghiurile pe care le formează catetele AB și AC cu planul P.

11.6.6*. Fie ABC un triunghi dreptunghic și isoscel. Vîrful A se găsește într-un plan P, iar catetele AB și AC formează cu planul P unghiuri congruente ($= u$). Fie B' și C' proiecțiile vîrfurilor B și C pe planul P. a) Să se demonstreze că $B'C' \parallel BC$. b) Care este valoarea maximă pe care o poate avea unghiul u format de catetele AB și AC cu planul P. c) Să se demonstreze că unghiul $C'AB'$ nu poate fi ascuțit.

d) Să se afle unghiul diedru format de planul triunghiului cu planul P cînd $u = 30°$.

11.6.7. Aceeaşi problemă dacă triunghiul ABC este echilateral. Punctul c) se va înlocui cu: unghiul $C'AB'$ are cel puţin $60°$.

11.6.8. Fie $ABCD$ un pătrat. Vîrful A se găseşte într-un plan P şi laturile AB şi AD formează cu planul P unghiuri congruente. Se notează cu B', C' şi D' proiecţiile vîrfurilor B, C şi D pe planul P. a) Ce poziţie are diagonala BD faţă de planul P? b) Ce fel de patrulater este $AB'C'D'$? c) $AB = a$ şi $\widehat{BAB'} = 30°$. Să se afle diagonala AC'. d) Să se afle unghiul format de planul pătratului cu planul P.

Capitolul 12

POLIEDRE

12.1. Prisma

12.1.1. a) Pentru a forma scheletul unei prisme triunghiulare, avem nevoie de 9 vergele. Ce relaţie trebuie să existe între lungimile lor? b) Aceeaşi problemă în cazul unui paralelipiped.

12.1.2. a) Avem scheletul unei prisme triunghiulare articulat (fiecare dintre vergelele care-l compun se poate roti în jurul capetelor sale). Îl putem deforma astfel încît să obţinem scheletul unei prisme drepte? b) În cazul unui paralelipiped oarecare, se poate obţine un paralelipiped dreptunghic?

12.1.3. Să se explice următoarele contradicţii aparente: a) Prin fiecare vîrf al unui paralelipiped trec 3 muchii. Cum paralelipipedul are 8 vîrfuri, ar urma să aibă $8 \cdot 3$, adică 24 de muchii. Dar el are numai 12 muchii. b) Prin fiecare vîrf trec 3 feţe, deci în total $8 \cdot 3$, adică 24 de feţe. Dar paralelipipedul are numai 6 feţe. c) Prin fiecare muchie trec două feţe, deci prin cele 12 muchii trec $12 \cdot 2$, adică 24 de feţe. Dar paralelipipedul are numai 6 feţe. d) Fiecare faţă conţine 4 muchii, deci cele 6 feţe conţin $4 \cdot 6$, adică 24 de muchii. Dar corpul are numai 12 muchii.

12.1.4. Se consideră un paralelipiped $ABCDA'B'C'D'$. Două muchii se numesc *opuse* cînd sînt paralele şi nu sînt situate în aceeaşi faţă a paralelipipedului. Exemple: AB şi $D'C'$, AA' şi CC'. Un *plan diagonal* al paralelipipedului este un plan care conţine două muchii opuse. Exemplu: Planul $ABC'D'$; el conţine muchiile opuse AB şi $C'D'$. Două *vîrfuri opuse* sînt două vîrfuri care nu aparţin aceleiaşi feţe. Exemplu: B şi D'. Segmentul care uneşte două vîrfuri opuse este o *diagonală* a paralelipipedului. a) Să se întocmească lista tuturor perechilor de muchii opuse. b) Să se întocmească lista tuturor planelor diagonale. Fiecare plan diagonal se va nota cu 4 litere, corespunzătoare celor patru colţuri pe care le conţine. Cum se face că această listă are acelaşi număr de obiecte cu prisma? c) Să se întocmească lista tuturor diagonalelor paralelipipedului. d) Să se determine intersecţia planelor diagonale: $ABC'D'$ şi $BCD'A'$, $BCD'A'$ şi $CDA'B'$, $BCD'A'$ şi $DAB'C'$ ş.a.m.d. Ce linie importantă este intersecţia a două plane diagonale? e) Care plane diagonale conţin diagonala BD'? diagonala AC'? (Se va desena un singur paralelipiped cu pastă sau cu culoare roşie. Diferitele linii se vor trage cu creionul şi se vor şterge după ce se va găsi răspunsul. Astfel acelaşi desen va servi pentru toată problema).

12.1.5. Se consideră cele 12 diagonale ale feţelor unui paralelipiped. a) Cîte din ele sînt congruente? b) Se poate ca numai trei diagonale să fie congruente? c) Ce prismă particulară este paralelipipedul dreptunghic în care două diagonale ale unor feţe care nu sînt opuse sînt congruente? d) Aceeaşi întrebare dacă trei diagonale luate cîte una din trei feţe printre care nu se găsesc două feţe opuse sînt congruente.

12.1.6. a) Cîte feţe laterale ale unui paralelipiped pot fi dreptunghiuri? b) Să se demonstreze că, dacă toate feţele unui paralelipiped sînt dreptunghiuri, paralelipipedul este dreptunghic.

12.1.7. Ce fel de paralelipiped particular este cel în care diagonalele tuturor feţelor sînt congruente?

12.1.8. Se consideră două feţe opuse ale unui paralelipiped. a) Ce poziţie au diagonalele uneia faţă de diagonalele celeilalte? b) Fie M şi N centrele a două feţe opuse. Ce poziţie are dreapta MN faţă de muchiile paralelipipedului?

12.1.9. Să se demonstreze că diagonalele unui paralelipiped sînt concurente. În ce raport se împart două diagonale?

12.1.10. Se consideră un cub. a) Să se demonstreze că toate diagonalele sale sînt congruente. Să se afle: b) unghiul ascuţit format de două diagonale; c) unghiul format de o diagonală cu planul bazei; d) unghiul format de diagonala unei feţe cu laturile feţei opuse.

12.1.11. a) Cîte diagonale are o prismă care are ca bază un patrulater? un pentagon? un poligon cu n laturi? b) Cîte diagonale de lungimi diferite are o prismă regulată hexagonală? c*) care are ca bază un poligon regulat cu n laturi?

12.1.12. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă, M centrul feţei BCC', N centrul feţei CAA' şi P centrul feţei ABB'. a) Să se compare laturile triunghiului MNP cu laturile bazei. b*) Să se demonstreze că dreptele AM, BN şi CP sînt concurente.

12.1.13. Fie M, N, P şi Q centrele feţelor laterale ale unui paralelipiped. a) Ce fel de patrulater este $MNPQ$? b) Să se compare laturile sale cu diagonalele bazei paralelipipedului.

12.1.14. O prismă oarecare se taie cu două plane paralele care taie toate muchiile ei laterale. Să se compare cele două intersecţii.

12.1.15. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Fie Q planul determinat de dreapta BB' şi punctul D. Prin mijlocul E al muchiei BC se duce un plan P paralel cu Q. Se dă (în cm): $AB = 14$, $BC = 48$, $AA' = 10$. Se cere aria intersecţiei planului P cu paralelipipedul.

12.1.16. Se consideră o prismă triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$. Fie D mijlocul muchiei AB şi E mijlocul muchiei BC. Prin dreapta DE se duce un plan P paralel cu faţa $ACC'A'$. a) Ce formă are intersecţia planului P cu prisma? b) Să se afle raportul dintre aria ei şi aria feţei $ACC'A'$.

12.1.17. Se consideră un cub (fig. 11). Pe muchiile AB, BC și AA' se iau respectiv punctele M, N și P, unde $AM = BN = AP = a$ și $MB = NC = PC' = b$. Prin punctul M se duce un plan paralel cu fața din dreapta, prin punctul N un plan paralel cu fața anterioară și prin punctul P un plan paralel cu baza cubului. Să se afle volumele părților în care se descompune cubul, să se adune aceste volume și să se compare rezultatul cu dezvoltarea lui $(a + b)^3$.

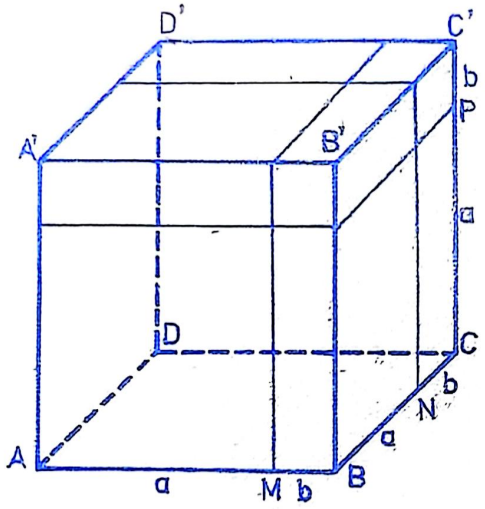


Fig. 11

12.1.18. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Fie M un punct al muchiei AA'. Paralelipipedul se taie cu planul P determinat de muchia BC și punctul M. a) Ce formă are intersecția? b) Cum variază[1] aria ei cînd punctul M descrie muchia AA' de la A la A'? Fie $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Să se afle valorile extreme ale ariei.

12.1.19. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată în care toate muchiile sînt congruente ($= a$). Prisma se taie cu planul determinat de muchia AB și un punct M al muchiei CC'. a) Ce formă are intersecția? b) Cum variază aria triunghiului MAB cînd punctul M descrie muchia CC' de la C la C'? Care sînt valorile ei extreme? c) Aceleași întrebări cu privire la unghiul AMB.

12.1.20. Aceeași problemă dacă triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, $CA = CB = CC' = a$ și prisma se taie cu planul determinat de muchia AB și un punct M al muchiei CC'.

12.1.21. Un paralelipiped drept are ca bază un paralelogram care nu este dreptunghi. Să se ducă printr-o muchie a bazei sale un plan P care să taie paralelipipedul după un dreptunghi.

12.1.22*. Figura 16 reprezintă un paralelipiped și M, M', N, N', P și P' sînt mijloacele muchiilor. a) Să se demonstreze că dreptele MM', NN' și PP' sînt concurente. b) Să se găsească alte trei drepte, analoage cu ele, care trec prin intersecția lor.

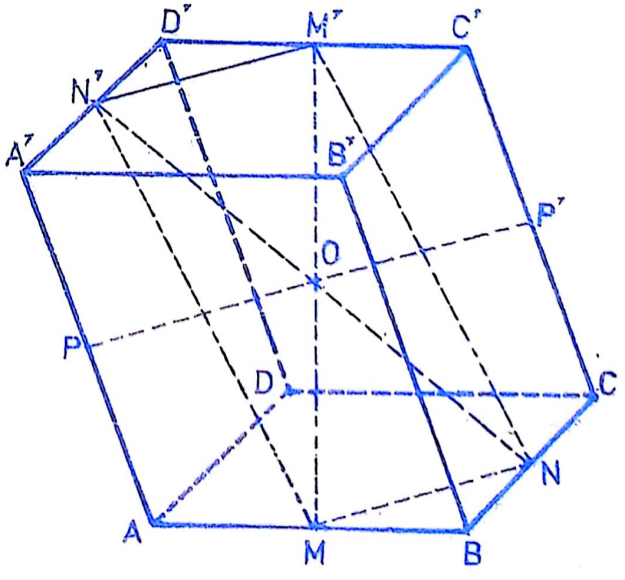


Fig. 16

[1] Dacă crește sau scade.

12.1.23. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Pe muchiile AD și AB se poartă două segmente congruente AE și AF. Fie G un punct al muchiei AA'. a) Ce fel de triunghi este EFG? Să se determine punctul G astfel încît acest triunghi să fie: b) echilateral; c) dreptunghic.

12.1.24. Aceeași problemă în cazul unei prisme triunghiulare regulate.

12.1.25. Se consideră o prismă triunghiulară regulată, $ABCA'B'C'$. Fie d intersecția planelor $C'AB$ și $A'BC$. Se dă $AB = AA' = a$ și se cere lungimea părții din d situată în interiorul prismei.

12.1.26. Se consideră o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$. Fie P planul determinat de muchia AA' și mijlocul E al muchiei $B'C'$, Q planul determinat de muchia AB cu mijlocul F al muchiei CC' și $P \cap Q = d$. Se dă $AB = AA' = a$ și se cere lungimea părții din d situată în interiorul prismei.

12.1.27. Se consideră o prismă $ABCA'B'C'$ care are ca bază un triunghi echilateral. Fie O și O' centrele bazelor, D mijlocul muchiei AA' și M intersecția dreptei OO' cu planul P determinat de dreapta BC și punctul D. $AB = AA' = a$. Se cere segmentul OM.

12.1.28. Se consideră un paralelipiped dreptunghic, $ABCDA'B'C'D'$. Fie O și O' centrele celor două baze și P mijlocul segmentului OO'. Se dă: $AB = a$, $AC = b$, $AA' = c$. Să se afle distanța de la punctul P: a) la toate fețele corpului, b) la toate muchiile sale.

12.1.29. Se consideră un cub. Să se demonstreze că distanța de la un vîrf la centrul unei fețe care nu-l conține este aceeași oricare ar fi vîrful și fața considerate.

12.1.30. Într-o prismă triunghiulară, muchia opusă unui vîrf este muchia care nu face parte din aceeași față cu el; de exemplu, notațiile fiind cele din figura 24, muchia opusă vîrfului A' este BC. a) Să se arate care sînt muchiile opuse celor 6 vîrfuri ale prismei. b) Să se demonstreze că, dacă prisma este regulată, distanța de la un vîrf la muchia opusă este egală cu distanța de la orice alt vîrf la muchia opusă lui.

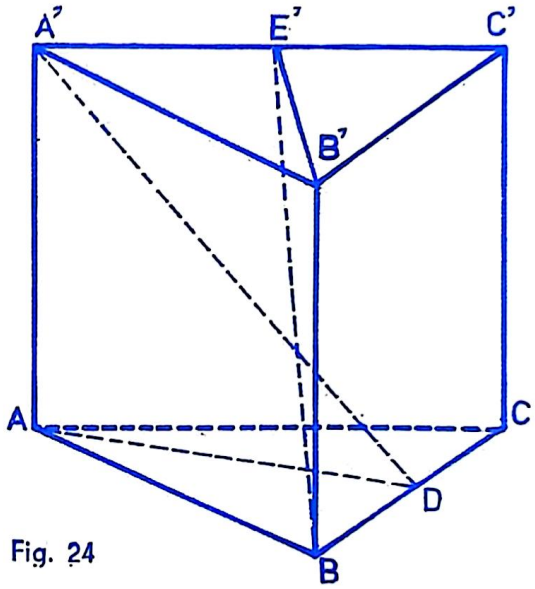


Fig. 24

12.1.31. Se consideră o prismă triunghiulară regulată în care toate muchiile sînt congruente. Să se compare muchia prismei cu segmentul care unește un vîrf cu centrul fetei opuse.

12.1.32. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Să se demonstreze că, dintre toate segmentele care unesc un punct al dreptei AA' cu un punct al dreptei BC, AB este cel mai scurt.

12.1.33. Se consideră un cub, notațiile fiind cele din figura 11. Fie E și F mijloacele muchiilor AB și AD ($E \in AB$), $AB = a$. Se cere distanța de la vîrful C': a) la diagonala BD; b) la dreapta EF.

12.1.34. Se consideră o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care $AB = AA' = a$. Să se calculeze distanțele următoare: a) de la vîrful A' la muchia BC; b) de la vîrful B' la linia mijlocie a bazei care este paralelă cu AC; c*) de la centrul P al feței $BCC'B'$ la latura AB.

12.1.35. Un corp în formă de paralelepiped dreptunghic cu dimensiunile a, b și c făcut dintr-un material cu greutatea specifică d ($d < 1$) este pus în apă astfel ca fața cu dimensiunile a și b să fie orizontală. Ce înălțime are partea care rămîne deasupra apei?

12.1.36. Un bidon în formă de cub este plin cu apă. Îl aplecăm rotindu-l în jurul unei muchii cu un unghi dat u. Muchia cubului este a. Ce cantitate de apă se varsă? Se vor deosebi două cazuri: $u \leqslant 45°$ și $u > 45°$.

12.1.37. Aceeași problemă cînd bidonul are forma de paralelepiped dreptunghic, dimensiunile lui fiind $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$.

Problemele 12.1.38 — 12.1.40 se referă la prismă. În fiecare din ele se cere: a) să se afle volumul prismei și unghiul format de o muchie laterală cu planul bazei; b) să se afle unghiurile fețelor laterale și să se deseneze desfășurarea prismei (confecționare din carton); c) să se afle unghiurile formate de fețele laterale cu planul bazei; d*) de asemenea unghiurile formate de cîte două fețe laterale.

12.1.38. Se consideră o prismă $ABCDA'B'C'D'$ care are ca bază un pătrat și în care proiecția muchiei $B'C'$ pe planul bazei este muchia AD. $AB = a$, $AA' = 2a$. Nu se cere punctul d).

12.1.39. Se consideră o prismă $ABCDA'B'C'D'$ care are ca bază un pătrat și în care proiecția vîrfului A' pe planul bazei este vîrful C. Se dă: $AB = a$, $AA' = 2a$.

12.1.40*. O prismă are ca bază un triunghi echilateral și una dintre fețele sale laterale este un romb cu un unghi de 60° și este perpendiculară pe planul bazei. Lungimea muchiilor este a. Nu se cere punctul d).

12.2. Piramida

12.2.1. Fie $VABC$ o piramidă triunghiulară oarecare și VM, VN, VP înălțimile fețelor laterale. În planul bazei se ridică în punctele M, N și P perpendicularele pe laturile bazei. Să se demonstreze că aceste perpendiculare sînt concurente.

12.2.2. Ce însușiri trebuie să aibă un poligon ca să poată fi baza unei piramide în care toate muchiile laterale sînt congruente?

12.2.3. O piramidă $VABC$ are ca bază un triunghi echilateral ABC și muchia VA este perpendiculară pe planul bazei. $VA = AB = a$. Fie D și E mijloacele muchiilor VB și VC. Piramida se taie: a) cu planul P care trece prin dreapta DE și este paralel cu baza piramidei; b) cu planul Q determinat de dreapta DE și punctul A; c) cu planul R care trece prin

dreapta DE și este paralel cu VA. Se cer ariile intersecțiilor.

12.2.4. Se consideră o piramidă patrulateră regulată $VABCD$. Printr-un punct oarecare E al muchiei VB se duce un plan P paralel cu fața VAD. a) Ce formă are intersecția planului P cu piramida? b) Fie $VA = AB = a$. Să se compare perimetrul patrulaterului $EFGH$ cu perimetrul triunghiului VAD. c) Cînd punctul E descrie muchia VB de la V spre B, perimetrul patrulaterului crește sau scade? Care sînt valorile sale extreme?

12.2.5. Se consideră o piramidă triunghiulară $VABC$. Două muchii ale ei se numesc opuse cînd nu sînt în același plan. a) Care sînt perechile de muchii opuse? b) Să se demonstreze că: b) mijloacele a două perechi de muchii opuse sînt vîrfurile unui paralelogram; c) suma perimetrelor acestor paralelograme este egală cu suma muchiilor piramidei; d*) dreptele care unesc mijloacele a cîte două muchii opuse sînt concurente.

12.2.6. Să se demonstreze că, într-o piramidă triunghiulară regulată, oricare două muchii opuse (care nu sînt în același plan) sînt perpendiculare.

12.2.7*. Fie a, b, c, d, e și f șase segmente. Ce relații trebuie să existe între ele ca să existe un tetraedru cu muchiile congruente cu ele?

12.2.8. Să se afle: a) aria totală; b) volumul unui tetraedru regulat cu muchia a.

12.2.9[1]. Centrele celor patru fețe ale unui tetraedru regulat sînt vîrfurile unui alt tetraedru. Să se afle raportul dintre: a) ariile totale; b) volumele celor două tetraedre.

12.2.10. Unind centrul unui cub cu toate vîrfurile sale, apar șase piramide care au ca bază cîte o față a cubului și vîrful în centrul lui. Aceste piramide au același volum, deci volumul fiecăreia este $\frac{a^3}{6}$. Să se calculeze același volum cu ajutorul formulei care dă volumul piramidei. Se obține astfel o verificare a acestei formule pentru un caz particular (care?).

12.2.11. Centrul fiecărei fețe a unui cub se unește cu centrele celorlalte fețe ale cubului, dar nu cu centrul fetei opuse. Apare schița unui corp format din două piramide pătrate care au aceeași bază și sînt situate de o parte și de alta a ei, numit *octaedru regulat*. Fie a lungimea muchiei cubului. Să se calculeze: a) muchiile octaedrului; b) unghiul format de cîte două muchii care au un vîrf comun; c) raportul dintre volumul octaedrului și volumul cubului.

În problemele 12.2.12—12.2.18 este vorba de piramide. În fiecare din ele se cere să se afle: a) muchiile laterale; b) volumul piramidei; c) unghiurile formate de muchiile laterale cu planul bazei; d) unghiurile de la bază ale fețelor laterale; se va desena desfășurarea piramidei (confecționare din carton); e) unghiurile formate de fețele laterale cu planul bazei.

12.2.12. Se consideră o piramidă care are ca bază un triunghi dreptunghic isoscel ABC ($AB \perp AC$) și în care piciorul înălțimii este punctul A. $AB = AC = VA = a$. f*) Se va afla și distanța de la vîrful A la planul VBC.

[1] Se va rezolva întîi problema precedentă.

12.2.13. Se consideră o piramidă în care baza este un triunghi echilateral, înălțimea este congruentă cu laturile bazei și piciorul ei este un vîrf al triunghiului de la bază. Latura bazei = a.

12.2.14. Se consideră o piramidă pătrată în care înălțimea cade într-un vîrf al bazei și este congruentă cu latura pătratului (= a).

12.2.15. Se consideră o piramidă pătrată în care toate muchiile sînt congruente (= a). f) Se vor calcula și unghiurile formate din cîte două fețe laterale.

12.2.16. Se consideră o piramidă pătrată în care una dintre fețele laterale este un triunghi echilateral și planul ei este perpendicular pe planul bazei. Se dă latura bazei (= a).

12.2.17. Se consideră o piramidă care are ca bază un triunghi dreptunghic isoscel și a cărei înălțime, congruentă cu o catetă a bazei (= a), cade în vîrful unui unghi ascuțit al bazei.

12.2.18. Se consideră o piramidă care are ca bază un triunghi echilateral și una dintre fețele ei laterale este un triunghi echilateral și este perpendiculară pe planul bazei. Latura bazei este a. f) Nu se cere punctul e, în schimb se va afla unghiul diedru format de planele VBA și VBC.

12.2.19. Suprafața laterală a unei piramide $VABCD...$ este formată din mai multe triunghiuri AVB, BVC, CVD, ... Cît de mare poate fi suma unghiurilor de la vîrf ale acestor triunghiuri? Cît de mare poate fi unghiul u de la vîrful unei fețe laterale a unei piramide regulate care are ca bază un triunghi, un pătrat, un poligon regulat cu n laturi?

12.2.20.[1] a) Avem trei vergele de aceeași lungime a. Pentru a forma scheletul unei piramide regulate în care aceste vergele să fie muchii laterale, ne trebuie alte trei vergele de aceeași lungime b ($b = a$ sau $b \neq a$). Ce relație trebuie să existe între a și b? b) Aceeași problemă în cazul unei piramide pătrate regulate.

12.3. Trunchiul de piramidă

12.3.1. Fie $VABCD$ o piramidă dreptunghiulară în care una dintre muchiile laterale, VD este perpendiculară pe planul bazei. Această muchie se împarte în trei părți congruente și prin punctele de diviziune se duc plane paralele cu baza ei; ele împart piramida în trei părți. Se cer rapoartele dintre volumele acestor părți și volumul piramidei întregi.

12.3.2. Un trunchi de piramidă are baze pătrate, latura bazei mici fiind jumătate din latura bazei mari și una dintre muchiile sale laterale, DD' este perpendiculară pe baze. Planul P perpendicular pe baze care trece printr-o latură a bazei mici și nu conține vîrful D' îl împarte în două părți. Se cere raportul dintre volumele lor.

12.3.3. Un trunchi de piramidă are ca bază mare un triunghi dreptunghic ABC ($AB \perp AC$), laturile bazei mici fiind jumătățile laturilor corespunză-

[1] Se va rezolva întîi problema precedentă.

toare ale bazei mari, şi muchia AA' este perpendiculară pe baze. Planul P perpendicular pe baze care conţine ipotenuza bazei mici îl împarte în două părţi. Se cere raportul dintre volumele lor.

12.3.4. Se consideră un trunchi de piramidă dreptunghiulară în care una dintre muchiile laterale este perpendiculară pe planele bazelor. Laturile bazelor sînt a, b, $3a$ şi $3b$. Un plan paralel cu bazele sale care trece prin mijlocul înălţimii îl împarte în două părţi. Să se afle raportul dintre volumele lor.

12.3.5. O piramidă poate fi privită ca trunchi de piramidă în care baza mică este redusă la un punct, şi prisma ca trunchi de piramidă în care bazele sînt congruente. Ce devine în fiecare din aceste cazuri formula care dă volumul trunchiului de piramidă?

12.3.6. Fie $VABC$ o piramidă care are ca bază un triunghi dreptunghic ABC ($AB \perp AC$) şi în care punctul A este piciorul înălţimii. Piramida se taie cu un plan paralel cu bază care trece prin mijlocul M al înălţimii şi se înlătură partea din piramidă situată deasupra acestui plan. Să se afle volumul trunchiului de piramidă rămas fără a folosi formula corespunzătoare. Se va afla apoi acelaşi volum cu ajutorul formulei şi se vor compara rezultatele. Se dă: $AB = c$, $AC = b$, $VA = i$.

12.3.7. Aceeaşi problemă dacă baza piramidei este un triunghi echilateral cu latura a, înălţimea piramidei este i şi cade într-un vîrf al bazei.

12.4. Probleme diverse

12.4.1. a) Să se întocmească un tabel ca cel de mai jos, care să arate cîte muchii, vîrfuri şi feţe poate să aibă o prismă care are ca bază un poligon cu 3, 4, ..., n laturi.

n	muchii	vîrfuri	feţe
3	9	6	5
4	.....		
.....			
n			

Rîndul întîi se referă la prisma triunghiulară, rîndul al doilea la cea patrulateră ş.a.m.d. Primul rînd este completat. Să se completeze rîndurile următoare. Fie v, f şi m respectiv numărul vîrfurilor feţelor şi muchiilor unei prisme. Să se verifice că, în toate cazurile, $v + f = m + 2$. b) Aceeaşi problemă în cazul unei piramide.

12.4.2. a) Există o prismă cu 10 muchii? b) Ce condiţie trebuie să îndeplinească numărul natural m ca să existe o prismă cu m muchii? Cîte vîrfuri şi cîte feţe are prisma în acest caz? Să se dea exemple. c) Ce condiţie trebuie să îndeplinească numărul natural v ca să existe o prismă cu v vîrfuri? Cîte muchii şi cîte feţe are prisma în acest caz? d) Ce condiţie trebuie să îndeplinească numărul natural f ca că existe o prismă cu f feţe? Cîte muchii şi cîte vîrfuri are în acest caz prisma? c) Fie m, v şi f respectiv numărul muchiilor, vîrfurilor şi feţelor unei prisme. Ce relaţie există între m şi v? între m şi f? între v şi f? Să se demonstreze că $f + v = m + 2$. f) Aceeaşi problemă în cazul trunchiului de piramidă.

12.4.3. Aceeaşi problemă în cazul unei piramide.

12.4.4. a) Vrem să vopsim o prismă care are ca bază un poligon cu n laturi astfel încît oricare două fețe vecine să aibă culori diferite. Care este numărul minim de culori necesare? b) Aceeași problemă în cazul unei piramide. c) Cum se schimbă ultimul rezultat dacă, în locul piramidei, se consideră un trunchi de piramidă.

12.4.5. Un cub se vopsește apoi se taie în cuburi mai mici egale între ele, muchia unui cub mic fiind a n-a parte din muchia cubului inițial. (Cubul se taie cu un rînd de plane orizontale, apoi cu un rînd de plane paralele cu fața anterioară, apoi cu un rînd de plane paralele cu fața din stînga.) Dintre cuburile mici, unele nu vor avea nici o față colorată, altele una singură, altele două ș.a.m.d. Cîte cuburi de fiecare fel apar?

12.4.6*. Cîte muchii laterale congruente poate avea o piramidă care are ca bază un paralelogram? Ce paralelogram particular este baza în fiecare caz și ce particularitate mai prezintă piramida?

12.4.7. Să se demonstreze că într-o prismă triunghiulară dreptele care unesc cîte un vîrf al unei baze cu mijlocul laturii opuse a celeilalte baze sînt concurente.

12.4.8. Se consideră un cub (fig. 65). Fie M mijlocul muchiei AA' și N mijlocul diagonalei BD'. Să se demonstreze că: a) dreapta MN este perpendiculară pe AA' și BD'; b) MN este cel mai scurt segment care unește un punct al dreptei AA' cu un punct al dreptei BD'. c) $AB = a$. Să se calculeze segmentul MN.

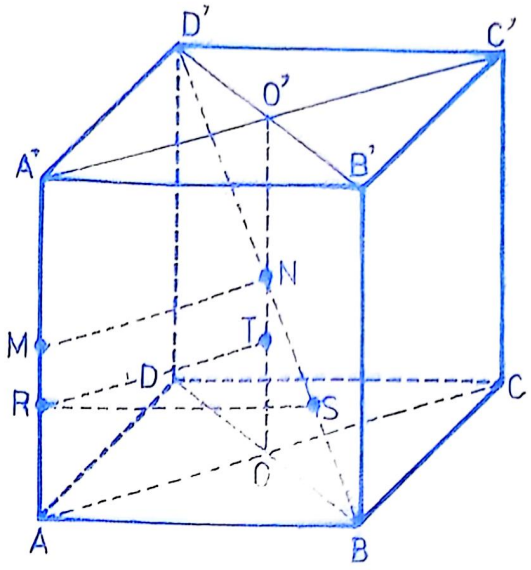


Fig. 65

În problemele 12.4.9—13.4.14 se pornește de la o prismă, se înlătură unele părți din el așa că rămîne un anumit poliedru. a) Ce formă au fețele care limitează acest poliedru? b) Fie f, v și m respectiv numărul fețelor, vîrfurilor și muchiilor sale. Să se afle aceste numere și să se verifice că $f + v = m + 2$. c) Să se deseneze desfășurarea lui (confecționare din hîrtie groasă). Să se calculeze: d) raportul dintre volumul poliedrului rămas și volumul celui inițial; e) aria lui[1].

12.4.9. Un cub $ABCDA'B'C'D'$ se taie cu planul determinat de diagonala BD și vîrful C' și partea care conține vîrful C se înlătură. Corpul rămas se taie cu planul determinat de diagonala $B'D'$ și vîrful A și partea care conține vîrful A' se înlătură.

12.4.10. Se consideră un cub. Fie AB, AD și AA' muchiile sale care pornesc din același vîrf A și M, N și P respectiv mijloacele lor. Cubul se taie cu planul determinat de punctele M, N, P și partea din cub care conține

[1] Ultimele două puncte nu sînt obligatorii. Partea importantă a problemei este de a imagina și desena poliedrul rămas.

vîrful A se îndepărtează. La fel se suprimă toate colţurile cubului. Se dă latura cubului ($= a$).

12.4.11. Aceeaşi problemă în cazul unei prisme triunghiulare regulate în care toate muchiile sînt congruente ($= a$).

12.4.12. Aceeaşi problemă în cazul unei prisme hexagonale regulate în care toate muchiile sînt congruente ($= a$).

12.4.13. Se consideră o prismă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care toate muchiile sînt congruente ($= a$). Pe muchiile AB, AC şi AA' care pornesc din vîrful A se iau punctele D, E şi F, unde $AD = AE = AF = \frac{AB}{3}$. Prisma se taie cu planul determinat de punctele D, E şi F şi partea care conţine vîrful A se înlătură. La fel se înlătură celelalte colţuri ale prismei.

12.4.14. Aceeaşi problemă în cazul unui cub.

12.4.15. Se consideră un paralelipiped dreptunghic $A'B'C'D'ABCD$ ($ABCD$ fiind baza superioară). Pe muchia AB se iau punctele M şi N, unde $AM = BN = \frac{AB}{6}$, şi se duc prin ele paralelele la BC; pe muchia BC se iau punctele P şi Q unde $BP = CQ = \frac{BC}{4}$ şi se duc prin ele paralelele la AB. Aceste drepte determină un dreptunghi $A_1B_1C_1D_1$ ($A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$). Paralelipipedul se taie cu planele determinate de dreptele A_1B_1 şi $A'B'$, B_1C_1 şi $B'C'$, C_1D_1 şi $C'D'$, D_1A_1 şi $D'A'$ şi părţile care conţin muchiile AB, BC, CD şi DA se îndepărtează. Se dă: $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. Nu se cere aria poliedrului rămas. Aceeaşi problemă dacă $BP = CQ = \frac{BC}{6}$.

12.4.16. Se consideră un cub $ABCDA'B'C'D'$. Fie E, F şi G respectiv mijloacele muchiilor AB, BC şi CC'. Să se demonstreze că intersecţia cubului cu planul P determinat de aceste puncte este un hexagon regulat.

Capitolul 13

CORPURI DE ROTAȚIE

13.1. Cilindrul

13.1.1. a) Să se demonstreze că volumul cilindrului este proporțional cu pătratul razei sale și cu înălțimea sa. Cu cît se înmulțește volumul unui cilindru cînd: b) raza se înmulțește cu 3 și înălțimea cu 2; c) raza se înmulțește cu 2 și înălțimea cu 3; d) raza se înmulțește cu 3 și înălțimea se împarte prin 3. e) Avem un cilindru și putem să înmulțim raza sau înălțimea sa cu un număr oarecare (mai mare decît 1). Cînd obținem un cilindru de volum mai mare?

13.1.2. Avem o foaie de carton în formă de dreptunghi, dimensiunile dreptunghiului fiind a și b, $a > b$. O putem înfășura în două moduri pentru a forma suprafața laterală a unui cilindru. Să se afle raportul volumelor celor doi cilindri. Cînd se obține un volum mai mare?

13.1.3. Un dreptunghi cu dimensiunile a și b, $a > b$, se rotește în jurul laturii mai mari și în jurul laturii mai mici. Să se compare ariile laterale și volumele celor doi cilindri care se obțin astfel. Să se facă legătura între rezultatul obținut și problema 13.1.1.

13.1.4. Cînd mărim raza sau înălțimea unui cilindru, aria sa totală crește. Aria totală a unui cilindru este proporțională cu raza lui? cu înălțimea lui?

13.1.5. a) Doi cilindri au un același volum. Fie R, I, r și i razele și înălțimile lor. Să se demonstreze că înălțimile lor sînt invers proporționale cu pătratele razelor lor,

$$\frac{i}{I} = \frac{R^2}{r^2} \text{ sau } \frac{i}{I} = \left(\frac{R}{r}\right)^2.$$

b) Dintr-un rezervor cilindric cu raza de 1 metru curge un lichid într-un cazan cilindric cu raza de 20 cm. Nivelul lichidului din cazan se ridică cu 50 cm pe minut. Cu cît coboară nivelul lichidului din rezervor? c) Cum se poate găsi răspunsul fără a calcula volumele?

13.1.6. Figura 1 reprezintă un cilindru, se dau raza R și înălțimea i. $\widehat{AM} = \widehat{AN} = 30°$, $\widehat{BP} = 90°$. Se cere: a) distanța MP; b) distanța NP

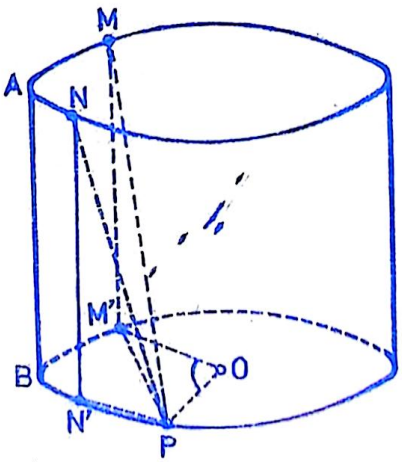


Fig. 1

13.1.7. a) Figura 2*a* reprezintă o curbă trasată pe o suprafață cilindrică numită *elice*. Distanța dintre două

puncte consecutive ale elicei situate pe aceeaşi generatoare este constantă: $AD \equiv BE \equiv CF \equiv DH \equiv FK \equiv$ $\equiv GL \equiv \ldots$; ea se numeşte *pasul* elicei. Pentru a obţine o elice, se poate proceda astfel: Pe o foaie de hîrtie transparentă în formă de dreptunghi se trasează o semidreaptă care porneşte dintr-un colţ al ei şi face cu baza un unghi u şi cilindrul se desfăşoară în ea. a) Pasul elicei unui tirbuşon este de 8 mm şi lungimea unui dop este de 4 cm. Printr-o mişcare a mîinii, tirbuşonul se învîrteşte cu 120°. Cîte mişcări trebuie să facem ca tirbuşonul să treacă prin dop? b) Pe un cilindru cu raza R este trasată o elice cu pasul p. Să se calculeze lungimea unui arc de elice care corespunde unui pas. c) Vrem să obţinem pe un cilindru cu raza R o elice cu pasul p. Cîte grade trebuie să aibă unghiul u? d) Fie M şi N două puncte ale unui cilindru cu raza R, M' şi N' proiecţiile lor pe planul bazei, $M'M = a$, $N'N = b$ şi unghiul $M'ON' = v$, O fiind centrul cercului de la baza cilindrului. Să se calculeze lungimea drumului celui mai scurt pe cilindru de la M la N.

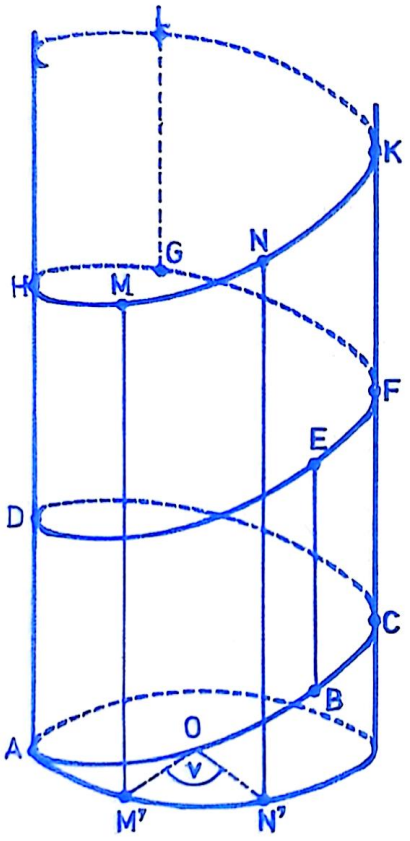


Fig. 2

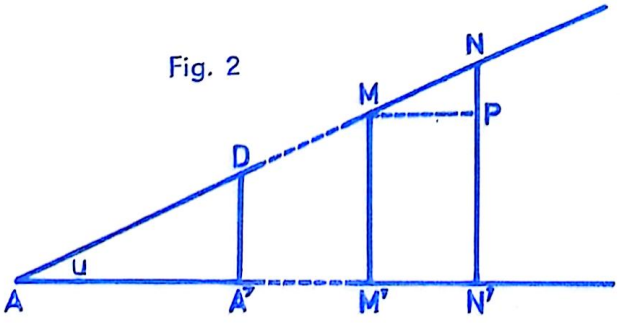


Figura 2-b nu este desenată la scară. Segmentul AN' ar trebui să aibă cca 9 cm.

13.1.8. Diametrul (interior) al unui robinet este de 12 mm. Apa curge din el cu viteza de 500 metri pe minut. În cît timp poate robinetul să umple un bazin cilindric cu raza de 60 cm şi înălţimea de 2 metri?

13.1.9. Razele a două vase comunicante cilindrice A şi B sînt de 50 cm şi 5 cm. Apa se ridică în ambele vase pînă la un nivel oarecare. a) În vasul A se toarnă o cantitate de apă care face ca nivelul apei să se ridice cu 10 cm. Cu cît se ridică nivelul apei din vasul B? Invers, cu cît se ridică apa din vasul A dacă turnăm în vasul B o cantitate de apă care face ca nivelul apei din acest vas să se ridice cu 10 cm? b) Cîtă apă trebuie să turnăm în unul din aceste vase ca nivelul apei să se ridice cu 10 cm? c) Cu cît se ridică nivelul apei cînd se toarnă 100 litri de apă?

13.1.10. Fie D diametrul exterior şi d diametrul interior al unei ţevi exprimaţi în milimetri şi g masa în grame a unui cm^3 din materialul din care este făcută ţeava. Cîte kilograme cîntăreşte

1 metru din acea țeavă? Aplicație: Să se afle masa unui metru de țeavă de plumb în care $D = 60$, $d - 50$ și $g = 11{,}3$.

13.1.11. Să se calculeze aria laterală a unui cilindru în care înălțimea este jumătate din rază. Se cunoaște raza cilindrului (= R). Să se deducă de aici un procedeu de a măsura aria unui cerc.

13.1.12. Trebuie să confecționăm un bidon care să aibă un volum dat și o înălțime dată. Putem să-i dăm forma de paralelipiped drept cu baza pătrată sau de cilindru. Care din ele cere mai puțin material?

13.1.13. Pentru a afla aria și volumul unei camere de la roata unui camion (fig. 3), ne închipuim că facem o secțiune prin ea și o îndreptăm astfel încît să capete forma de cilindru. a) Să se aplice acest procedeu în cazul unei camere în care raza secțiunii este r și raza roții socotită de la centrul roții pînă la centrul unei secțiuni este R. b) Avem o cameră în care $r = 8$ cm și $R = 30$ cm. Vrem să o umflăm astfel încît să aibă o presiune de

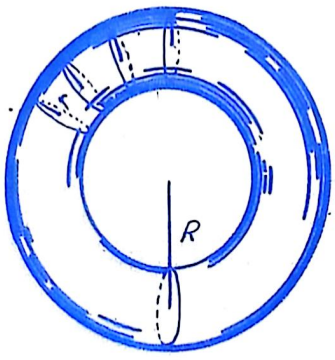


Fig. 3

3 atmosfere. Pentru aceasta folosim o pompă în formă de cilindru cu raza de 4 cm și înălțimea de 60 cm. Cîte mișcări ale pistonului pompei sînt necesare?

13.1.14. Pentru a determina cantitatea de lichid care se găsește într-un rezervor cilindric, se introduce în rezervor oblic, după diagonala secțiunii axiale o vergea gradată (fig. 4) și se constată cît de mult se udă vergeaua. Din lungimea acestei părți, se deduce volumul lichidului din rezervor. În cazul unui rezervor cu raza R și înălțimea i exprimate în centimetri se folosește o vergea gradată în hectolitri. Care este distanța dintre două linioare consecutive ale gradației? Exemplu: $R = 1{,}5$ m, $i = 4$ m.

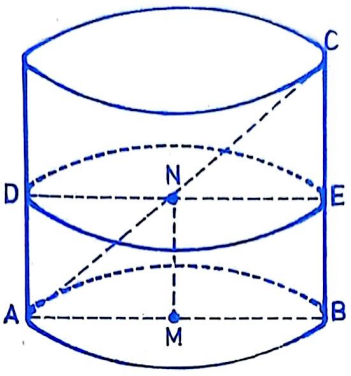


Fig. 4

13.2. Conul

13.2.1. Să se demonstreze că volumul conului este proporțional cu pătratul razei sale și cu înălțimea sa.

13.2.2. Un triunghi cu catetele a și b, $a > b$, se rotește: a) în jurul catetei a; b) în jurul catetei b. Să se afle raportul dintre volumele conurilor care se obțin astfel. Care din ele este mai mare? Să se facă legătura cu problema 14.1.2.

13.2.3. Fie R și G raza și generatoarea unui con și ν măsura în grade a unghiului sectorului care se obține prin desfășurarea conului. Să se demonstreze că

$$\frac{R}{G} = \frac{\nu}{360}.$$

13.2.4. Fie u unghiul de la vîrful unui con (unghiul format de două generatoare care trec prin puncte diametral opuse ale bazei) și v unghiul sectorului care se obține prin desfășurarea suprafeței laterale a conului. Să se demonstreze că

$$v = 360° \sin \frac{u}{2}.$$

Aplicații. Să se afle v dacă: a) $u = 60°$; b) $u = 30°$. Să se afle u dacă c) $v = 270°$.

13.2.5. Cîte grade trebuie să aibă unghiul unui sector de cerc ca să putem forma din el suprafața laterală a unui con în care raza să fie jumătate din generatoare?

13.2.6*. Avem o foaie de hîrtie dreptunghiulară $ABCD$, $AB = a$, $BC = b$, $a < b$. Vrem să facem din ea un cornet în formă de con (cornetele care se fac de obicei nu au această formă). a) Dacă rulăm hîrtia aducînd latura AB peste AD[1], obținem o suprafață ca cea din figura 6-a ; DB este un segment de dreaptă, iar DCB este o linie curbă. Să se afle lungimea generatoarei celei mai scurte și a celei mai lungi. b) Ce parte din hîrtie trebuie să tăiem ca să obținem o suprafață ca cea din figura 6-b, care are ca „bază" o linie curbă BCD' ($D' = B$)? c) Corpul pe care îl obținem acum este limitat de o suprafață conică, dar „baza" sa nu este un cerc. Ce parte din hîrtie trebuie să tăiem acum ca să obținem un con circular? d) Să se afle volumul conului de volum maxim care se poate forma acum.

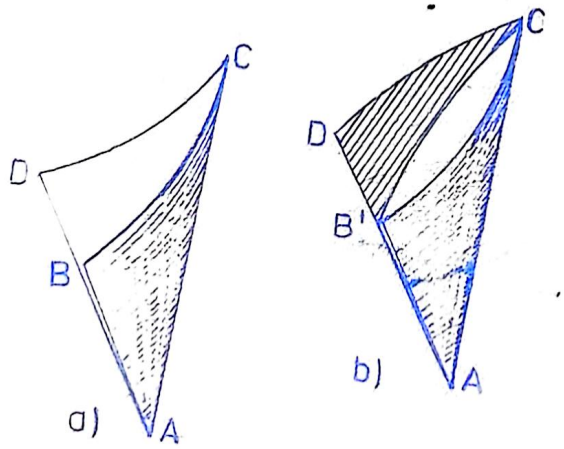


Fig. 6

13.2.7. Printr-un cilindru se face o secțiune cu un plan perpendicular pe generatoarele sale. Cercul care se obține astfel și centrele bazelor cilindrului determină cîte un con. La ce distanță de bază trebuie făcută secțiunea ca suma volumelor acestor conuri să fie maximă?

13.2.8. Dintr-o piesă în formă de con în care unghiul de la vîrf are 90° se scoate o parte în formă de con care are același vîrf și aceeași înălțime cu el și unghiul de la vîrf de 60°. Să se afle raportul dintre greutatea piesei rămase și greutatea piesei inițiale.

13.2.9. Avem un vas în formă de con, așezat cu vîrful în jos, în care unghiul de la vîrf este drept. a) Cîtă apă trebuie să turnăm în vas ca să se ridice la înălțimea de 10 cm? b) Cîtă apă trebuie să adăugăm după aceea ca nivelul apei să se ridice cu alți 10 cm?

13.2.10. Avem un vas în formă de con, așezat cu vîrful în jos, în care unghiul de la vîrf are 120°. Turnăm în vas apa necesară ca să aibă o adîncime de 1 dm; apoi adăugăm apa necesară ca nivelul ei să se ridice cu 1 dm; apoi din nou apa necesară ca nivelul ei să se ridice cu 1 dm; ș.a.m.d. a) Cîți litri de apă trebuie să turnăm prima oară? b) a doua oară? c) a treia oară? d) a n-a oară.

[1] Lucrarea se va face efectiv.

13.2.11. Să se demonstreze că intersecția unui con cu un plan paralel cu baza sa este un cerc al cărui centru aparține dreptei care unește vîrful conului cu centrul bazei sale.

13.2.12. Un con se taie cu un plan paralel cu baza care trece prin mijlocul înălțimii sale. Se obține un con mic situat deasupra planului de secțiune. Se cere: a) raportul dintre volumul acestui con și volumul conului inițial; b) raportul dintre ariile totale ale acestor conuri.

13.2.13. Fie R și i raza și înălțimea unui con. Să se determine o lungime x astfel încît, fie că o adăugăm la raza conului, fie că o adăugăm la înălțimea lui, creșterea volumului conului să fie aceeași. Ce relație trebuie să existe între R și i ca să trebuiască să micșorăm raza și înălțimea? În ce caz nu trebuie făcută nici o schimbare?

13.3. Trunchiul de con

13.3.1. Ce devine formula care dă volumul trunchiului de con: a) cînd $r = 0$; b) cînd $r = R$?

13.3.2. Să se demonstreze că formula care dă volumul trunchiului de con se poate pune sub forma

$$\mathcal{V} = \frac{\pi i(R^3 - r^3)}{3(R - r)}.$$

Această formă este mai bună cînd diferența razelor este un număr de o singură cifră sau cînd se folosește o tabelă de cuburi.

13.3.3. a) Să se deseneze desfășurarea suprafeței laterale a unui trunchi de con.

b) Fie R, r și G razele și generatoarea trunchiului de con. Să se calculeze aria desfășurării considerînd că este un „trapez curbiliniu", adică un „trapez" în care bazele sînt arce de cerc și „înălțimea" este generatoare.

13.3.4. Razele unui trunchi de con sînt de 5 cm și 3 cm, generatoarea este de 6 cm și face cu baza un unghi de 30°. Se cere volumul trunchiului de con.

13.3.5. Ce relație trebuie să existe între numerele R, r și G ca ele să reprezinte razele și generatoarea unui trunchi de con? Ce este mai mare, G sau $R - r$?

13.3.6. Ce este mai mare, aria laterală a unui trunchi de con sau diferența dintre ariile bazelor?

13.3.7. O coroană circulară se taie în două printr-o dreaptă care trece prin centrul ei și una dintre părți se rulează astfel încît să formeze suprafața laterală a unui trunchi de con. Să se afle unghiul format de generatoarea lui cu planul bazei.

13.3.8. Un trunchi de con se taie cu un plan P paralel cu bazele sale care trece prin mijlocul uneia dintre generatoarele sale. a) Să se demonstreze că planul P trece prin mijloacele tuturor generatoarelor. Planul P împarte trunchiul de con în două părți. Să se afle diferența dintre: b) ariile lor laterale; c) volumele lor. Se dau razele, înălțimea și generatoarea trunchiului de con: R, r, i și G.

13.3.9. a) Un vas închis în formă de con conține o cantitate de lichid care se ridică pînă la jumătate din înălțimea sa. Răsturnăm vasul astfel încît să stea cu vîrful în jos. Pînă la ce înălțime se va ridica acum lichidul? b) Aceeași problemă dacă la început lichidul se ridică pînă la a n-a parte din înălțime.

13.3.10. Fie R, r și i razele și înălțimea unui trunchi de con. Vrem să micșorăm raza mică r astfel încît volumul lui să devină a n-a parte din volumul unui cilindru cu raza R și înălțimea i, unde n este un număr pozitiv dat. Care este valoarea cea mai mare pe care o poate avea numărul n pentru ca problema să aibă o soluție. Nu se va calcula volumul trunchiului de con și nu se va forma nici o ecuație.

13.3.11. Cum variază volumul unui trunchi de con cînd, lăsînd înălțimea sa neschimbată: a) mărim raza mare și micșorăm raza mică cu aceeași lungime; b) mărim raza mică și micșorăm raza mare cu aceeași lungime? c) Vrem să confecționăm un trunchi de con cînd înălțimea sa și suma razelor sale sînt date. Cum trebuie alese razele, ca volumul său să fie maxim?

13.3.12. a) Se consideră un trunchi de con cu razele de 8 cm și 7 cm. Cu cît putem mări raza mare ca, micșorînd raza mică cu o lungime corespunzătoare și lăsînd înălțimea neschimbată, volumul trunchiului de con să nu se schimbe? b) Aceeași problemă în cazul general, cînd razele sînt R și r.

13.3.13. a) Pentru a afla aria unui trapez, trapezul se înlocuiește cu un dreptunghi care are aceeași înălțime cu el și ca bază media bazelor trapezului. Se obține un rezultat exact? b) Pentru a afla volumul unui trunchi de con, el se înlocuiește cu un cilindru care are aceeași înălțime cu el și ca rază media razelor sale. Rezultatul este mai mare sau mai mic decît cel adevărat? c) Aceeași întrebare dacă aria bazei cilindrului este media ariilor bazelor trunchiului de con. d) Care procedeu este mai bun?

13.3.14. Pentru a determina volumul unui buștean, se poate folosi în practică formula

$$\mathcal{V} = 0{,}08\ C^2 l,$$

unde C este lungimea cercului mediu și l lungimea bușteanului (Aceste elemente sînt ușor de măsurat.) a) Să se verifice că această formulă se obține considerînd că bușteanul, care în realitate are forma de trunchi de con, are forma de cilindru, raza cilindrului este raza cercului mediu, care se obține tăind bușteanul cu un plan perpendicular pe axa lui situat la distanțe egale de capetele lui, și înălțimea cilindrului este generatoarea bușteanului. b) Să se calculeze cu ajutorul acestei formule volumul unui buștean în care $R = 30$ cm, $r = 20$ cm și $l = 9$ m. Să se calculeze și volumul lui real și raportul dintre cele două rezultate.

13.4. Sfera

13.4.1. Să se demonstreze că: a) aria sferei este proporțională cu pătratul razei sale; b) volumul sferei este proporțional cu cubul razei sale.

13.4.2. a) Dintr-o sferă de plastilină se fac sfere mai mici ale căror raze sînt jumătate din raza ei. Cîte sfere mici se obțin? Care este raportul dintre suma ariilor sferelor mici și aria sferei mari? b) Aceeași problemă dacă raza unei sfere mici este a n-a parte din raza sferei inițiale.

13.4.3. Un ou cu axa mare de 6 cm costă 1,30 lei. Cît ar trebui să coste un ou cu axa mare de 5 cm? (Se va considera că ouăle au forma de sferă și axa mare este diametrul sferei.)

13.4.4. O sferă cu raza de 2 cm se nichelează depunîndu-se pe ea un strat de nichel gros de 1 mm. Se cere volumul cantității necesare de nichel.

13.4.5. Diametrul interior al unui ceaun (hemisferă) este de 24 cm și grosimea lui este de 2 mm. Se cere: a) capacitatea lui; b) greutatea lui ($d = 7{,}8$ g/cm^3).

13.4.6. Volumul materialului necesar pentru a confecționa o sferă goală cu rază interioară R și grosimea materialului g se poate calcula cu ajutorul formulei aproximative $\mathcal{V} = 4\pi R^2 g$. (Sfera se desfășoară forțat transformîndu-se într-un disc circular, în care aria bazei este egală cu aria sferei și înălțimea este grosimea materialului.) a) Să se demonstreze că rezultatul dat de formulă este totdeauna mai mic decît cel adevărat. b) Să se rezolve cele două probleme precedente cu ajutorul acestei formule. Cît la sută din valoarea adevărată reprezintă cea dată de formula aproximativă?

13.4.7. Raza unei portocale (în formă de sferă) este R și grosimea coajei sale este g. a) Să se afle raportul k dintre volumul părții comestibile (care se mănîncă) și volumul portocalei întregi. b) Să se demonstreze că, dacă g rămîne neschimbat și R crește, acest raport crește. c) Ce este mai convenabil să cumperi portocale mari sau mici? d) Se consideră o cantitate oarecare A de portocale cu raza R și aceeași cantitate de portocale cu raza r. Care este raportul dintre greutățile părților lor comestibile? e) Un kilogram de portocale costă 13 lei. Acest preț a fost fixat pentru portocale cu $R = 30$ mm și $g = 6$ mm. Cît ar trebui să coste 1 kg de portocale cu raza $r = 25$ mm, $r = 20$ mm, $r = 35$ mm?

13.4.8. Aceeași problemă în cazul cireșilor, cînd raza unei cireși este R și raza sîmburelui este s. Se consideră că amîndouă au forma de sferă și raza sîmburelui este aceeași indiferent de mărimea cireșii. Ultima întrebare se înlocuiește cu: e) Un kilogram de cireși cu $R = 12$ mm și $s = 3$ mm costă 7 lei. Cît ar trebui să coste un kilogram de cireși cu raza $r = 6$ mm? cu raza $r = 15$ mm?

13.4.9. Pe mormîntul lui Arhimede se găsește un desen ca cel din figura 17: o sferă și un con înscrise într-un cilindru. Fie R raza sferei. Să se afle o relație simplă între volumele celor trei corpuri. (Arhimede a fost foarte mîndru de această descoperire.)

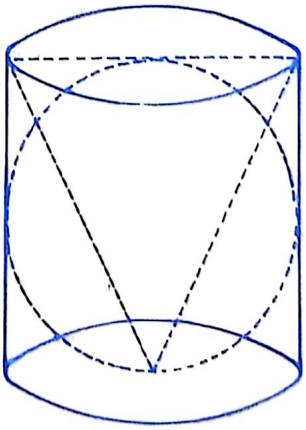


Fig. 17

13.4.10. Generatoarea unui con este egală cu diametrul bazei sale. Să se calculeze volumul şi aria: a) sferei înscrise; b) sferei circumscrise conului. Se dă raza conului ($= a$).

13.4.11. Fie M un punct de pe pămînt cu latitudinea u. Cu ce viteză se mişcă acest punct datorită mişcării de rotaţie a Pămîntului? Raza Pămîntului este de 6 400 km. Exemple: a) $u = 45°$; b) $u = 60°$. c) Un avion merge cu 600 km/oră. La ce latitudine trebuie să meargă el de la vest spre est ca, pentru el, soarele să stea pe loc?

13.4.12. Să se calculeze aria unei calote sferice a cărei înălţime este egală: a) cu raza sferei; b) cu diametrul sferei. Se puteau prevedea rezultatele?

13.4.13. Un diametru al unei sfere se împarte în 5 (n) părţi de aceeaşi lungime şi prin punctele de diviziune se duc plane perpendiculare pe el. Să se compare ariile calotelor şi zonelor determinate de ele.

13.4.14. Cele două calote de pe globul pămîntesc mărginite de paralele de 67° notate cu p în figura 20 se numesc zone polare; zonele mărginite de paralelele de 67° şi 23°, notate cu t, se numesc zone temperate; zona situată între paralelele de 23° N şi 23° S se numeşte zona ecuatorială. Ce fracţie din suprafaţa pămîntului ocupă fiecare din aceste zone? Care din ele este cea mai întinsă? Cea mai mică?

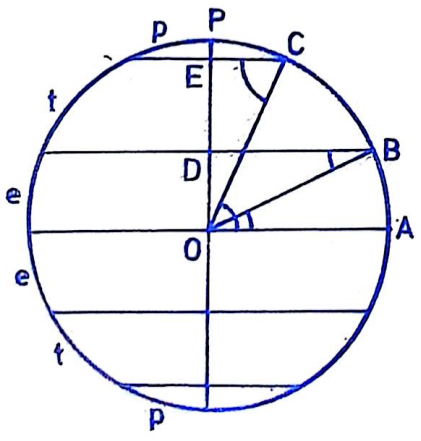


Fig. 20

13.4.15. a) Pe un balon (sferic) desenăm un cerc; el determină două calote. Umflăm balonul astfel încît raza sa să se înmulţească cu un număr oarecare k. Cu cît se înmulţesc ariile acestor calote? b) Tăiem o sferă cu un plan situat la o distanţă x de centrul ei şi considerăm calota mai mică decît o hemisferă. Cînd x creşte, aria ei scade. Aria este invers proporţională cu x?

13.4.16. O sferă se taie cu un plan. Să se determine distanţa de la centrul sferei la plan astfel încît aria uneia dintre calotele pe care le determină planul să fie egală cu aria unui cerc mare al sferei. Se dă raza sferei ($= R$).

13.4.17. O sferă se taie cu un plan şi se consideră conul care are ca bază intersecţia lor şi vîrful în centrul sferei. Să se compare aria laterală a acestui con cu aria calotei mai mici determinată de plan. Să se determine distanţa de la centrul sferei la plan astfel încît aceste arii să fie egale.

13.4.18. O sferă se taie cu un plan P. Fie AB diametrul sferei perpendicular pe el. Cercul de secţiune determină împreună cu fiecare dintre punctele A şi B cîte un con. Să se determine distanţa de la centrul sferei la planul P astfel încît suma volumelor celor două conuri să fie maximă şi să se afle volumul maxim.

13.5. Probleme diverse

13.5.1. a) Suprafața laterală a unui cilindru se desfășoară dreptunghiul obținut se împarte în două părți congruente printr-o dreaptă paralelă cu generatoarea cilindrului și din ele se formează prin înfășurare suprafețele laterale a doi cilindri. Să se afle raportul dintre suma volumelor acestor cilindri și volumul cilindrului inițial. b) Aceeași problemă, dacă dreptunghiul se împarte în 3, 4, ..., n părți congruente.

13.5.2. Problema analoagă în cazul unui con, cînd arcul sectorului care se obține prin desfășurare se împarte în părți congruente și punctele de diviziune se unesc cu centrul sectorului.

13.5.3. a) Se consideră o prismă regulată care are ca bază un poligon oarecare. Baza unei alte prisme este un poligon asemenea cu primul, raportul de asemănare fiind un număr dat k și raportul dintre muchiile lor este de asemenea k. Se cere raportul dintre ariile lor totale și dintre volumele lor. b) Aceeași problemă în cazul a două piramide regulate. c) De asemenea în cazul a doi cilindri, raportul dintre razele lor fiind egal cu raportul dintre înălțimile lor. d) De asemenea în cazul a două conuri care îndeplinesc aceste condiții. e) De asemenea în cazul a două sfere.

13.5.4. Să se calculeze latura cubului înscris într-o sferă.

13.5.5. Să se înscrie un tetraedru regulat într-o sferă.

13.5.6. Să se afle volumul și aria corpurilor generate de figurile 26 prin rotația cu 360° în jurul axei xy.

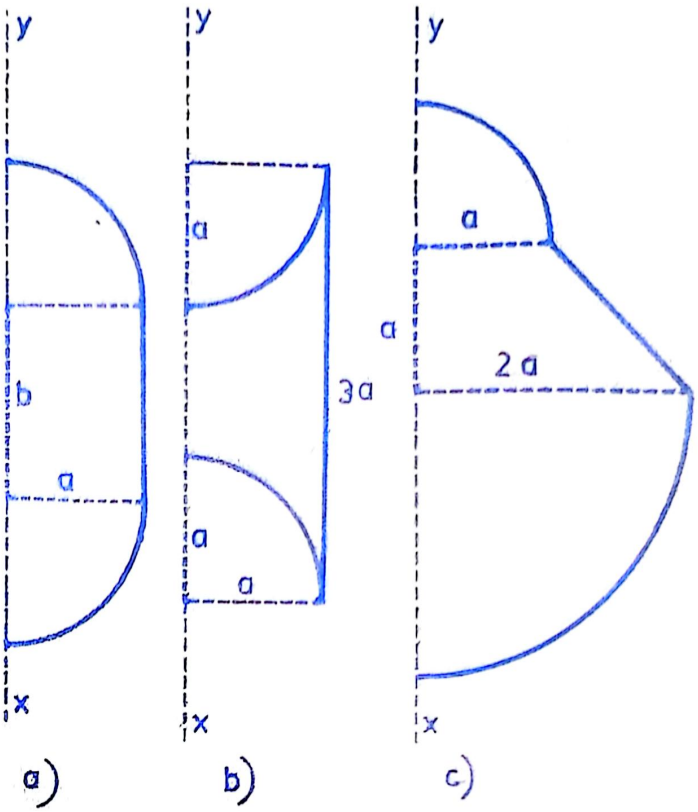


Fig. 26.

13.5.7. Un triunghi dreptunghic se rotește cu 360° în jurul ipotenuzei sale. Se dau catetele b și c. Se cere: a) volumul; b) aria corpului de rotație.

13.5.8. Aceeași problemă dacă triunghiul se rotește în jurul paralelei duse prin A la ipotenuză.

13.5.9. Un trapez în care laturile oblice sînt congruente cu baza mică și baza mare este dublul bazei mici se rotește în jurul bazei mari. Baza mică este a. Se cere: a) volumul; b) aria corpului de rotație.

13.5.10. Aceeași problemă dacă trapezul se rotește în jurul bazei mici.

13.5.11. O placă în formă de dreptunghi se rotește în jurul diagonalei. Să se calculeze raza și înălțimea unei cutii cilindrice de volum minim în care ea se poate roti cu 360°. Dimensiunile dreptunghiului sînt a și b.

13.5.12. Figura 33 reprezintă un pătrat și două arce ale cercului circumscris. Să se afle aria corpului care se naște prin rotația ei cu 180° în jurul axei xy.

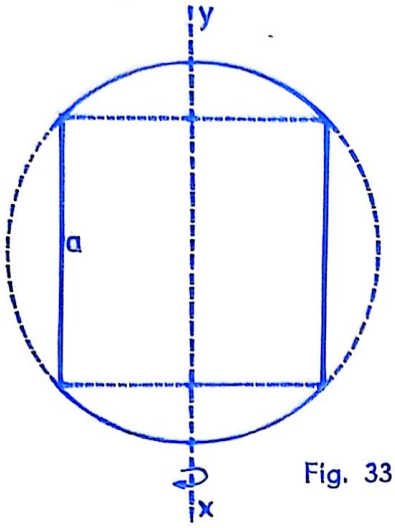


Fig. 33

13.5.13. Aceeași problemă în cazul figurii formate din laturile AB și AC ale unui triunghi echilateral și arcul BC al cercului circumscris triunghiului.

13.5.14.* Aceeași problemă în cazul figurii 35, care reprezintă o parte

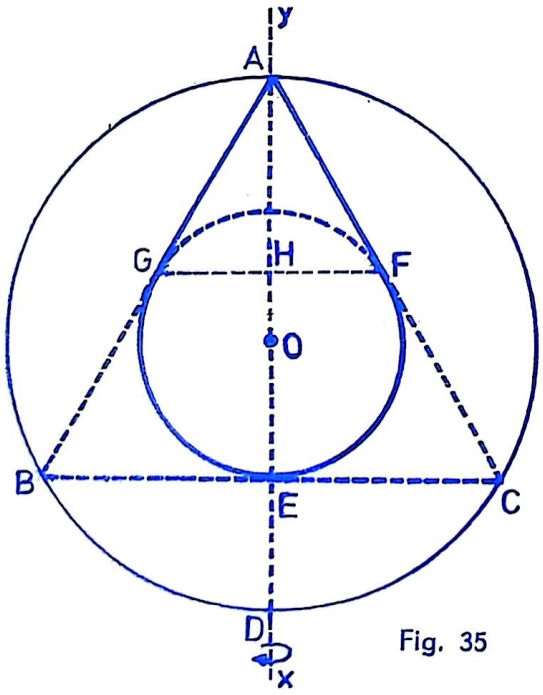


Fig. 35

AGF a unui triunghi echilateral și un arc GEF al cercului înscris triunghiului. Se dă latura triunghiului ($=a$).

13.5.15. Fie R raza Pământului și M un punct situat la înălțimea i deasupra Pământului. a) Să se afle aria $\mathcal{A}$ a părții din suprafața Pământului vizibile din punctul M și raportul dintre această arie și aria S a Pământului întreg. b) Care este valoarea acestui raport cînd $i = R$? c) Cît trebuie să fie i ca acest raport să fie $\frac{1}{3}$? d) El poate fi $\frac{1}{2}$? Explicație geometrică. e) Fie A piciorul verticalei care trece prin punctul M și B un punct al marginii părții vizibile. Să se afle distanța de la A la B măsurată pe meridianul care trece prin aceste puncte cînd $i = R$. f) Distanța de la București la Timișoara este de 570 km. La ce înălțime trebuie să se ridice un satelit la București ca din el să se poată vedea orașul Timișoara? $R = 6\,300$ km. (Se admite că atmosfera este transparentă.)

13.5.16. Fie R una dintre razele unui trunchi de con și i înălțimea lui. a) Să se determine cealaltă rază a lui astfel încît volumul lui să fie egal cu volumul unui cilindru care are aceeași înălțime cu el și a cărui rază este un număr dat a. b) Ce condiții trebuie să îndeplinească numărul a ca problema să aibă o soluție? Se vor interpreta cazurile extreme. c) Ce condiții trebuie să îndeplinească numărul a ca R să fie raza mare (mică) a trunchiului de con? d) Să se găsească răspunsurile la întrebările b și c fără a folosi ecuația.

13.5.17. O sferă se taie cu un plan. Fie O centrul sferei și OA raza perpendiculară pe plan. Cercul de secțiune

împreună cu fiecare dintre punctele O și A determină cîte un con. Se dă raza sferei (=R). Să se determine distanța de la centrul sferei la plan astfel încît: a) suma volumelor celor două conuri să fie $\frac{3}{16}$ din volumul sferei; b) raportul dintre această sumă și volumul sferei să fie un număr dat k. c) Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul k pentru ca problema să aibă o soluție? d) Care este volumul maxim și la ce distanță de centrul sferei trebuie făcută secțiunea ca suma volumelor să fie maximă?

13.5.18. a) Se consideră un cilindru cu raza 6 cm. Să se găsească un număr pozitiv x astfel încît dacă lăsăm înălțimea neschimbată, mărim raza unei baze cu x și micșorăm raza celeilalte baze tot cu x, raportul dintre volumul corpului obținut și volumul cilindrului să fie $\frac{5}{4}$. b) Aceeași problemă cînd raza cilindrului este R și raportul volumelor trebuie să fie un număr dat k. c) Ce condiție trebuie să îndeplinească numărul k pentru ca problema să aibă o soluție? d) Pentru ce valoare a lui x se obține corpul de volum maxim? Care este acest volum? Ce formă are corpul?

13.5.19. Figura 39 reprezintă un cilindru înscris într-un con, baza superioară a cilindrului se obține tăind conul cu un plan paralel cu baza. a) Să se determine distanța de la vîrful conului la acest plan astfel încît aria laterală a cilindrului să fie πa^2, unde a este un număr dat. b) Ce condiții trebuie să îndeplinească numărul a ca problema să aibă o soluție? c) Care este valoarea maximă a ariei și la ce distanță de vîrful conului trebuie făcută secțiunea ca aria să fie maximă? (Alte probleme de acest tip sînt 15.3.21 — 23).

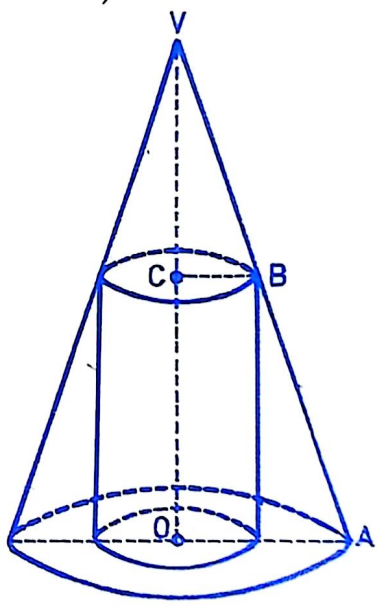


Fig. 39

Capitolul 14

PROBLEME DE MAXIM ȘI MINIM

14.1. Chestiuni de geometrie plană

14.1.1. Fie xy o dreaptă, A și B două puncte fixe ale ei și M un punct oarecare din plan, care aparține dreptei sau nu. a) Să se determine poziția punctului M astfel încît suma $MA+MB$ să fie minimă. b) Există o poziție a punctului M pentru care această sumă să fie maximă? c) Să se determine poziția punctului M astfel încît diferența dintre MA și MB ($MA-MB$ sau $MB-MA$) să fie maximă. d) Există o poziție a punctului M pentru care această diferență să fie minimă?

14.1.2. Se consideră un cerc și un punct A. Să se găsească punctul cercului: a) cel mai apropiat de A; b) cel mai depărtat de A. Trei cazuri: cînd punctul A este în interiorul cercului, cînd este în exteriorul lui și cînd aparține cercului.

Exemplu: Un cîine este legat cu un lanț lung de R metri și se găsește într-un punct oarecare A. Un copil trebuie să-i ducă mîncarea, dar se teme de el. Unde trebuie să așeze mîncarea, ca să fie cît mai departe de cîine și, totuși, cîinele să poată ajunge la ea?

14.1.3. Se consideră un cerc și o dreaptă. Să se găsească un punct al cercului și un punct al dreptei astfel încît distanța dintre cele două puncte să fie: a) *minimă*; b) *maximă*. Se vor considera toate pozițiile posibile ale dreptei față de cerc.

14.1.4. În figura 4, $ABCD$ este un dreptunghi. Printr-un punct O din interiorul lui s-au dus paralele la laturile lui. Ce poziție trebuie să ocupe punctul O ca suma $EG+HF$ să fie minimă?

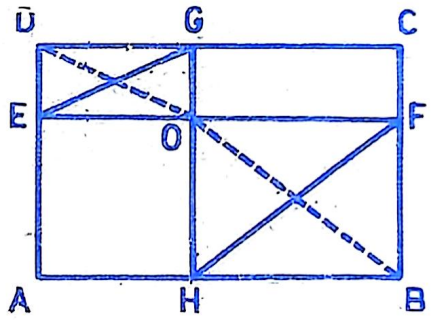


Fig. 4

14.1.5. Fie $ABCD$ un patrulater convex. Să se determine un punct din interiorul lui pentru care suma distanțelor la vîrfurile patrulaterului este minimă. *Aplicație:* Punctele A, B, C și D reprezintă niște orașe. S-a hotărît să se construiască un aeroport care să le deservească. Unde trebuie construit aeroportul ca drumul total pe care-l parcurg autobuzele care duc călătorii de la orașe la aeroport sau invers să fie minim?

14.1.6 Se consideră un poligon regulat $ABCD \ldots K$ cu un număr par de laturi. Să se determine punctul M astfel încît suma $MA + MB + MC + \ldots + MK$ să fie minimă. Să se afle suma minimă cunoscînd raza cercului circumscris poligonului.

14.1.7. a) Fie AB și AC două segmente. Cîte grade trebuie să aibă unghiul BAC ca aria triunghiului ABC să fie maximă? b) Se consideră un paralelogram articulat. Cît de mari trebuie să fie unghiurile sale ca aria sa să fie maximă?

14.1.8*. Se consideră două cercuri secante; fie A unul dintre punctele lor de intersecție. Prin A se duce o dreaptă și se notează cu M și N punctele ei de intersecție cu cele două cercuri deosebite de A. Cum trebuie dusă această dreaptă ca segmentul MN să fie: a) maxim; b) minim?

14.1.9. Se consideră o dreaptă d și două puncte A și B situate de aceeași parte a ei. Să se determine un punct C al dreptei d astfel încît linia frîntă ACB să fie cît mai scurtă. (Dreapta d reprezintă malul mării, A și B două vapoare ancorate în apropierea malului. O barcă trebuie să meargă de la A la B, dar pe drum trebuie să atingă malul într-un punct oarecare M pentru a lăsa acolo un călător. Cum trebuie ales punctul M ca drumul bărcii să fie cît mai scurt?)

14.1.10*. Fie xOy un unghi ascuțit și M un punct din interiorul lui. Să se determine un punct A al laturii Ox și un punct B al laturii Oy astfel încît perimetrul triunghiului MAB să fie minim.

14.1.11*. Fie xOy un unghi și M un punct al bisectoarei sale Oz. Să se ducă prin M o dreaptă astfel încît, A și B fiind intersecțiile ei cu Ox și Oy, a) suma $OA + OB$ să fie minimă; b) aria triunghiului AOB să fie minimă.

14.1.12*[1]. Fie xOy un unghi și M un punct al bisectoarei sale Oz. Să se ducă prin M o dreaptă d astfel încît partea ei situată în interiorul unghiului să fie minimă. Aplicație: Două canale de aceeași lățime a se intersectează sub un unghi drept. Care este lungimea maximă pe care o poate avea un vapor ca să poată trece dintr-un canal în celălalt?

14.1.13. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $AB \perp AC$. Printr-un punct M al ipotenuzei se duc perpendicularele pe catete; fie D și E picioarele lor. Să se determine punctul M astfel încît segmentul DE să fie minim.

14.1.14. Fie AB o coardă a unui cerc. Să se determine un punct M al cercului astfel încît aria triunghiului MAB să fie maximă. Caz particular: AB este un diametru al cercului.

14.1.15[2]. Din toate patrulaterele înscrise în același cerc, care are aria cea mai mare? Aplicație: Un buștean în formă de cilindru trebuie cioplit astfel încît să se obțină o bîrnă în formă de paralelipiped dreptunghic. Ce formă trebuie să se dea bazei paralelipipedului ca volumul lui să fie maxim (să se piardă cît mai puțin din material)?

---

[1] Este continuarea problemei precedente. O dăm separat pentru că intervine propoziția după care bisectoarea unui triunghi este mai mică decît media laturilor care pornesc din același vîrf.

[2] Se va rezolva întîi problema precedentă.

14.1.16. Dintre toate dreptunghiurile care au același perimetru, care are aria cea mai mare? Aplicație: Cu un fir de sîrmă vrem să înconjurăm o bucată de teren în formă de dreptunghi. Ce formă trebuie să dăm dreptunghiului ca să aibă o arie cît mai mare?

14.1.17. Fie M un punct din interiorul unui cerc. Dintre toate coardele care trec prin punctul M, care are lungimea: a) maximă; b) minimă?

14.1.18. Fie AB un segment, Ax și By două semidrepte paralele situate de aceeași parte a dreptei AB și M un punct situat în partea din plan limitată de AB și aceste semidrepte. Să se ducă prin punctul M o dreaptă d care să taie Ax și By și astfel încît aria părții din plan limitată de AB, Ax, By și d să fie: a) maximă; b) minimă. c) Se va examina și cazul cînd punctul M este egal depărtat de Ax și By.

14.2. Chestiuni de geometrie în spațiu

14.2.1. Într-o piramidă patrată regulată $VABCD$ se dă muchia $VA = m$ și unghiul $AVB = 15°$. O muscă pornește din vîrful A și, mergînd pe suprafața piramidei, vrea să ajungă pe drumul cel mai scurt: a) la muchia VC; b) la muchia VD; c) înapoi în punctul A, după ce a făcut ocolul piramidei. Care este acest drum? Să se afle lungimea lui. d) În cazul muchiei VC, se propune drumul AMN unde M este piciorul perpendicularei coborîte din A pe VB și N piciorul perpendicularei coborîte din M pe VC. De ce este această soluție greșită?

14.2.2. Aceeași problemă în cazul unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, musca voind să meargă: a) din colțul A pînă la muchia opusă CC'; b) din colțul A la colțul C'. Se dă: $AB = a$, $BC = b$, $AA' = c$. De asemenea în cazul unei piramide triunghiulare regulate $VABC$ în care $VA = m$ și $\widehat{AVB} = 30°$, musca voind să meargă din vîrful A:

d) la muchia VC;

e) înapoi în A.

14.2.3. Avem trei vergele de aceeași lungime a. Ne trebuie alte trei vergele de aceeași lungime b ($b = a$ sau $b \neq a$) ca să formăm scheletul unei piramide regulate triunghiulare în care primele trei vergele să fie muchii laterale. a) Ce lungime trebuie să aibă aceste vergele ca aria laterală a piramidei să fie maximă?

14.2.4. Problema analoagă în cazul unei piramide patrate regulate.

14.2.5*. Într-un punct O al unui plan P se ridică perpendiculara OA pe plan și în plan se duce o dreaptă d care nu trece prin O. Să se determine un punct M al acestei drepte astfel încît unghiul format de dreapta AM cu planul P să fie maxim.

14.2.6*. Fie ABC un triunghi. Vîrful A se găsește într-un plan P și latura BC este paralelă cu P. Triunghiul se rotește în jurul intersecției planului triunghiului cu planul P. Se cunosc unghiurile triunghiului ABC și se cer maximele unghiurilor pe care le formează laturile AB și AC cu planul P. Caz particular: triunghiul ABC este echilateral.

14.2.7. Se consideră un tetraedru regulat $VABC$. Să se găsească un punct M al muchiei BC și un punct N al muchiei VA astfel încît segmentul MN să fie minim (să fie mai mic decît orice alt segment care unește un punct al muchiei BC cu un punct al muchiei VA). Să se afle lungimea segmentului minim cînd $AB = a$.

Capitolul 15

PROBLEME DIVERSE

15.1. Demonstrații indirecte

15.1.1. Să se demonstreze propozițiile următoare: a) Dacă, într-un triunghi ABC, $\hat{B} \neq \hat{C}$, atunci $AB \neq AC$. b) Dacă un patrulater are două unghiuri opuse care nu sînt congruente, diagonalele sale nu se împart în părți congruente.

15.1.2. Să se formeze și să se demonstreze contrapusele propozițiilor următoare.

a) Dacă două drepte sînt paralele, ele formează cu o secantă unghiuri alterne interne congruente. b) Dacă x, y și z sînt măsurile unghiurilor unui triunghi, $x + y + z = 180°$. c) Diagonalele unui dreptunghi sînt congruente. d) Fie xOy un unghi și M un punct din interiorul lui. Dacă punctul M aparține bisectoarei unghiului, el este egal depărtat de laturile unghiului. e) Fie ABC un triunghi. Dacă $\hat{A} = 90°$, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

15.1.3. Să se demonstreze că dintr-un punct exterior unei drepte nu se pot duce două perpendiculare pe acea dreaptă.

15.1.4. La un cerc se duc două tangente paralele. Să se demonstreze că punctele lor de contact și centrul cercului sînt coliniare.

15.1.5. Fie $ABCD$ un paralelogram și O mijlocul diagonalei AC. Să se demonstreze că punctele B, O și D sînt coliniare.

15.1.6. Fie ABC un triunghi, M un punct al laturii AB și N un punct al laturii AC. Să se demonstreze că, dacă $MN \parallel BC$ și $MN = \frac{BC}{2}$, punctul M este mijlocul laturii AB (și punctul N este mijlocul laturii AC).

15.1.7. Fie $ABCD$ un patrulater și M, N mijloacele laturilor opuse AD, BC, $M \in AD$. Să se demonstreze că, dacă $MN \parallel AB$, patrulaterul $ABCD$ este trapez.

15.1.8. Să se demonstreze că: a) cel puțin unul dintre unghiurile unui triunghi $\geqslant 60°$; b) cel puțin unul dintre unghiurile unui patrulater $\geqslant 90°$; c) cel puțin unul dintre unghiurile unui pentagon $\geqslant 108°$; d) Să se enunțe și să se demonstreze o propoziție analoagă pentru cazul unui poligon cu n laturi.

15.1.9. Fie k un cerc (fig. 7), R lungimea razei sale, d o dreaptă și x distanța de la centrul cercului la dreaptă. Se știe că: a) dacă $x > R$, dreapta nu are nici un punct comun cu cercul,

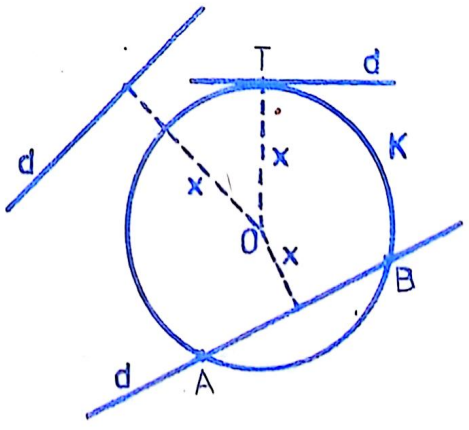


Fig. 7

$d \cap k = \emptyset$; b) dacă $x = R$, dreapta are un singur punct comun cu cercul, $d \cap k = T$; c) dacă $x < R$, dreapta taie cercul în două puncte, $d \cap k = \{A, B\}$. Să se demonstreze că reciprocele acestor propoziții sînt adevărate.

15.1.10. Se știe că, într-un triunghi, laturii mai mari i se opune un unghi mai mare, adică: dacă, într-un triunghi ABC, $AC > AB$, $\hat{B} > \hat{C}$. Să se demonstreze că reciproca acestei teoreme este adevărată, adică: dacă $\hat{B} > \hat{C}$, $AC > AB$.

15.2. Unde e greșeala?

15.2.1. $\sqrt{3} = 1$ (!). Considerăm un triunghi în care fiecare înălțime este jumătate din latura pe care cade. Fie a, b și c laturile triunghiului; atunci înălțimile lui sînt $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ și $\frac{c}{2}$. Dacă luăm ca bază latura a, aria triunghiului este $\frac{a^2}{4}$. Dacă luăm ca bază latura b sau c, aria este $\frac{b^2}{4}$ respectiv $\frac{c^2}{4}$. Cele trei rezultate aflate pentru arie trebuie să fie egale, deci

$$\frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{4} = \frac{c^2}{4}, \text{ deci } a = b = c.$$

Triunghiul este echilateral.

Or, dacă a este latura unui triunghi echilateral, înălțimea sa este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Pe de altă parte, s-a dat că înălțimea este $\frac{a}{2}$, deci

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}.$$

De aici rezultă că $\sqrt{3} = 1$, ceea ce nu este adevărat. Ce greșeală s-a făcut?

15.2.2. *O „demonstrație" a teoremei lui Tales.* În figura 8, ABC este un triunghi oarecare și $DE \parallel BC$. Unim punctul B cu E și D cu C. Atunci triunghiurile DEB și DEC sînt echivalente, căci au aceeași bază DE și înălțimi egale (distanța dintre dreptele paralele BC și DE). Dacă adăugăm la fiecare din ele triunghiul ADE, obținem triunghiurile ABE și ACD care vor fi de asemenea echivalente. Luăm ca baze laturile AB și AC; fie EF și DG înălțimile corespunzătoare.

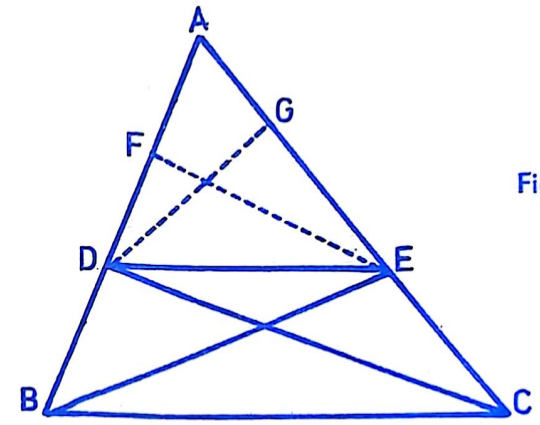


Fig. 8

Scriem că ariile celor două triunghiuri sînt egale:

$$\frac{AB \cdot EF}{2} = \frac{AC \cdot DG}{2};$$

$$AB \cdot EF = AC \cdot DG;$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{DG}{EF}.$$

Acum calculăm în două moduri aria triunghiului ADE și scriem că rezultatele sînt egale:

$$\frac{AE \cdot DG}{2} = \frac{AD \cdot EF}{2};$$

$$AE \cdot DG = AD \cdot EF;$$

$$\frac{DG}{EF} = \frac{AD}{AE}.$$

Comparînd această proporție cu cea precedentă se deduce că

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AD}{AE} \text{ sau } \frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}.$$

Am obținut teorema lui Tales. Dar demonstrația nu este corectă. De ce?

15.2.3. *Diagonala paralelogramului are lungimea zero!* În figura 9, $ABCD$ este un paralelogram, E și F sînt mijloacele laturilor AB și CD, $AF \cap$ $\cap BD = G$ și $EC \cap BD = H$. $AECF$ este un paralelogram căci $AE \parallel FC$ și $AE \equiv FC$. Rezultă că $AF \parallel EC$.

$\triangle DGF \sim \triangle BGA$ raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$, căci $DF \parallel AB$ și $DF = \frac{1}{2} AB$. Rezultă că $\frac{DG}{GB}=\frac{1}{2}$ sau, punînd $DG = x$, $GH = y$, $HB = z$,

$$\frac{x}{y+z}=\frac{1}{2}.$$

În mod analog, folosind triunghiurile asemenea HEB și HCD, se deduce că

$$\frac{z}{x+y}=\frac{1}{2}.$$

Rezultă că

$$(1) \qquad \frac{x}{y+z}=\frac{z}{x+y}.$$

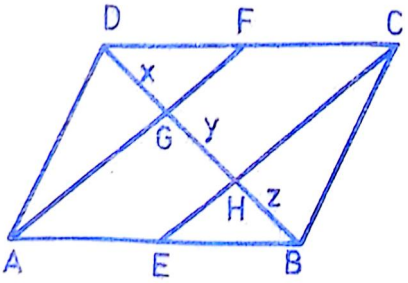


Fig. 9

De aici se deduce pe rînd:

$x^2 + xy = yz + z^2$; $x^2 - z^2 = yz -$ $- xy$; $(x - z)(x + z) = y(z - x)$;

$$(2) \quad (x - z)(x + z) = -y(x - z).$$

Simplificînd cu $x - z$ se obține $x + z = -y$, deci

$$x + z + y = 0.$$

Dar $x + z + y = BD$, deci $BD = 0$. Lungimea diagonalei BD este zero. Unde s-a greșit?

15.2.4. *Perpendiculara este congruentă cu oblica* (I). Se consideră două cercuri tangente interior (fig. 10). Din punctul A se duce tangenta AT la cercul mic și în punctul C se duce tangenta CD la cercul mic. Triunghiurile AOT și DOC sînt dreptunghice, au unghiul O comun și $OC \equiv OT$, deci sînt congruente. Rezultă că

$$(1) \qquad CD \equiv AT.$$

Pe de altă parte, calculăm segmentele AD și AT. Fie R și r razele cercurilor. În triunghiul dreptunghic ADB, $AB = 2R$ și $AC = 2R - 2r$. Teorema catetei dă

$$(2) \quad AD^2 = AB \cdot AC = 4R(R - r).$$

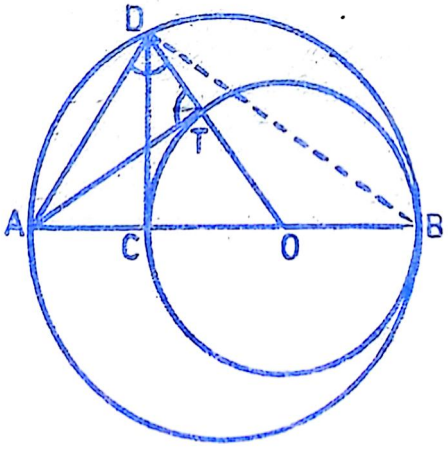


Fig. 10

În triunghiul dreptunghic AOT, $AO = 2R - r$, $OT = r$. Teorema lui Pitagora dă

$$(3) \quad AT^2 = AO^2 - OT^2 = (2R - r)^2 - r^2 = 4R(R - r).$$

Comparînd acest rezultat cu (2), rezultă că

$$(4) \qquad AD \equiv AT.$$

Din (1) și (4) rezultă că

$$(5) \qquad CD \equiv AD.$$

Or, CD și AD, adică DC și DA reprezintă perpendiculara și o oblică duse din punctul D spre dreapta AB. Deci, perpendiculara este congruentă cu oblica!

Mai mult, relația (4) înseamnă că triunghiul ADT este isoscel, deci

$$(6) \qquad \widehat{ATD} \equiv \widehat{ADT}.$$

Primul din aceste unghiuri este drept (format de rază și tangentă); unghiul ADB este drept (înscris într-un semicerc), $\widehat{ADT} < \widehat{ADB}$, deci unghiul ADT este ascuțit. Relația (6) arată deci că un unghi drept este congruent cu un unghi ascuțit!

15.2.5. *O „demonstrație" a faptului că suma unghiurilor unui triunghi este de 180°.* Fie x suma unghiurilor unui triunghi; ne propunem să aflăm acest număr. Pentru aceasta, considerăm un triunghi oarecare ABC (fig. 12) și unim vîrful A cu un punct oarecare D al laturii BC. Atunci $\hat{1}$, B și $\hat{3}$ sînt unghiurile unui triunghi, deci

$$x = \hat{1} + \hat{B} + \hat{3};$$

$\hat{2}$, $\hat{C}$ și $\hat{4}$ sînt de asemenea unghiurile unui triunghi, deci

$$x = \hat{2} + \hat{C} + \hat{4}.$$

Adunînd aceste relații și grupînd convenabil termenii, se obține

$$2x = (\hat{1} + \hat{2}) + (\hat{B} + \hat{C}) + (\hat{3} + \hat{4}).$$

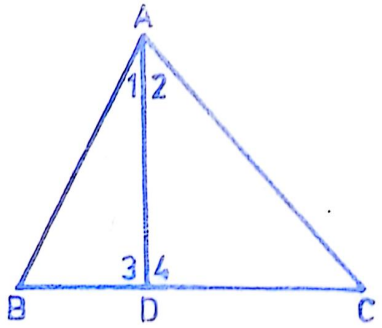


Fig. 12

Dar $\hat{1} + \hat{2} = \hat{A}$ și $\hat{3} + \hat{4} = 180°$. Făcînd aceste înlocuiri se obține

$$2x = (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + 180°.$$

$\hat{A}$, $\hat{B}$ și $\hat{C}$ sînt unghiurile unui triunghi, deci $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = x$. Înlocuind paranteza cu x, se obține

$$2x = x + 180°; \quad x = 180°.$$

Această demonstrație nu este corectă. De ce?

15.2.6. *O altă „demonstrație" a acestei teoreme.* Demonstrația se face în două etape. Se consideră întîi cazul triunghiului dreptunghic, apoi rezultatul se extinde la triunghiul oarecare.

Fie $ABCD$ un dreptunghi (fig. 13). Fiecare dintre unghiurile sale are 90°, deci suma unghiurilor sale este de $4 \cdot 90° = 360°$. Pe de altă parte, o diagonală împarte dreptunghiul în două triunghiuri dreptunghice congruente. Rezultă că unghiurile celor două triunghiuri sînt congruente două cîte două, $\hat{B} \equiv \hat{D}$, $\hat{1} \equiv \hat{2}$ și $\hat{3} \equiv \hat{4}$, deci suma unghiurilor fiecăruia din cele două triunghiuri este $360° : 2 = 180°$:

$$\hat{1} + \hat{B} + \hat{4} = 180°, \quad \hat{2} + \hat{D} + \hat{3} = 180°.$$

Așadar, suma unghiurilor unui triunghi dreptunghic este de 180°.

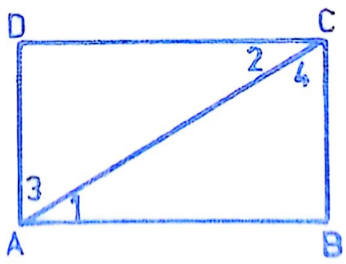


Fig. 13

Fie acum ABC un triunghi oarecare (fig. 14). Ducem înălțimea AD; se formează două triunghiuri dreptunghice,

ADB și ADC. Conform rezultatului precedent, suma unghiurilor fiecăruia din ele este de 180°:

$$\hat{1} + \hat{B} + \hat{3} = 180°, \quad \hat{2} + \hat{C} + \hat{4} = 180°.$$

Adunînd aceste relații, se obține

$$(\hat{1} + \hat{2}) + \hat{B} + \hat{C} + (\hat{3} + \hat{4}) = 360°.$$

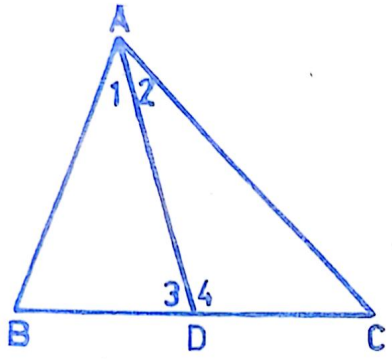
Dar $\hat{1} + \hat{2} = \hat{A}$ și $\hat{3} + \hat{4} = 180°$.

Făcînd aceste înlocuiri, se obține

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + 180° = 360°;$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°.$$

Fig. 14



Dacă punctul D nu cade între B și D, se duce înălțimea dintr-un alt vîrf, astfel ca piciorul ei să cadă în interiorul laturii opuse. Așadar, în orice triunghi, suma unghiurilor este de 180°. Ce greșeală conține această demonstrație?

15.2.7. Dobrogea are aproximativ forma unui dreptunghi. Pe o hartă făcută la scara $1 : 1\,000\,000 = 1 : 10^6$, laturile dreptunghiului sînt de 13 cm și 7 cm, deci aria lui este de 91 cm². Înmulțind cu 10^6, se obțin $91 \cdot 10^6$ cm², adică 91 ha. Rezultatul este sigur prea mic. Care este greșeala?

15.2.8. *Toate triunghiurile sînt isoscele* (!). În figura 16, ABC este un triunghi oarecare, prin vîrful A s-a dus o semidreaptă AD astfel încît unghiul 1 să fie congruent cu unghiul C și prin B s-a dus paralela la CA. Atunci $\hat{2} \equiv \hat{3}$ (alterne interne). Comparăm triunghiurile ABC și ABD. Ele au cîte două unghiuri congruente ($\hat{1} \equiv \hat{C}$ și $\hat{2} \equiv \hat{3}$), deci $\hat{D} \equiv \hat{4}$. Toate unghiurile celor două triunghiuri sînt congruente două cîte două, latura AC este comună, deci triunghiurile sînt congruente. Laturii AC i se opune în triunghiul ABC unghiul 4; $\hat{4} \equiv \hat{D}$; unghiului D i se opune în triunghiul ABD latura AB.

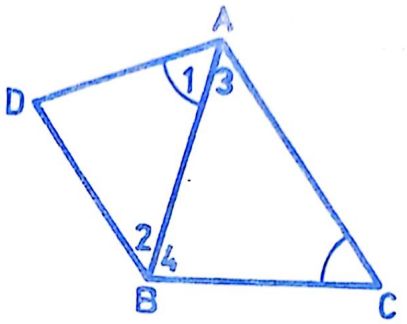


Fig. 16

Deci $AC \equiv AB$, triunghiul ABC este isoscel. Acest raționament se poate face oricare ar fi triunghiul ABC, deci orice triunghi este isoscel. Unde e greșeala?

15.2.9. *O demonstrație necompletă.* Fie ABC (fig. 17) un triunghi în care unghiurile B și C sînt ascuțite și D piciorul înălțimii care pleacă din A. Să demonstrăm că punctul D se află între B și C.

Facem demonstrația prin reducere la absurd. Presupunem că punctul D ar cădea pe prelungirea bazei dincolo de B. Unghiul B al triunghiului fiind

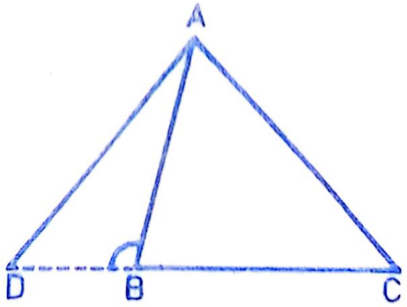


Fig. 17

ascuțit, unghiul exterior ABD este obtuz. Atunci triunghiul ABD ar avea un unghi obtuz și un unghi drept, D. Suma acestor unghiuri este mai mare decît 180°, deci suma unghiurilor acestui triunghi ar fi mai mare decît 180° — ceea ce este imposibil. Deci, punctul D aparține semidreptei BC. La fel se demonstrează că punctul D aparține semidreptei CB, deci el se află între B și C. Această demonstrație nu este completă. Ce-i lipsește? În mod analog se demonstrează că, dacă unghiul B sau C este obtuz, punctul D cade pe prelungirea bazei.

15.2.10. *Toate triunghiurile sînt echilaterale* (!). Fie ABC un triunghi oarecare (fig. 18). Ducem bisectoarea unghiului A și mediatoarea laturii BC; fie O intersecția lor. Unim O cu vîrfurile B și C și coborîm din O perpendicularele OD și OE pe AB și AC.

Triunghiurile AOD și AOE sînt dreptunghice, au ipotenuza AO comună și unghiurile din A sînt congruente, căci AO este bisectoare, deci ele sînt congruente. Rezultă că

(1) $$AD \equiv AE.$$

Triunghiurile ODB și OEC sînt și ele congruente. În adevăr, ele sînt dreptunghice, $OC \equiv OB$, căci punctul O aparține mediatoarei laturii BC, și $OD \equiv OE$, căci O aparține bisectoarei unghiului A. Rezultă că

(2) $$BD \equiv CE.$$

Scăzînd (2) din (1), rezultă că

(3) $$AD - BD \quad AE - CE.$$

Dar

(4) $$AD - BD = AB \text{ și}$$
$$AE - CE = AC.$$

Făcînd aceste înlocuiri, relația (3) devine

$$AB \equiv AC.$$

Ducînd bisectoarea unghiului B și mediatoarea laturii AC se demonstrează la fel că $AB \equiv BC$, ceea ce înseamnă că triunghiul ABC este echilateral. Unde e greșeala?

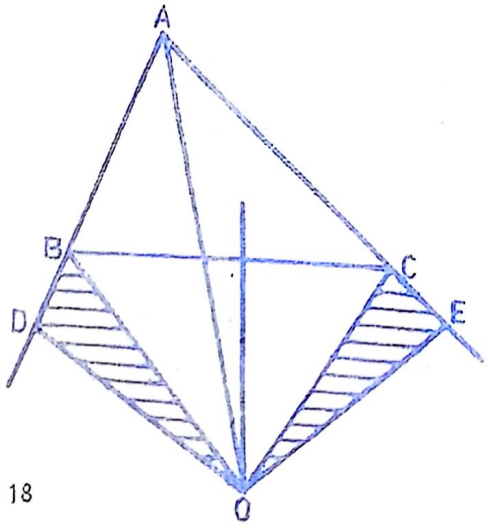


Fig. 18

15.2.11. *Reciproca teoremei catetei.* Fie ABC un triunghi (fig. 20) și AD una dintre înălțimile sale. Dacă $AB^2 = BC \cdot BD$, triunghiul este dreptunghic.

Pentru a demonstra aceasta, punem relația dată sub forma $\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$. Această proporție arată că triunghiurile ABD și CBA au două laturi proporționale. Ele au unghiul B comun, deci ele sînt asemenea, deci unghiurile lor sînt congruente două cîte două. Unghiul D al primului triunghi fiind drept, rezultă că și unghiul A al triunghiului al doilea este drept.

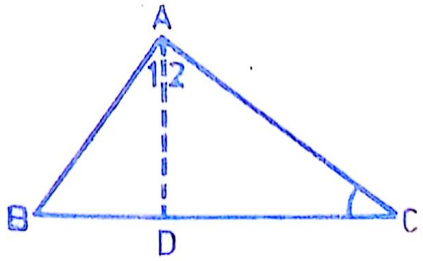


Fig. 20

Exemplul următor arată că concluzia este greşită. În triunghiul ABC din figura 21, $AB = 2$, $BC = 4$, $\hat{B} = 120°$ şi $AD \perp BC$. Triunghiul ADB dă $BD = AB \cos ABD = 2 \cdot \cos 60° = 1$.

$AB^2 = 2^2 = 4$; $BD \cdot DC = 1 \cdot 4 = 4$, deci $AB^2 = BD \cdot BC$, dar triunghiul ABC nu este dreptunghic.

Astfel de triunghiuri se construiesc foarte uşor. Pe o dreaptă se iau după voie trei puncte D, B şi C, $DC > DB$. În punctul D se ridică perpendiculara

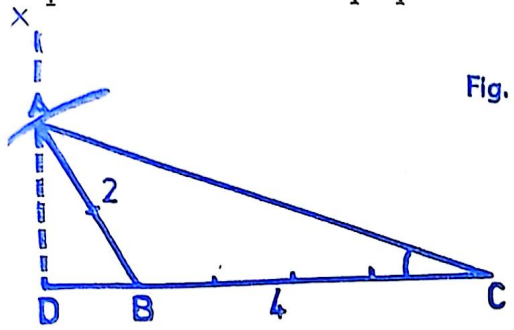


Fig. 21

Dx pe DB apoi se duce un arc de cerc cu centrul în B şi cu raza egală cu media proporţională dintre BC şi BD care să taie Dx; fie A punctul de intersecţie. Triunghiul ABC îndeplineşte condiţiile. De exemplu, se poate lua $BD = 1$, $BC = 4$, $BA = 2$; sau: $BD = 4$, $BC = 9$, $BA = 6$.

De aici rezultă că demonstraţia de mai sus este greşită. Unde e greşeala?

15.2.12. *Reciproca teoremei înălţimii.* Fie ABC un triunghi şi AD una dintre înălţimile sale (fig. 20). Dacă $AD^2 = DB \cdot DC$, triunghiul este dreptunghic.

Pentru a demonstra aceasta, punem relaţia dată sub forma $\frac{AD}{DC} = \frac{DB}{AD}$. Această proporţie arată că triunghiurile ADB şi CDA au două laturi proporţionale. Unghiurile formate de ele fiind congruente (amîndouă sînt drepte), rezultă că triunghiurile sînt asemenea. Deci unghiurile lor sînt congruente două cîte două, în special $\hat{1} \equiv \hat{C}$. Din triunghiul dreptunghic ADC rezultă că $\hat{C} + \hat{2} = 90°$. Înlocuind aici C prin 1, se obţine $\hat{1} + \hat{2} = 90°$. Dar $\hat{1} + \hat{2} = \widehat{BAC}$, deci $\widehat{BAC} = 90°$.

Concluzia este greşită, după cum arată exemplul următor. Dacă într-un triunghi ABC ca cel din figura 21, $BC = AB = a$ şi $\hat{C} = 30°$, deci $\widehat{ABD} = 60°$ şi $AD \perp BC$,

$$DB = AB \cos 60° = \frac{a}{2};$$

$$AD = AB \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$DC = \frac{3a}{2}.$$

Deci

$$AD^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4};$$

$$DB \cdot DC = \frac{a}{2} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{3a^2}{4};$$

$$AD^2 = DB \cdot DC.$$

Condiţia din ipoteză este îndeplinită, dar triunghiul ABC nu este dreptunghic. Înseamnă că demonstraţia de mai sus este greşită. Unde e greşeala?

15.2.13. *Concluzia nu justifică ipoteza.* Pentru a demonstra că media aritmetică a două numere pozitive este cel puţin egală cu media lor geometrică, procedăm astfel. Fie a şi b două numere pozitive. Scriem că

$$(1) \qquad \frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}.$$

De aici deducem succesiv:

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab;\quad (a+b)^2 \geqslant 4ab;$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab;$$

$$a^2 \quad 2ab + b^2 \geqslant 0.$$

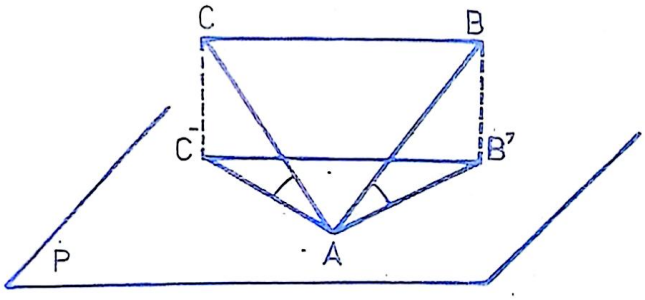
Deci

$$(a-b)^2 \geqslant 0. \tag{2}$$

Am obținut o relație care este sigur adevărată căci pătratul numărului $a-b$ nu poate fi negativ, deci relația (1) este demonstrată. Această demonstrație este greșită. Unde e greșeala?

15.2.14. *Un triunghi în care o latură este mai mare decît suma celorlalte două* (!) În figura 24, ABC reprezintă un triunghi dreptunghic isoscel, $AB \perp AC$. Vîrful A este în planul P, B' și C' sînt proiecțiile punctelor B și C pe planul P și unghiurile pe care le formează catetele AB și AC în planul P au cîte 60°.

Fig. 24



Calculăm laturile triunghiului $AB'C'$. Fie $AB = a$. Triunghiul dreptunghic $AB'B$ dă $AB' = AB\cos 60° = \frac{a}{2}$; la fel se află că $AC' = \frac{a}{2}$. Pentru a afla $B'C'$, calculăm BC din triunghiul ABC, $BC = a\sqrt{2}$. Apoi, $\triangle ABB' \equiv \triangle ACC'$ (ULU), deci $BB' \equiv CC'$. Rezultă că $C'B'BC$ este un dreptunghi, deci $C'B' = CB = a\sqrt{2}$. Așadar, laturile triunghiului $AB'C'$ sînt: $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$ și $a\sqrt{2}$. Suma primelor două laturi este $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, iar $a < a\sqrt{2}$. Unde e greșeala?

15.2.15. *Un trunchi de piramidă ciudat.* Baza mare a unui trunchi de piramidă (fig. 25) este un triunghi cu laturile (în cm) $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 10$ și baza mică este un triunghi cu laturile $A'B' = 4$, $B'C' = 5$, $C'A' = 7$. Muchia A' este perpendiculară pe planul bazei și $AA' = i$. Pentru a afla înălțimea piramidei de la care provine trunchiul, considerăm triunghiurile asemenea $VA'B'$ și VAB. Dacă notăm VA' cu x, obținem

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB};\quad \frac{x}{x+i} = \frac{3}{4};$$

$$x = 3i;\quad VA = 4i.$$

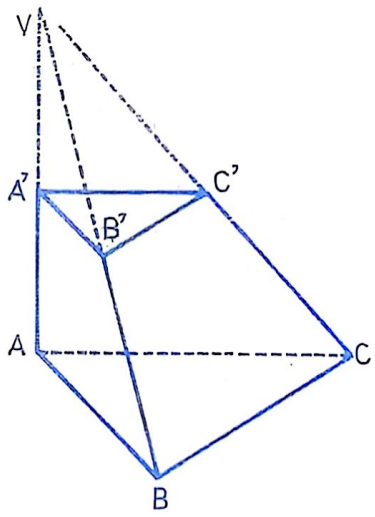


Fig. 25

Dacă folosim triunghiurile asemenea $VA'C'$ și VAC, obținem

$$\frac{VA'}{VA} = \frac{A'C'}{AC};\quad \frac{x}{x+i} = \frac{7}{10};$$

$$x = \frac{7i}{3};\quad VA = \frac{10i}{3}.$$

Cum se explică această contradicție? Care dintre cele două rezultate este cel bun?

15.2.16. *Un triunghi în care o latură este egală cu suma celorlalte două* (!). Considerăm o piramidă patrulateră regulată în care fețele laterale sînt triunghiuri dreptunghice (fig. 26); fie m lungimea muchiilor ei laterale. Teorema

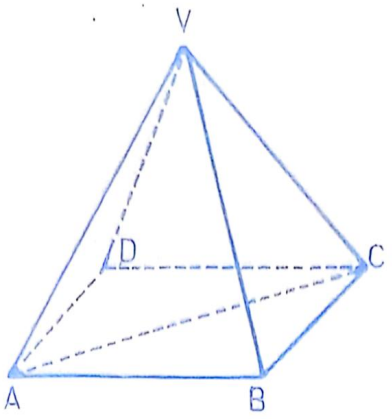


Fig. 26

lui Pitagora, aplicată în triunghiul VAB, dă $AB = m\sqrt{2}$. Aceeași teoremă, aplicată în triunghiul ABC, dă

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = (m\sqrt{2})^2 + (m\sqrt{2})^2 = 2m^2 + 2m^2 = 4m^2;$$

$AC = 2m$. Acum în triunghiul VAC, $VA = m$, $VC = m$, $AC = 2m$, adică $VA + VC = AC$. Unde e greșeala?

15.2.17. *Un triunghi în care ipotenuza este mai mică decît o catetă* (!). Considerăm o piramidă hexagonală regulată în care unghiurile de la vîrf ale fețelor laterale au cîte 90° (fig. 27). Fie VM apotema piramidei, ea este bisectoarea unghiului BVC, deci $\widehat{BVM} = 45°$, deci triunghiul BVM este isoscel, deci

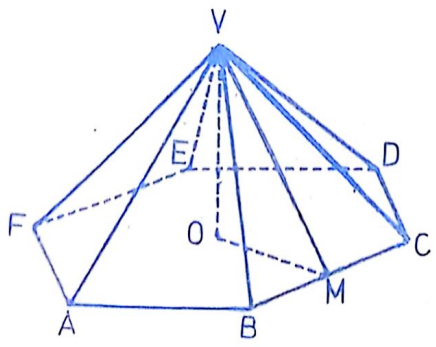


Fig. 27

$VM = MB = \frac{a}{2}$, unde a este latura hexagonului. Fie VO înălțimea piramidei. Piramida fiind regulată, O este centrul bazei, deci OM este apotema hexagonului, $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Or, triunghiul VOM este dreptunghic, $VM = \frac{a}{2}$ și $OM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $\frac{a}{2} < \frac{a\sqrt{3}}{2}$, deci ipotenuza este mai mică decît o catetă. Unde e greșeala?

15.3. Diverse

15.3.1. Capitalele a trei județe sînt reprezentate prin trei puncte A, B și C. Să se traseze hotarele dintre aceste județe astfel încît distanța de la fiecare localitate la capitala județului din care face parte să fie minimă. Se consideră numai teritoriul situat în interiorul triunghiului ABC. Se vor examina cazurile cînd triunghiul ABC este ascuțitunghic, obtuzunghic și dreptunghic.

15.3.2. Fie ABC un triunghi echilateral, k semicercul cu diametrul BC situat de aceeași parte a dreptei BC cu vîrful A, $k \cap AB = D$ și $k \cap AC = E$. a) Să se compare segmentul AD cu DB și AE cu EC. b) Ce fel de patrulater este $ADOE$, O fiind mijlocul laturii BC. c) Ce poziție are dreapta DE față de BC?

15.3.3. Fie ABC un triunghi ascuțitunghic, A' simetricul lui A, față de dreapta BC, B' simetricul lui B față de AC și C' simetricul lui C față de AB.

Fie $\mathcal{A}$ aria triunghiului ABC și $\mathcal{A}'$ aria celui mai mic poligon convex care conține punctele A, B, C, A', B' și C' (ca puncte ale laturilor sau interioare). Să se demonstreze că $\mathcal{A}' \geqslant 4\mathcal{A}$. În ce caz este $\mathcal{A}' = 4\mathcal{A}$?

15.3.4. Fie AB un segment. Prin capetele sale se duc două semidrepte paralele Ax și By situate de o parte și de alta a dreptei AB. Printr-un punct M al segmentului AB se duce o dreaptă d și se notează cu C și D intersecțiile ei cu Ax și By, $C \in Ax$. Să se demonstreze că, dacă punctul M descrie segmentul AB și dreapta d își păstrează direcția, suma perimetrelor triunghiurilor AMC și BMD rămîne constantă.

15.3.5. O foaie de hîrtie este liniată ca în figura 35; liniile orizontale sînt paralele între ele, de asemenea și cele oblice; liniile oblice determină pe oricare dintre liniile orizontale segmente congruente și invers. De ce sînt punctele marcate prin rotogoale coliniare? de asemenea cele marcate prin cruciulițe.

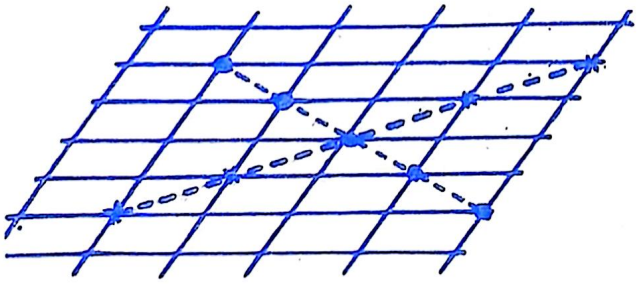


Fig. 35

15.3.6. Fie AB un segment și Bx prelungirea lui dincolo de B. Prin punctul A se duce o semidreaptă Ay care formează cu Ax un unghi ascuțit și prin B se duce o semidreaptă Bz situată în aceeași parte a dreptei Ax cu prima și astfel încît unghiul zBx să fie dublul unghiului yAx. Fie $Ay \cap Bz = M$. Semidreapta Ay se rotește în jurul punctului A. La început ea coincide cu Ox și mișcarea încetează cînd $AM \perp AB$. Pe ce linie se mișcă punctul M?

15.3.7. O scară AB (fig. 39) este rezemată de un zid vertical Oy; terenul Ox este orizontal. Scara se mișcă, capătul A alunecă pe pămînt și capătul B de-a lungul zidului. Fie M mijlocul scării. Ce linie descrie punctul M?

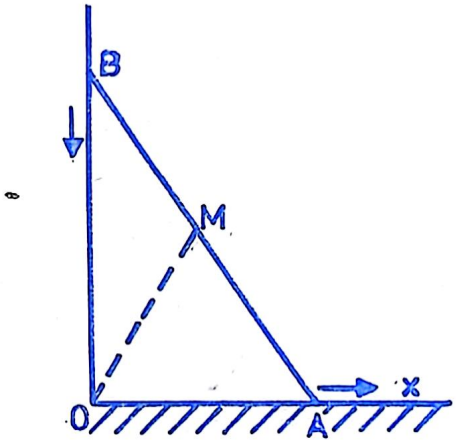


Fig. 39

15.3.8. Se consideră un paralelogram $ABCD$, $AB \parallel CD$, A opus lui C. Printr-un punct oarecare M al diagonalei AC se duc paralelele la laturile paralelogramului; fie N, P, Q și R intersecțiile lor cu ele, $N \in AD$, $P \in BC$, $Q \in AB$. Să se demonstreze că: a) $NQ \parallel PR$; b) cînd punctul M descrie diagonala AC, suma $NQ + RP$ rămîne constantă; c) aria patrulaterului $NQPR$ rămîne constantă.

15.3.9. *Problema biliardului.* Cînd o bilă A (fig. 41) se loveşte de un obstacol xx' (cînd o minge se loveşte de pămînt), ea se reflectă astfel încît unghiul de incidenţă i să fie congruent cu unghiul de reflexie r, $\hat{i} \equiv \hat{r}$ ($MN \perp xx'$). a) Fie Cx şi Cy două margini vecine ale unei

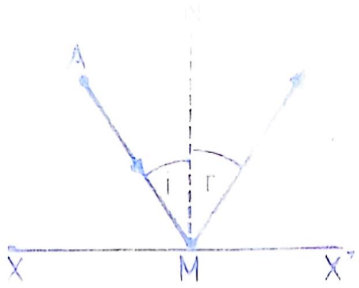


Fig. 41

mese de biliard. Pe masă se găsesc două bile A şi B. Prima din aceste bile trebuie lansată astfel încît să se lovească de marginea Cx a mesei şi apoi să se ciocnească cu bila B. Să se traseze drumul ei. b) Aceeaşi problemă dacă se cere ca bila A să se ciocnească cu bila B după ce s-a lovit de marginile Cx şi Cy ale mesei.

15.3.10. Se consideră un triunghi echilateral înscris într-un cerc. Să se ducă o coardă paralelă cu o latură a triunghiului astfel încît celelalte laturi ale triunghiului să o împartă în trei părţi congruente.

15.3.11. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $AB \perp AC$, $AB < AC$. Se ia un punct oarecare M al ipotenuzei BC; fie D simetricul lui M faţă de AB şi E simetricul lui M faţă de AC. a) Să se demonstreze că punctele D, A şi E sînt coliniare. b) Triunghiul DME este dreptunghic. c) Să se compare segmentul DE cu AM. d) Cum trebuie ales punctul M pe ipotenuză ca segmentul DE să fie minim? e) Cunoscînd unghiurile triunghiului ABC, să se afle unghiul ascuţit format de dreptele DE şi BC cînd DE este minim.

15.3.12*. Se dă un segment AB. Să se determine două puncte ale sale M şi N, M mai aproape de A, astfel încît să se poată construi un triunghi ale cărui laturi să fie congruente cu AM, MN şi NB. (Să se determine pe o vergea două puncte astfel încît, încovoind vergeaua în acele puncte, să se poată forma un triunghi.)

15.3.13. Se dă un pătrat cu latura a. Să se construiască un alt pătrat a cărui arie să fie: a) $5a^2$; b) $\frac{a^2}{3}$; c) $\frac{m}{n}a^2$, unde $\frac{m}{n}$ este o fracţie dată.

15.3.14. a) Să se facă într-un dreptunghi o tăietură paralelă cu una dintre laturile lui astfel încît una dintre părţi să fie asemenea cu dreptunghiul iniţial. b) Se poate ca cele două părţi ale dreptunghiului să fie asemenea între ele? c) Aceeaşi problemă în cazul unui paralelogram.

15.3.15. a) Fie $ABCD$ un tablou dreptunghiular cu dimensiunile $AB=a$, $BC=b$ (fig. 48). Vrem să-i facem o ramă care să aibă peste tot aceeaşi lăţime şi astfel încît dreptunghiul $EFGH$ să fie asemenea cu $ABCD$. Ce lăţime trebuie să aibă rama? b) Ce

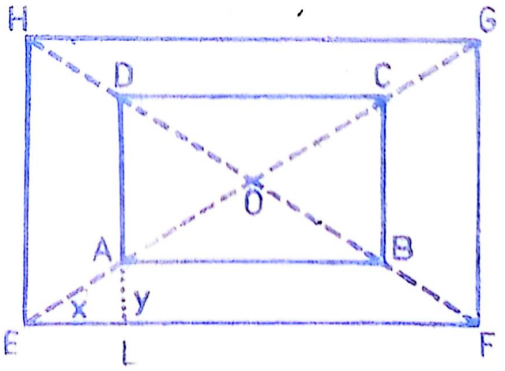


Fig. 48

lățime trebuie să aibă părțile din ramă paralele cu AB și cele paralele cu CD ca dreptunghiurile să fie asemenea. c) Aceeași problemă în cazul unui tablou în formă de paralelogram.

15.3.16. Fie $ABCD$ un trapez. a) Se ia un punct oarecare M al bazei mici DC. Să se determine un punct N al bazei mari astfel încît dreapta MN să împartă trapezul în două părți echivalente. b) Punctul N există oricare ar fi punctul M? Ce poziție ocupă punctul N cînd punctul M coincide cu D? cu C? Se va da și o construcție geometrică. c) Să se demonstreze că, dacă punctul M descrie baza DC, dreapta MN se rotește în jurul unui punct fix.

15.3.17. Într-un cerc se duce un diametru AB și o coardă CD perpendiculară pe el; fie $CD \cap AB = T$. Se construiesc cercul cu diametrul AT și cercul cu diametrul TB. Se dă lungimea segmentului CT $(= c)$. Să se afle aria părții din cercul mare exterioară cercurilor mici.

15.3.18. În figura 52, ABC este un triunghi dreptunghic, D este piciorul înălțimii sale, E proiecția punctului D pe AB și F proiecția aceluiași punct pe AC. Să se demonstreze că între triunghiurile AEF și ABC există relația următoare: înălțimea fiecăruia dintre ele este mediana celuilalt.

15.3.19. Fie ABC un triunghi oarecare. Printr-un punct oarecare M al laturii AC se duce $MN \parallel CB$ și $MP \parallel AB$, $N \in AB$, $P \in BC$. Să se demonstreze că

$$\frac{MN}{BC} + \frac{MP}{AB} = 1.$$

15.3.20. Se consideră un triunghi ascuțitunghic ABC. Se dau baza $BC = a$ și înălțimea $AE = i$. Printr-un punct M al înălțimii se duce paralela la BC; fie N și P intersecțiile ei cu AB și AC, $N \in AB$. Din N și P se coboară perpendicularele pe BC; fie Q și R picioarele lor. Se pune

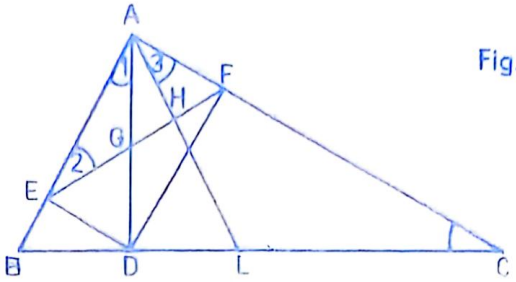


Fig. 52

$AM = x$. a) Să se studieze variația perimetrului dreptunghiului $QRPN$ cînd punctul M descrie înălțimea AE. Se vor deosebi cazurile $a > i$, $a < i$ și $a = i$. b) Cît de mare poate fi numărul s ca perimetrul să poată deveni egal cu s. (Alte probleme de acest tip sînt 8.7.11 și 8.7.12.)

15.3.21. Într-un cerc se duce o coardă AB și în punctele A și B se duc tangentele la el; fie C intersecția lor și O centrul cercului. Figura se rotește cu 180° în jurul dreptei OC. Să se determine distanța de la punctul O la coarda AB astfel încît raportul dintre aria conului descris de tangente și aria calotei descrise de arcul AB să fie egal cu un număr dat k. Ce valori poate avea numărul k pentru ca problema să aibă o soluție?

15.3.22. În figura din problema precedentă, să se determine distanța de la centrul cercului la coardă astfel încît raportul dintre ariile laterale ale conurilor descrise de triunghiurile CAB și OAB să fie un număr dat k. Ce valori poate avea k pentru ca problema să aibă o soluție?

15.3.23. Din toate dreptunghiurile care au același perimetru, care are diagonala cea mai mică?

SOLUŢII

Cap. 1

1.1.1. a) Două paralele împart planul în trei părţi; fiecare dreaptă nouă introduce o parte nouă; $(n + 1)$ părţi. b) Două drepte concurente împart planul în 4 părţi; fiecare dreaptă nouă traversează două părţi, deci introduce două părţi noi; $2n$ părţi. c) Primele m paralele împart planul în $(m + 1)$ părţi şi fiecare dreaptă din rîndul al doilea de paralele adaugă cîte $n + 1$ părţi; $(n + 1)(m + 1)$ părţi. d) Cele c drepte concurente împart planul în $2c$ părţi. Fiecare dintre dreptele paralele, întîlnind cele c drepte în puncte diferite, adaugă $(c + 1)$ părţi; $2c + p(c+1)$ părţi.

1.1.2. a) Numărul de puncte este $n - 1$. b) Dacă n este un număr prim, una dintre laturile paralelogramului se împarte în n părţi şi prin punctele de diviziune se duc paralelele la cealaltă latură (fig. 1). Trebuie $(n - 1)$ tăieturi. Dacă n este un număr neprim, se fac tăieturi paralele cu ambele laturi ale paralelogramului, căci o singură tăietură transversală taie toate părţile obţinute prin tăieturi longitudinale. Figura 2 arată cum se procedează în cazul $n = 15$.

$15 = 3 \cdot 5$; $3 - 1 = 2$; $5 - 1 = 4$; $2 + 4 = 6$. Se fac în total 6 tăieturi.

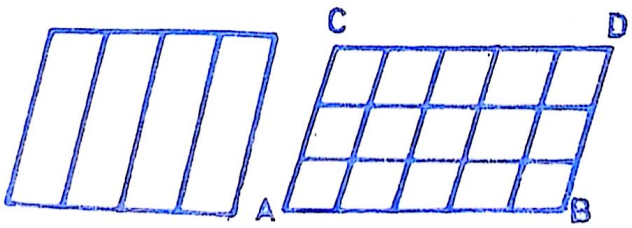


Fig. 1

Fig. 2

În general, numărul n se pune sub forma de produs de doi factori (diferiţi de 1), $n = pq$. Se fac $(p - 1)$ tăieturi paralele cu AB şi $(q - 1)$ tăieturi paralele cu CD. Numărul total de tăieturi este

$$t = (p - 1) + (q - 1) = p + q - 2.$$

Dacă numărul n se poate descompune în mai multe moduri în doi factori, se alege descompunerea în care suma factorilor este cea mai mică. Exemple: $n = 24$, $t = 8$; $n = 50$, $t = 13$; $n = 64$, $t = 14$.

1.1.6. 6 puncte.

1.1.7. a) Dacă tăietura este AD, segmentul AD devine latură la fiecare din cele două părţi, deci numărul laturilor creşte cu 2; $p = n + 2$. b) Dacă tăietura este AR, din latura CD se fac două laturi CR şi RD, deci se cîştigă o latură, şi segmentul AR devine latură la ambele părţi; $p = n + 3$. c) În cazul unei tăieturi ca ST, $p = n + 4$.

1.2.1. a) Suma rămîne constantă (neschimbată), egală cu AB; b) Diferenţa rămîne constantă, egală cu AB. c) Acelaşi răspuns.

1.2.2. Este indiferent.

1.2.3. Luăm punctul A la stînga lui B (fig. 7). Dacă M este la stînga lui A, $AB = MB - MA$; dacă M este la dreapta lui B, $AB = MA - MB$;

dacă M este între A și B sau coincide cu unul din aceste puncte, $AB = MA + MB$.

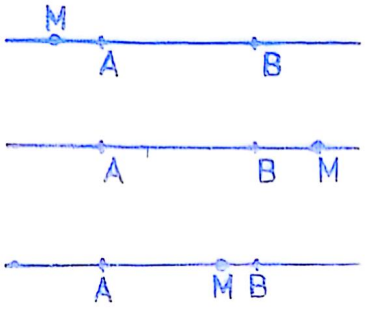


Fig.

1.2.4. a) $AC = 9$ cm sau $AC = 5$ cm, b) 17 cm sau 3 cm.

1.2.5. $MN = \frac{a}{2} + \frac{b}{2}$.

1.2.6. a) 3; 11; 16; 8; 13. b) $\frac{a}{3}$; $\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}b$; $\frac{2}{3}a + \frac{2}{3}b$; $\frac{a}{3} + \frac{b}{3}$; $\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$.

1.2.7. Se află distanța AB și se împarte la 2. a) $OM = 46$. b) $OM = 11$.

1.2.8. Totdeauna $BC < AB + AC$ și $AB > BC - AC$.

1.2.9. Totdeauna mediana este mai mică decît media aritmetică a laturilor care pornesc din același vîrf cu ea și suma medianelor este mai mică decît perimetrul.

1.2.10. Totdeauna suma lungimilor diagonalelor este mai mică decît perimetrul.

1.2.11. a) Da. b) Oricare din ele este între celelalte două. c) Da.

1.3.1. Suma este apropiată de 180°.

1.3.2. Suma este apropiată de 360°.

1.3.3. Suma este apropiată de 360°.

1.3.4. Fie ABC triunghiul. Se măsoară unghiul A. Dacă, de exemplu, $\hat{A} = 72°$, se duce o semidreaptă Ax situată în interiorul unghiului BAC care face cu AB un unghi de (72°:2=) 36°.

1.3.7. Se ridică în vîrful unghiului perpendiculara pe o latură.

1.3.8. Dacă privim hîrtia de 10 lei ca un întreg și costul cărții ca o parte, banii care se dau rest reprezintă complementul (suplementul) ei.

1.3.9. a) 45°. b) 30°. c) 180°. d) 90°; 60°; 360°.

1.3.10. 45°; 90°.

1.3.11. a) 30°; 60°. b) 60°; 120°.

1.3.12. a) Unul este ascuțit și celălalt este obtuz sau amîndouă sînt drepte: b) Amîndouă sînt ascuțite.

1.3.13. Se prelungește una dintre laturi dincolo de vîrf.

1.3.14. $\hat{1} \equiv \hat{2}$, căci în figura 24 aceste unghiuri coincid; figura 25 arată că suma lor este de 180°. Deci, fiecare din ele are $180° : 2 = 90°$.

1.3.15. Unghiul u este suplementul lui x, de asemenea unghiul v, deci $\hat{u} \equiv \hat{v}$. Unghiurile u și v sînt opuse la vîrf, deci...

1.3.16. $\hat{x} = 60°$.

1.3.17. 52°.

1.3.18. Cîte grade are suma unghiurilor AOC și BOD? Suma jumătăților lor? $\widehat{EOF} = 45° + 90° = 135°$.

1.3.19. a) Nu. b) Nu. c) Da. d) Da. e) Nu.

1.3.20. 65°.

1.3.21. Unghiul BDC trebuie să aibă 48°.

1.3.22. 71°.

1.3.23. Se măsoară unghiul opus la vîrf cu el.

1.3.24. 50°; 130°; 130°.

1.3.25. 74°; 74°; 106°; 106°.

1.3.26. a) În figură mai există un unghi congruent cu unghiul 1? cu unghiul 2? cu unghiul 3? Unghiurile din figură sînt congruente două cîte două. Cîte grade are suma tuturor unghiurilor din figură? Suma cerută este $360° : 2 = 180°$. b) Același răspuns. c) Unghiurile nu se pot afla.

1.3.27 (fig. 20). Fie AOB și COD cele două unghiuri, iar OM și ON bisectoarele lor. Cîte grade are unghiul

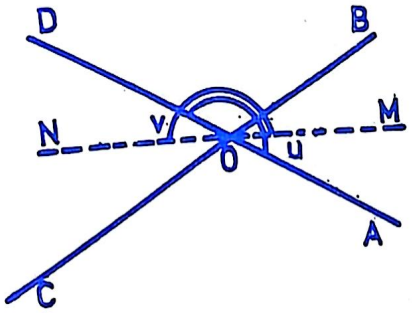


Fig. 20

AOD? Pentru a obține unghiul MON, se scade unghiul u și se adaugă unghiul v. Care din aceste unghiuri este mai mare? $\hat{u} \equiv \hat{v}$, deci $\widehat{MON} = \widehat{AOD} = 180°$. Bisectoarele sînt în prelungire.

1.3.28. Unghiurile 1 și 2 sînt suplementare și s-a dat că $\hat{1} = \widehat{COD}$, deci unghiurile 2 și COD sînt suplementare. Ele sînt și adiacente (latura OC este comună), deci OD și OB sînt în prelungire.

1.3.29. a) 6°. b) 30°. c) 30°. d) 30′.

1.3.30. a) Cu cîte grade a înaintat acul mare de la ora 12 fix? dar acul mic? Unghiul cerut are $30° - 2°30′ = 27°30′$. b) $60° - 5° = 55°$. c) $90° - 7°30′ = 82°30′$. d) $120° - 10° = 110°$. e) $150° - 12°30′ = 137°30′$; f) $180° - 15° = 165°$. În 5 minute, acul mare înaintează cu 30° și acul mic cu 2°30′, deci unghiul dintre ele crește cu $30° - 2°30′ = 27°30′$. Toate rezultatele începînd cu al doilea se obțin înmulțind primul rezultat cu 2, 3, 4 ș.a.m.d.

1.3.31. a) În cele 5 minute care au trecut de la ora 1, acul mare a ajuns în dreptul cifrei 1, unde se găsea acul mic. În acest timp, acul mic a înaintat cu 2°30′, deci unghiul cerut are 2°30′. b) 5°. c) 7°30′. d) 10°. În momentele considerate, acul mic este înaintea acului mare cu un unghi congruent cu unghiul descris de acul mic în 5, 10, 15, ... minute. Rezultatele se obțin înmulțind 2°30′ cu 2, 3, 4 ...

1.3.32. a) 90°. b) 90°. c) 90°; d) 45°. e) 45°. f) 45°. g) 22°30′. h) 22°30′. i) 90°.

1.3.33. a) 72°. b) 180°. c) 216°.

1.3.34. Fie AOC, COB (fig. 25) unghiurile considerate și Ox, Oy bisectoarele lor. Am notat cu u și v jumătățile unghiurilor. Suma unghiurilor întregi este de 180°, deci suma jumătăților lor este de $180° : 2 = 90°$, $u + v = 90°$.

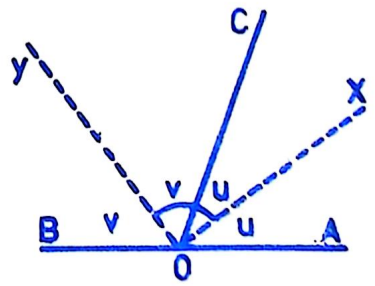


Fig. 25

Apoi $\widehat{xOy} = \widehat{xOC} + \widehat{COy} = u + v$, deci $\widehat{xOy} = 90°$.

Observări. 1) Este remarcabil faptul că rezultatul este independent de poziția semidreptei OC. Dacă această semidreaptă se rotește în jurul punctului O, unghiurile AOC și COB variază, bisectoarele se rotesc în jurul punctului O, dar unghiul dintre ele rămîne constant, de 90°.

2) Considerăm un segment AB, de exemplu de 5 cm (fig. 26). Fie C un punct oarecare al segmentului, x mijlocul segmentului AC și y mijlocul segmentului CB. Să se afle lungimea seg-

Fig. 26

mentului xy. Ea depinde de poziția punctului C? Să se compare această problemă cu cea precedentă. Totuși între aceste probleme există o deosebire esențială. În problema a doua, lungimea segmentului xy se poate afla numai dacă ni se dă lungimea segmentului AB, pe cînd în prima problemă nu e nevoie să ni se dea unghiul AOB.

1.3.35. Unghiurile AOA' și $A'OB$ sînt adiacente cu laturile necomune în prelungire, iar OC și OD sînt bisectoarele lor (v. probl. 1.3.34).

1.3.36. a) $yu = yC + Cu$. Dar $yC = \frac{AC}{3}$ și $Cu = \frac{CB}{3}$, deci

$$yu = \frac{AC}{3} + \frac{CB}{3} = \frac{AC + CB}{3} =$$

$$= \frac{AB}{3} = \frac{6}{3} = 2 \text{ cm}.$$

În mod analog se află că $xv = 4$ cm.

b) $\widehat{yOu} = \widehat{yOC} + \widehat{COu}$,

$$\widehat{yOC} = \frac{\widehat{AOC}}{3}, \quad \widehat{COu} = \frac{\widehat{COB}}{3},$$

deci

$$\widehat{yOu} = \frac{\widehat{AOC}}{3} + \frac{\widehat{COB}}{3} =$$

$$= \frac{\widehat{AOC} + \widehat{COB}}{3} = \frac{180°}{3} = 60°.$$

În mod analog se află că $\widehat{xOv} = 120°$.

Observare. Partea a doua se obține din prima formal astfel: în loc de yu, se scrie yOu; în loc de yC se scrie yOC ș.a.m.d. Se intercalează mereu litera O.

1.3.37. Fie OC și OD cele două semidrepte (fig. 30). Se cere relația dintre unghiurile AOB și COD. Cîte grade are suma unghiurilor u și x? suma unghiurilor v și x? Unghiurile u și v au același complement, deci ele sînt congruente, $\hat{u} \equiv \hat{v}$.

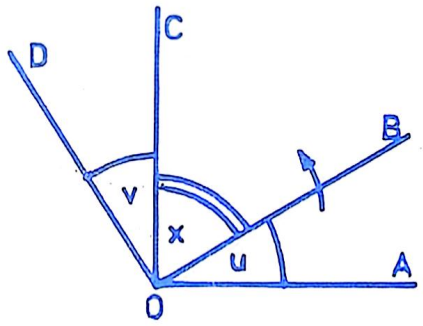


Fig. 30

Pentru a vedea care sînt toate cazurile posibile, ducem prin punctul O dreptele CC' și DD' respectiv perpendiculare pe OA și OB (fig. 31). Unghiul al doilea poate fi COD, $C'OD'$, DOC' sau $D'OC$. Dar primele două unghiuri sînt congruente, ca unghiuri opuse la vîrf, de asemenea ultimele două. Este deci suficient să comparăm unghiul AOB cu unghiurile COD $(= \hat{1})$ și DOC' $(= \hat{2})$. Am demonstrat că $\hat{1} \equiv \hat{u}$. Apoi unghiurile 1 și 2 sînt suplementare, $\hat{1} + \hat{2} = 180°$. Înlocuind aici 1 prin u, rezultă că $\hat{u} + \hat{2} = 180°$, adică unghiurile AOB și DOC' sînt suple-

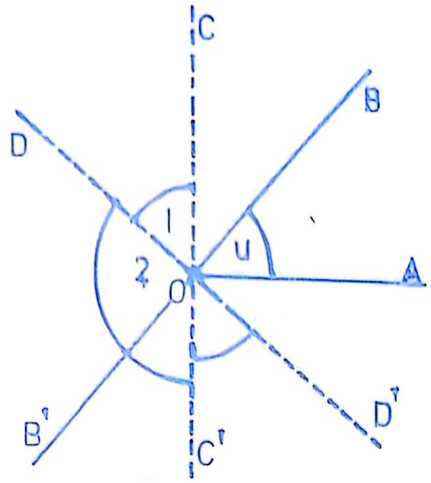


Fig. 31

mentare. În concluzie, unghiul dat și cel format de perpendiculare sînt congruente sau suplementare.

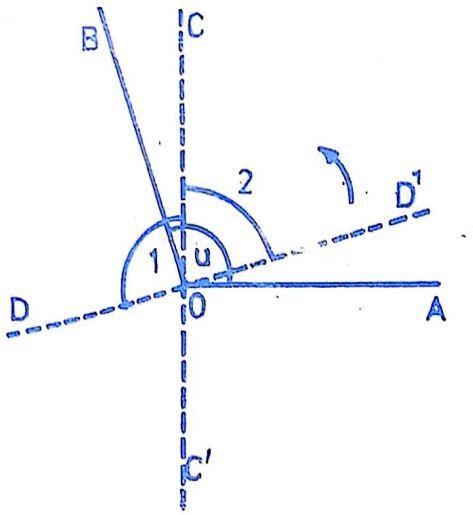


Fig. 32

Figura 32 reprezintă cazul cînd unghiul dat AOB este obtuz. Unghiul format de perpendiculare poate fi COD $(= \hat{1})$ sau $D'OC$ $(= \hat{2})$. Unghiul DOC' nu interesează căci este congruent cu COD', nici unghiul $C'OD'$. Avem:

$$\hat{u} = \widehat{AOB} = \widehat{AOC} + \widehat{COB} = 90° + \widehat{COB}, \hat{1} = \widehat{COD} = \widehat{COB} + \widehat{BOD} = \widehat{COB} + 90°.$$

Am obținut pentru unghiurile u și 1 același rezultat, deci $\hat{1} \equiv \hat{u}$.

Apoi, unghiurile 1 și 2 sînt suplementare, $\hat{1} + \hat{2} = 180°$. Înlocuind aici 1 ou u, rezultă că $\hat{u} + \hat{2} = 180°$, adică unghiurile AOB și $D'OC$ sînt suplementare. Deci, concluzia este aceeași ca în cazul cînd unghiul AOB este ascuțit.

Observări. 1) Faptul că în figurile 30 și 32 $\widehat{COD} \equiv \widehat{AOB}$ se poate stabili și astfel: Rotim unghiul AOB cu 90° în jurul punctului O în sensul indicat de săgeată în figura 30. Atunci OA se suprapune ou OC și OB cu OD, deci unghiurile coincid.

2) Același lucru se poate ilustra și astfel: Considerăm în figurile 30 și 32 unghiul drept AOC ca fiind rigid (format de laturile unui echer). Ținem punctul O fix și rotim latura OA cu un unghi oarecare u. Atunci latura OA devine OB, unghiul AOC devine unghiul drept BOD și latura OC devine OD, rotindu-se cu un unghi COD. Unghiul AOC fiind rigid, unghiul cu care se rotește OC este congruent cu unghiul cu care se rotește OA, deci $\widehat{COD} \equiv \hat{u}$.

3) Figura 32 nu este necesară, cazul cînd unghiul dat este obtuz se poate deduce tot din figura 31: n-avem decît să inversăm rolul dreptelor, adică să considerăm că unghiul inițial este format de dreptele CC' și DD', iar perpendicularele sînt OA și OB. Dacă unghiul inițial este DOC' $(= \hat{2})$ unghiul format de perpendiculare poate fi AOB $(= \hat{u})$ sau AOB' (sau un unghi opus la vîrf cu unul din ele). S-a demonstrat că unghiurile AOB și DOC' sînt suplementare. Cît despre unghiurile DOC' și AOB' avem:

$$\widehat{DOC'} = \widehat{DOB'} + \widehat{B'OC'} = 90° + \widehat{B'OC'},$$

$$\widehat{AOB'} = \widehat{AOC'} + \widehat{B'OC'} = 90° + \widehat{B'OC'},$$

deci $\widehat{DOC'} \equiv \widehat{AOB'}$.

1.3.38. a) Fie AOB și COD cele două unghiuri (fig. 33), $OC \perp OA$, $OD \perp OB$ și Ox, Oy bisectoarele lor. Complementul unghiului AOB este unghiul BOC,

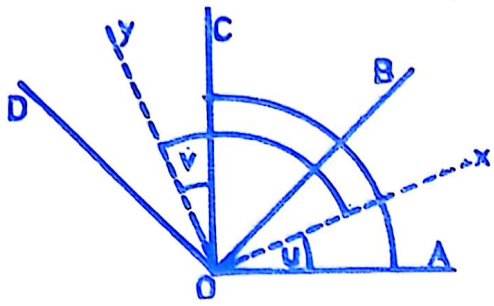


Fig. 33

care este și complementul unghiului COD, deci $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$. Rezultă că și jumătățile acestor unghiuri sînt congruente, $\hat{u} \equiv \hat{v}$. Dacă din unghiul xOy scădem unghiul v și-i adăugăm unghiul u, obținem unghiul COA congruent cu el, căci ceea ce s-a scăzut într-o parte s-a adăugat în cealaltă parte. Dar $\widehat{COA} = 90°$, deci și $\widehat{xOy} = 90°$. Bisectoarele sînt perpendiculare. Figurile 34 și 35 reprezintă celelalte două cazuri. Bisectoarele coincid sau sînt în prelungire.

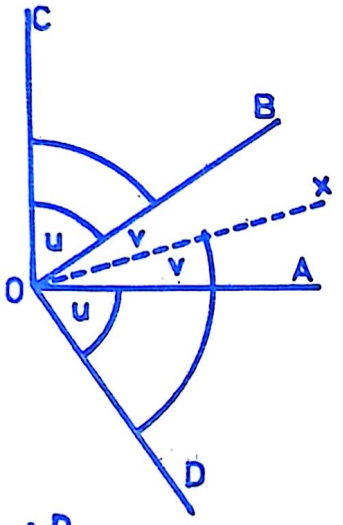


Fig. 34

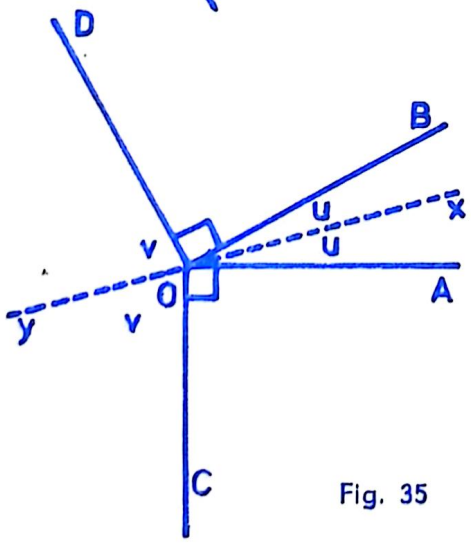


Fig. 35

Observare. În cazul figurii 33 rezultatul este evident. Rotim unghiul AOB împreună cu bisectoarea lui cu 90° în jurul punctului O. Atunci el devine COD și bisectoarea Ox devine bisectoarea Oy. Aceasta înseamnă că o rotație cu 90° duce Ox în Oy, deci $Oy \perp Ox$.

1.3.39. a) Prin ipoteză, avem (fig. 36):

(1) $AN = \frac{1}{2} AM$,

(2) $AN' = \frac{1}{2} AM'$.

Se vede că

(3) $AM' = AM + MM'$,

(4) $AN' = AN + NN'$.

Din (2) și (3) rezultă că

$$AN' = \frac{1}{2} AM' = \frac{1}{2} AM + \frac{1}{2} MM'.$$

Înlocuind aici $\frac{1}{2} AM$ prin AN, rezultă că

$$AN' = AN + \frac{1}{2} MM'.$$

Comparînd această relație cu (4), rezultă că $NN' = \frac{1}{2} MM'$. Drumul parcurs de punctul N este jumătate din drumul parcurs de punctul M.

b) În figura 37, avem:

(1) $\widehat{AON} = \frac{1}{2} \widehat{AOM}$,

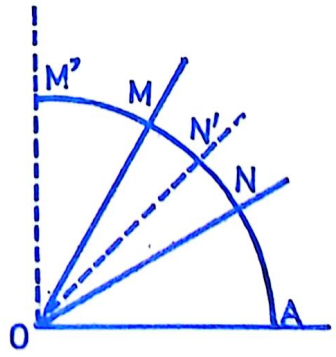


Fig. 37

(2) $\widehat{AON'} = \frac{1}{2}\widehat{AOM'}$

Se vede că

(3) $\widehat{AOM'} = \widehat{AOM} + \widehat{MOM'}$,

(4) $\widehat{AON'} = \widehat{AON} + \widehat{NON'}$.

Din (2) și (3) rezultă că

$$\widehat{AON'} = \frac{1}{2}\widehat{AOM'} = \frac{1}{2}\widehat{AOM} + \frac{1}{2}\widehat{MOM'}.$$

Înlocuind aici $\frac{1}{2}\widehat{AOM}$ prin $\widehat{AON}$, rezultă că

$$\widehat{AON'} = \widehat{AON} + \frac{1}{2}\widehat{MOM'}.$$

Comparînd această relație cu (4), rezultă că $\widehat{NON'} = \frac{1}{2}\widehat{MOM'}$. Unghiul cu care se rotește bisectoarea ON este jumătate din unghiul cu care se rotește latura OM.

Observări. 1) Punctele A, N, N' etc. se înșiră pe arcul de cerc din figura 37 la fel ca pe semidreapta din figura 36. Între arcele AM, AM' etc. și segmentele AM, AM' etc. există aceleași relații. Dacă în locul unghiurilor considerăm arcele corespunzătoare și ștergem peste tot litera O, calculele din partea a doua devin identice cu cele din prima parte.

2) Rezultatul devine evident prin ilustrarea următoare.

Într-o familie sînt doi copii. Într-o zi mama le dă o placă de ciocolată pe care ei și-o împart în părți egale. Într-o altă zi, li se dă o placă de ciocolată care are cu 30 grame mai mult decît prima. Acum partea fiecăruia va fi mai mare. Cu cît? Cu $30 : 2 = 15$ grame. Mai scurt, dacă un număr crește cu x, jumătatea lui crește cu $\frac{x}{2}$.

3) Dacă ținem o oglinjoară astfel încît să reflecte lumina soarelui, ea aruncă pe perete sau pe plafon o pată luminoasă. La cea mai mică rotație a oglinjoarei, pata se mișcă foarte repede. Acest fapt se explică pe baza rezultatului problemei de mai sus.

Fie xy o oglindă (fig. 38), AO o rază incidentă, OM raza reflectată și ON perpendiculara (normala) ridicată în punctul O pe oglindă. Una din legile reflecției spune că unghiul de incidență este congruent cu unghiul de reflecție,

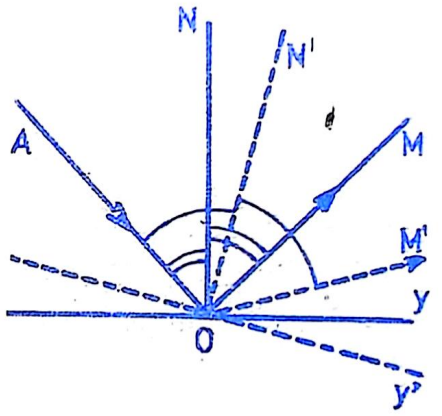


Fig. 38

$\widehat{AON} \equiv \widehat{NOM}$, adică ON este bisectoarea unghiului AOM. Dacă rotim oglinda astfel încît perpendiculara să devină ON', rotindu-se cu un unghi NON', raza AO va deveni în urma reflecției OM', deci raza reflectată se rotește cu unghiul MOM'. S-a stabilit că $\widehat{MOM'} = 2\widehat{NON'}$, unghiul cu care se rotește raza reflectată este dublul unghiului cu care se rotește perpendiculara, adică oglinda. De aceea pata de lumină se mișcă foarte repede.

2.1.8. Fie ABC un triunghi oarecare. Prelungim mediana AD cu un segment DE congruent cu ea. Atunci $\triangle DEC \equiv \triangle DAB$ (LUL), deci $EC \equiv AB$. Pe baza datelor din problemă se construiește triunghiul AEC (LLL). Fie D mijlocul laturii AE. Segmentul CD se prelungește cu un segment DB congruent cu el.

2.2.1. a) Este adevărată. b) Greșit. Cele două triunghiuri din figura 1 sînt dreptunghice și isoscele, $BC \equiv DE$, dar triunghiurile nu sînt congruente.

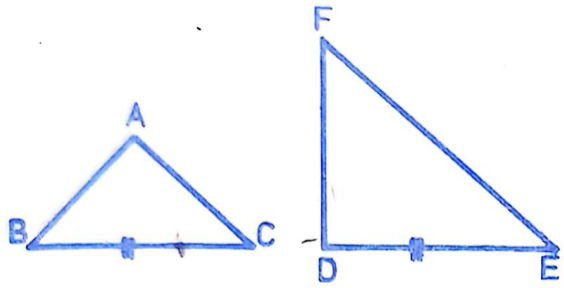


Fig. 1

Trebuie adăugată condiția ca latura congruentă să fie în ambele triunghiuri catetă sau în ambele triunghiuri ipotenuză. c) Greșit. În cele două triunghiuri isoscele din figura 2, $BC \equiv EF$ și unghiul $A \equiv$ unghiul E, dar triunghiurile nu sînt congruente. Trebuie

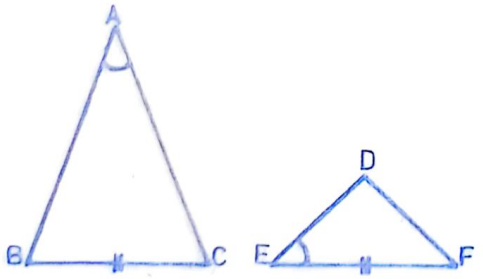
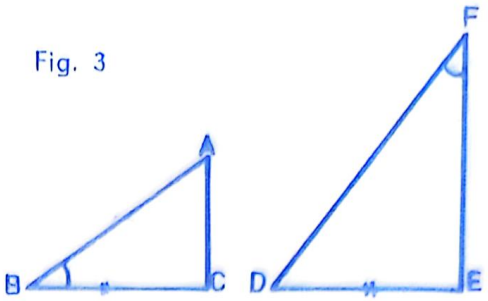


Fig. 2

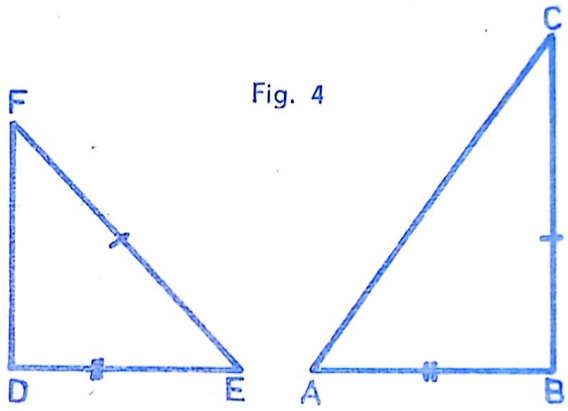
adăugată condiția ca unghiul congruent să fie în ambele triunghiuri unghiul de la vîrf sau în ambele triunghiuri un unghi de la bază. d) Greșit. În cele două triunghiuri din figura 3, $BC \equiv DE$, unghiul $B \equiv$ unghiul F, dar... Trebuie adăugată condiția ca unghiul congruent să fie în ambele triunghiuri alăturate catetei congruente

Fig. 3



sau în ambele triunghiuri opus catetei congruente. e) Greșit. În cele două triunghiuri dreptunghice din figura 4 $AB \equiv DE$ și $BC \equiv EF$, dar... Trebuie adăugată condiția ca laturile con-

Fig. 4



gruente să fie în ambele triunghiuri catete sau una din ele să fie în ambele triunghiuri catetă și cealaltă să fie în ambele triunghiuri ipotenuză.

2.2.2 (fig. 5). $\triangle ABC \equiv \triangle AED$ (LUL).

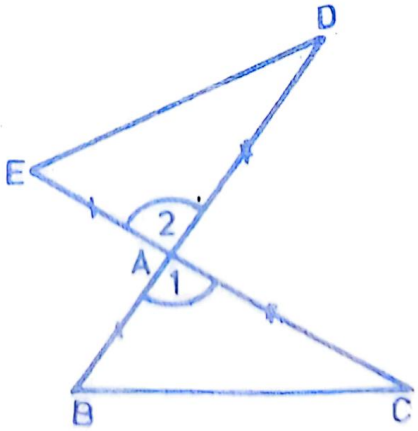


Fig. 5

2.2.3. $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$ (LUL). $BC \equiv AD$.

2.2.4. a) $\triangle OAC \equiv \triangle OBD$ (LUL), deci $AC \equiv BD$. b) $\triangle AOD \equiv \triangle BOC$ (LUL), deci $AD \equiv BC$.

2.2.5. $\triangle OAM \equiv \triangle OBM$ (LUL), deci $MA \equiv MB$.

2.2.6. $\triangle MCA \equiv \triangle MCB$ (LUL), deci $MA \equiv MB$.

2.2.7. $\triangle OCA \equiv \triangle OCB$ (LUL), deci $CA \equiv CB$.

2.2.8. $\triangle ABD \equiv \triangle AED$ (LUL).

2.2.9. $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ (ULU).

2.2.10. $\triangle CAB \equiv \triangle BDC$ (ULU).

2.2.11. $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ (ULU). $AB \equiv DC$, $AC \equiv DB$.

2.2.12. $\triangle AOB \equiv \triangle AOC$ (ULU), deci $OB \equiv OC$.

2.2.13. $\triangle ADB \equiv \triangle CEA$ (LLL).

2.2.14. $\triangle OAP \equiv \triangle OBP$ (LLL). $\widehat{AOP} \equiv \widehat{BOP}$, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, $\widehat{APO} \equiv \widehat{BPO}$.

2.2.15. a) $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$ (LUL). b) $\triangle OAB \equiv \triangle OCD$ (LLL).

2.2.16. $\triangle ABD \equiv \triangle ECD$ (LUL).

2.2.17 (fig. 14). Fie ABC un triunghi și AD o mediană ($D \in BC$). Din B și C se coboară perpendicularele BE și CF pe AD, $\triangle BDE \equiv \triangle CDF$ (IU), deci $BE \equiv CF$.

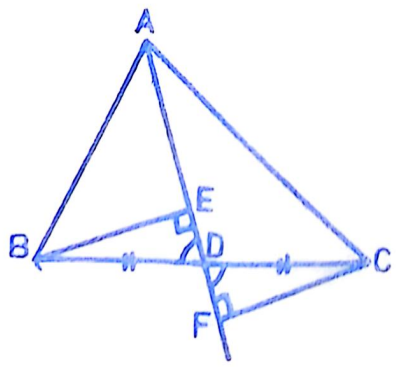


Fig. 14

2.2.18. Nu. Cazul de congruență cere ca unghiul să fie format de cele două laturi congruente, pe cînd aici unghiul O este opus laturilor congruente AB și AC.

2.3.7. Se trasează un segment AB și două semidrepte Ax și By care să formeze cu el unghiuri congruente.

2.3.8. Se compară suplementele lor. $\hat{1} \equiv \hat{2}$.

2.3.9. Fie C intersecția. Se compară unghiul CAB cu CBA. Isoscel.

2.3.10. Ce fel de triunghi este OAB? $\hat{A} \equiv \hat{B}$.

2.3.11. Se compară AD cu AE. Ce fel de triunghi este ADE? Unghiurile sînt congruente.

2.3.12. Ca unghiul A (fig. 18) să fie congruent cu unghiul B, ce fel de triunghi trebuie să fie OAB? Construcție: Se poartă pe Oy un segment OB congruent cu OA.

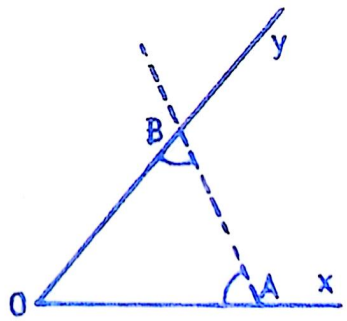


Fig. 18

2.3.13. $\triangle BDF = \triangle CEG$ (ULU). $DF \equiv EG$.

2.3.14. a) Ce fel de triunghi este ABD? Unghiurile sînt congruente. b) În triunghiul ABD, AC este bisectoare, deci și înălțime. c) Ele sînt congruente.

2.3.15 (fig. 21). a) $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$ (LUL), deci ... b) Rezultă din aceeaşi congruenţă. c) În triunghiul FBC, unghiurile alăturate laturii BC sînt congruente, deci triunghiul este isoscel. d) Din segmentele congruente DB şi EC s-au scăzut segmentele congruente FB şi FC, deci... e) Triunghiul FED este isoscel, deci... f) $\triangle DBC \equiv \triangle ECB$ (IU). Restul decurge la fel ca în cazul medianelor.

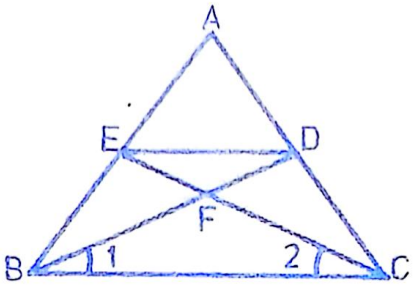


Fig. 21

2.3.16. a) Fie ABC (fig. 21) un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$), iar BD şi CE două dintre înălţimile sale ($D \in AC$, $E \in AB$). $\triangle BCD \equiv \triangle CBE$ (IU), deci... b) Fie ABC un triunghi în care înălţimile BD şi CE sînt congruente. $\triangle BCD \equiv \triangle CBE$ (IC), deci $\widehat{EBC} \equiv \widehat{DCB}$, deci... c) Cele trei înălţimi ale unui triunghi echilateral sînt congruente şi, reciproc, un triunghi în care cele trei înălţimi sînt congruente este echilateral.

2.3.17. Fie ABC triunghiul şi D piciorul înălţimii din A. a) $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ (ULU). b) La fel, după cazul LUL. c) Mediana AD se prelungeşte cu un segment DE congruent cu ea. $\triangle ABD \equiv \triangle ECD$ (LUL), deci

(1) $EC \equiv AB$ şi $\hat{E} \equiv \widehat{BAD}$.

Dar $\widehat{BAD} \equiv \widehat{DAC}$, deci $\hat{E} \equiv \widehat{DAC}$, deci $EC \equiv AC$. Din această relaţie şi (1) rezultă că...

2.3.18. a) Se compară unghiul DBC cu DCB; triunghiul DBC este isoscel. b) $\triangle ADB \equiv \triangle ADC$ (LLL), deci...

2.3.19. a) $\triangle MBC \equiv \triangle NCB$ (LUL), deci $BN \equiv CM$. b) Din congruenţa triunghiurilor mai rezultă că $\widehat{MCB} \equiv \widehat{NBC}$; ce fel de triunghi este PBC? c) Dacă din segmentele congruente BN şi CM se scad segmentele congruente PB şi PC, rămîn segmente congruente, deci $PM \equiv PN$. Acum $\triangle AMP \equiv \triangle ANP$ (LLL), deci $\widehat{MAP} \equiv \widehat{PAN}$. d) Dacă BN şi CM sînt mediane, $BM \equiv CN$, ca jumătăţi ale laturilor congruente, deci AP este bisectoare, deci şi mediană. e) $\triangle BCN \equiv \triangle CBM$ (IU), deci $BM \equiv CN$, deci punctul P aparţine bisectoarei unghiului A, care este şi înălţime.

2.3.20. Cîte grade trebuie să aibă unghiul format de dreapta AB cu bisectoarea unghiului O? Construcţie: Se duce prin M perpendiculara pe bisectoare.

2.3.21. Se compară unghiurile BAD CBE şi DCF. $\triangle DAE \equiv \triangle EBF \equiv \triangle FCD$ (LUL).

2.4.1. PQ nu trece prin mijlocul lui AB şi MN nu este perpendicular pe AB.

2.4.2. Se compară $\bar{OA}$ cu OB şi PA cu PB. OP este mediatoarea segmentului AB.

2.4.3. Pe ce linie trebuie să fie situat vîrful triunghiului? Fie C şi D punctele în care mediatoarea segmentului AB taie cercul. Triunghiul este ABC sau ABD.

2.4.4. Fie O centrul cercului. Se compară OA cu OB. Ce poziție are punctul O față de mediatoarea segmentului AB? față de mediatoarea segmentului AC? Toate mediatoarele trec prin centrul cercului.

2.4.5. Pe ce linie trebuie să se găsească punctul M ca să fie egal depărtat de punctele B și C? Fie xy mediatoarea segmentului BC. a) $xy \cap AC = M$. b) $xy \cap AB = N$.

2.4.6. Ce fel de triunghiuri sînt MAB, NAB și PAB? Se compară MA cu MB, NA cu NB și PA cu PB. Ce poziție au punctele M, N și P față de mediatoarea segmentului AB?

2.4.7. Punctul A aparține mediatoarei lui BC, care este și mediatoarea lui DE. $AD \equiv AE$.

2.4.8. Punctul căutat este intersecția dreptei d cu mediatoarea xy a segmentului AB. Dacă $AB \perp d$, punctele A și B fiind de aceeași parte a dreptei d, problema nu are soluție. Dacă ele se află de o parte și de alta a dreptei, sînt posibile două cazuri. Fie $AB \cap d = M$. Dacă $MA \not\equiv MB$, problema nu are soluție; dacă $MA \equiv MB$, orice punct al dreptei d este egal depărtat de A și B, dar gara se va construi în punctul M.

2.4.9. Punctul O este la intersecția mediatoarelor a două dintre laturile triunghiului ABC.

2.4.10. Se compară MO cu MA și MO cu OA. Triunghiul OAM este echilateral.

2.4.11. a) Fie M (fig. 29) un punct oarecare al laturii AC; atunci $MA + MC = AC$. Se cere să aibă loc relația $MA + MB = AC$. Aceste două relații pot avea loc dacă și numai dacă $MB \equiv MC$. Aceasta înseamnă că M aparține mediatoarei laturii BC. *Construcție:* Se duce mediatoarea xy a

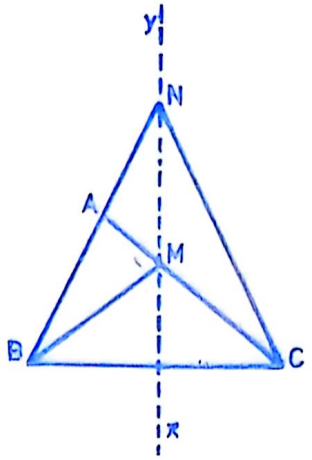


Fig. 29

laturii BC; fie $xy \cap AC = M$. Punctul M este cel căutat. b) $N = xy \cap AB$, căci $NB - NA = AB$ și $NC \equiv NB$.

2.4.12. Se compară MA (fig. 30) cu MA' și NA cu NA', MN este mediatoarea segmentului AA'.

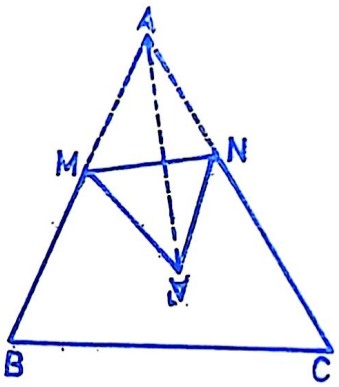


Fig. 30

2.4.13. Laturile BD și AD, fiecare în parte, nu se pot calcula, dar acest lucru nici nu se cere. Se compară DB cu DC. $AD + DB = AD + DC = 9$ cm, deci perimetrul este $9 + 5 = 14$ cm.

2.4.14. Punctul M este intersecția bisectoarei unghiului CAB cu cercul.

2.4.15. v. problema precedentă.

2.4.16. Ce este CA pentru unghiul BCD? $AD \equiv AE$.

2.4.17. Ce este AD pentru unghiul A? DE și DF sînt distanțele de la punctul D la laturile unghiului A, $DE \equiv DF$.

2.4.18. Se compară MA cu MB. Ce fel de triunghi este MAB? $\hat{1} \equiv \hat{2}$.

2.4.19. Pe ce linie trebuie să se găsească punctul M ca să fie egal depărtat de laturile unghiului B? Fie Bx bisectoarea unghiului B. a) $Bx \cap AD = M$. b) Semidreapta Bx nu taie înălțimea care pleacă din A; problema nu are soluție. Nici un punct al înălțimii AD nu este egal depărtat de semidreptele BA și BC.

2.4.20. Pe ce linie trebuie să se găsească punctul M ca să îndeplinească prima condiție? condiția a doua? Fie xy mediatoarea laturii BC și Az bisectoarea unghiului A. $xy \cap Az = M$.

Cap. 3

3.1.1. a) Deoarece $\hat{A} \equiv \hat{B}$, dreptele sînt paralele (t. directă), deci $\hat{D} \equiv \hat{C}$; $\hat{D} = 30°$. b) 73°. c) 70°.

3.1.2. Deoarece $\hat{A} \equiv \hat{B}$, $BC \parallel AD$, deci unghiurile C și D trebuie să fie congruente.

3.1.3. Se duce o semidreaptă Ox paralelă cu AB situată în interiorul unghiului O și se compară unghiurile care se formează astfel cu unghiurile 1 și 2; $\hat{O} = \hat{1} + \hat{2}$.

3.1.4. Unghiurile 3 și 4 sînt suplementare și $\hat{4} \equiv \hat{6}$, deci unghiurile 3 și 6 sînt suplementare. De asemenea și celelalte perechi de unghiuri. b) Ele sînt suplementare.

3.1.5. Dreptele (fig. 5) se taie cu o secantă. Se compară unghiul 1 cu 2 și unghiul 3 cu 2; $\hat{1} \equiv \hat{3}$, deci $d \parallel f$.

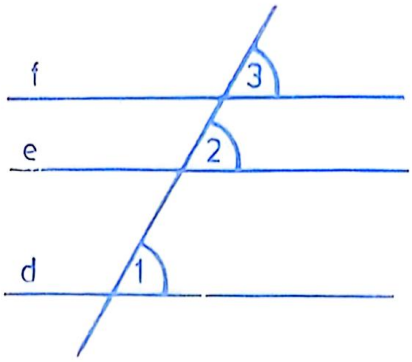


Fig. 5

3.1.6. a) Dacă $b \perp a$ și $c \perp a$ (fig. 6), $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Aceste unghiuri fiind corespondente, $b \parallel c$. b) Dacă $b \perp a$, $\hat{1} = 90°$. Deoarece $c \parallel b$, $\hat{2} \equiv \hat{1}$, deci $\hat{2} = 90°$, deci $c \perp a$.

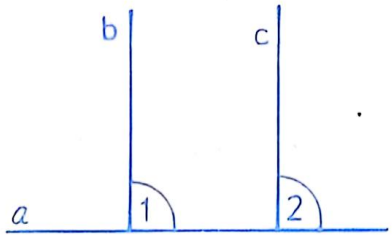


Fig. 6

3.1.7. a) Se compară unghiul 3 cu unghiul 1 și unghiul 4 cu unghiul 2 și se ține seamă că $\hat{1} \equiv \hat{2}$; $\hat{3} \equiv \hat{4}$. b) $\hat{1} \equiv \hat{2}$.

3.1.8. a) Se compară unghiul $\hat{1}$ cu $\hat{A}$, $\hat{A}$ cu $\hat{B}$ și $\hat{B}$ cu $\hat{N}$. $\hat{1} \equiv \hat{N}$, deci $CM \equiv CN$. b) Se compară unghiul $\hat{2}$ cu $\hat{B}$, $\hat{B}$ cu $\hat{A}$ și $\hat{A}$ cu $\hat{2}$. $\hat{2} \equiv \hat{A}$, deci $MP \equiv MA$.

3.1.9. Fie AOB unghiul care trebuie măsurat (fig. 9). Printr-un punct oarecare C al laturii OB se duce paralela Cx la OA și se măsoară unghiul BCx.

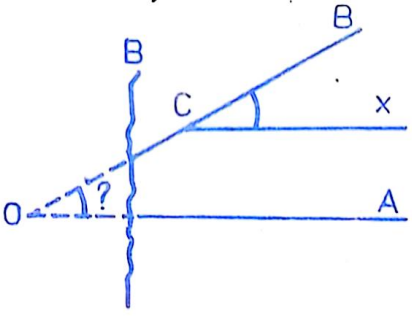


Fig. 9

3.1.10. a) Printr-un punct oarecare M al dreptei xy se duce o semidreaptă Mz astfel ca unghiul zMx să fie de 50° şi se duce prin A paralela la Mz. b) Cînd unghiul dat are 90°.

3.1.11. Unghiul x este ascuţit sau obtuz? El este triplul suplementului său. $180° : 4 = 45°$; $45° \cdot 3 = 135°$. Unghiurile sînt de 45° sau de 135°.

3.1.12 (fig. 4). Dacă cele trei unghiuri sînt congruente, fiecare are $246° : 3 = 82°$, deci unghiurile au 82° sau 98°. Dacă nu toate unghiurile sînt congruente, două din ele sînt sigur congruente, iar al treilea este suplementul fiecăruia. Unul din ele împreună cu suplementul său au 180°, deci al treilea are $246° - 180° = 66°$. Atunci unghiurile au cîte 66° sau 114°.

3.1.13. $\hat{1} \equiv \hat{4}$ şi $\hat{1} \equiv \hat{7}$ ca alterne interne şi $\hat{1} \equiv \hat{12}$ ca unghiuri cu laturi paralele (sau $\hat{7} \equiv \hat{12}$ ca unghiuri corespondente), deci avem o grupă de unghiuri congruente (1, 4, 7, 12); celelalte grupe sînt (2, 8, 11, 6) şi (3, 5, 10, 9).

3.1.14. a) $\hat{1} \equiv \hat{A}$, $\hat{2} \equiv \hat{D}$ ş.a.m.d. Deoarece $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \hat{4} = 360°$, rezultă că $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360°$. b) Nu.

3.1.15. a) Fie Ax şi By (fig. 12) bisectoarele unghiurilor alterne interne A şi B. Se compară unghiul xAB cu unghiul yBA. $Ax \parallel By$. b) Unghiuri alterne externe şi corespondente.

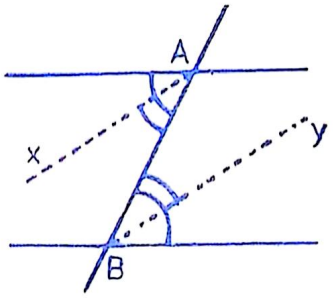


Fig. 12

3.1.16. Ce fel de triunghi este ABC (fig. 13)? Se compară unghiul 1 cu 2 şi 1 cu 3.

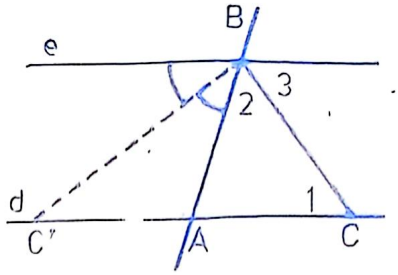


Fig. 13

3.1.17 (fig. 14). Se compară unghiul $\hat{1}$ cu $\hat{2}$ şi $\hat{1}$ cu $\hat{3}$; $\hat{2} \equiv \hat{3}$, deci $NM \equiv NO$.

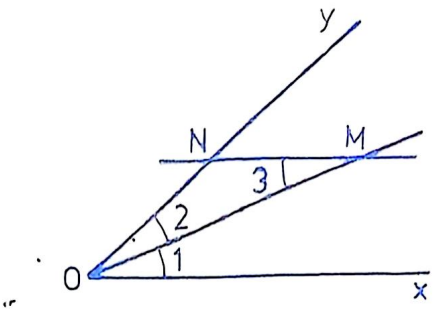


Fig. 14

3.1.18. Se compară unghiurile 2 şi 1, apoi unghiurile 3 şi 1, $\hat{2} \equiv \hat{3}$, deci $MI \equiv MB$. La fel, $NI \equiv NC$, deci $MI + NI = \ldots$

3.1.19. a) Se compară unghiul 2 cu 1 şi unghiul 3 cu 1; $\hat{2} \equiv \hat{3}$, deci $BC \equiv BA$. La fel, $BD \equiv BA$. b) Din ultimele două relaţii rezultă că $BC \equiv BD$.

3.2.2. a) 48°. b) 44°. c) 105°.

3.2.3. a) 48°. b) 37°.

3.2.4. a) Suma lor nu este de 180°. b) Suma lor nu este de 90°.

3.2.5. Suma măsurilor unghiurilor este $> 180°$

3.2.6. Cîte grade are unghiul 4? 140°.

3.2.7. $\hat{E} = 180° - (\hat{A} + \hat{D})$, $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C})$ și $\hat{D} \equiv \hat{C}$, deci $\hat{E} \equiv \hat{B}$.

3.2.8. a) Dacă toate trei unghiurile ar avea mai mult decît 60°, cîte grade ar avea suma măsurilor lor? Cel mult două. b) Cel mult două.

3.2.9. Cîte grade are suma măsurilor unghiurilor BAD, ACF și CBE? Din această sumă se scad unghiurile triunghiului ABC. 90°.

3.2.10. Se află suma unghiurilor formate în jurul punctelor M, N și P, apoi suma măsurilor acestor 9 unghiuri și se scade suma unghiurilor trunghiului MNP. Rezultatul: 360°. Altă soluție: Se adună sumele măsurilor unghiurilor triunghiurilor APN, BMP și CNM și se scade suma unghiurilor A, B și C.

3.2.11. Ce relație există între unghiurile B și BAD? între unghiurile C și CAD? Unghiul mai mare are un complement mai mic.

3.2.12. a) 68° și 44° sau 56° și 56°. b) 37° și 37°.

3.2.13. Nu. Numai dacă amîndouă unghiurile sînt unghiuri de la vîrf sau amîndouă sînt unghiuri de la bază.

3.2.14. Cunoscînd unghiul A, cum se află unghiul B? unghiul M? $\hat{B} \equiv \hat{M}$, deci $MN \parallel AB$.

3.2.15. Fie O centrul cercului. a) Se compară unghiurile triunghiurilor OAC și OBD; $\hat{A} \equiv \hat{B}$, deci $AC \parallel BD$. b) Analog cu a); $AD \parallel BC$.

3.2.16. a) Dacă unghiurile de la baza triunghiului ar fi drepte, cîte grade ar avea suma lor? Cît ar rămîne pentru unghiul de la vîrf? Dacă unghiurile de la bază ar fi obtuze, cît de mare ar fi suma lor în comparație cu 180°? Unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sînt totdeauna ascuțite. b) Unghiul de la vîrf poate fi oricît de mic și oricît de mare, dar mai mic decît de 180°.

3.2.17. Fie M' (fig. 24) o altă poziție a punctului M și $ON' \equiv OM'$. Ce fel de triunghiuri sînt OMN și $OM'N'$? Se compară unghiurile lor; $\hat{M'} \equiv \hat{M}$, deci $MN \parallel M'N'$.

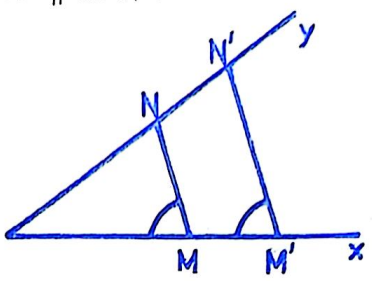


Fig. 24

3.2.18. a) Toate au cîte 60°. b) Dacă primul unghi pe care-l măsurăm nu are 60°, triunghiul nu este echilateral; dacă are 60°, trebuie să măsurăm încă un unghi.

3.2.19. Ce fel de triunghi este OAB? 60°, 60°, 60°.

3.2.20. Dacă triunghiul ABC este echilateral, cîte grade are unghiul A? Prelungirea nu folosește la nimic.

3.2.21. a) 90°; 45°; 45°. b) Un singur unghi. Dacă are 45°, triunghiul este isoscel; în cazul contrar, nu.

3.2.22. a) Se trasează un segment AB și două semidrepte Ax și By astfel ca unghiurile xAB și yBA să aibă cîte 60°. b) Se trasează un segment AB, o semidreaptă Ax perpendiculară pe AB și o semidreaptă By astfel ca unghiul yAB să aibă 45°.

3.2.23. Se calculează unghiurile triunghiului AMN. a) Echilateral. b) Dreptunghic și isoscel.

3.2.24. a) 45°. b) Ele sînt congruente. c) Fiecare dintre catete are 18 : 2 = = 9 cm. d) $AD \equiv BD \equiv DC$. e) 45°; 45°; 90°.

3.2.25. a) Cîte grade are unghiul 1 (fig. 25)? unghiul 2? unghiul 3? unghiul 4? Ce fel de triunghi este AFD? b) $\widehat{ADF} \equiv \widehat{BDE} = 90° - \hat{B}$ și $\widehat{AFD} = 90° - \hat{C}$. Dar $\hat{B} \equiv \hat{C}$, deci $\widehat{ADF} \equiv \widehat{AFD}$, deci...

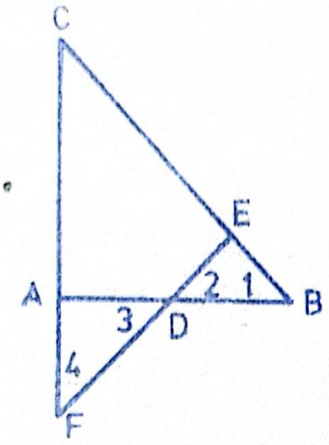


Fig. 25

3.2.26. a) Cîte grade are unghiul A (fig. 26)? unghiul B? Aceste unghiuri sînt alterne interne, deci $AD \parallel BC$. b) Se compară CD cu AC și CE cu CB. $DE = CD + CE = AC + CB = AB$. Oricare ar fi poziția punctului C, DE rămîne congruent cu AB. Nu există minim. c) Cîte grade are unghiul A (fig. 27)? unghiul B? $\hat{F} = 90°$. d) Punctul C se ia la mijlocul segmentului AB.

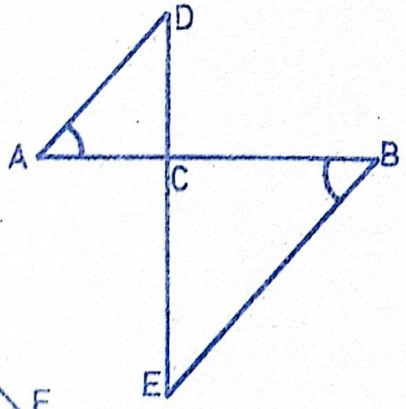


Fig. 26

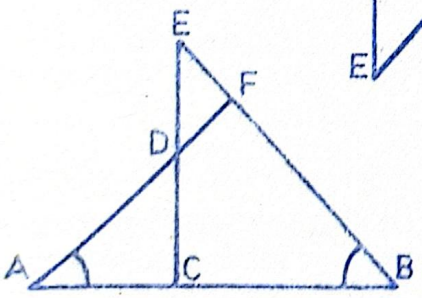


Fig. 27

3.2.27. Fie D piciorul înălțimii și E al bisectoarei. a) Se află pe rînd unghiurile BAC, EAC, DAC; $\widehat{DAE} = 14°$. b) 46°.

3.2.28. Fie D piciorul înălțimii și E unghiul cerut (fig. 28). Se calculează întîi unghiurile ABD și EBD; 57°.

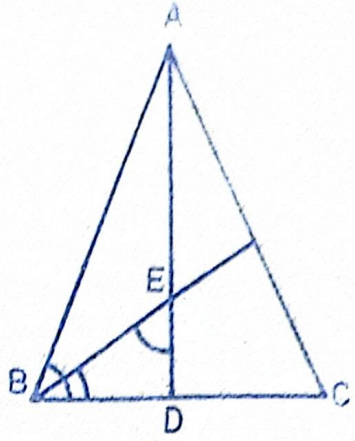


Fig. 28

3.2.29. Oricum am alege punctele M și N, suma unghiurilor va fi aceeași, și anume $180° - \widehat{xOy}$.

3.2.30. a) 180 — 124 = 56 mm. b) 56°. c) Fiecare din cele două sume are 180° : 2 = 90°.

3.2.31. Ce relație există între unghiurile B și 2? între unghiurile 1 și 2? $\hat{B} \equiv \hat{1}$.

3.2.32. Unghiurile 2 și 3 sînt unghiurile ascuțite a două triunghiuri dreptunghice congruente. Cîte grade are suma lor? $\hat{1} = 90°$.

3.2.33. a) Triunghiul CAF este dreptunghic, deci unghiurile 1 și A sînt complementare,

$$\hat{1} = 90° - \hat{A}.$$

La fel,

$$\hat{2} = 90° - \hat{B}, \hat{3} = 90° - \hat{C}.$$

Rezultă că

$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}=$

$=(90°-\hat{A})+(90°-\hat{B})+(90°-\hat{C})=$

$=3\cdot 90°-(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})=$

$=270°-180°=90°.$

b) Analog cu a).

3.2.34. *Soluția I.* a) Se examinează unghiurile triunghiului ABE (fig. 34). $\hat{1}=\frac{\hat{B}}{2}$. $\widehat{DAC}\equiv\widehat{ABC}$, căci aceste unghiuri au același complement, unghiul BAD. Rezultă că jumătățile acestor unghiuri sînt congruente,

$$\hat{1}\equiv\hat{2}.$$

Triunghiul ABC fiind dreptunghic,

$$\widehat{BAE}+\hat{2}=90°.$$

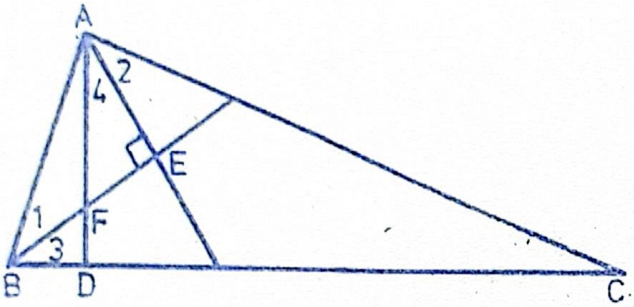


Fig. 34

Înlocuind aici 2 prin 1, se obține $\widehat{BAE}+\hat{1}=90°$, deci $\hat{E}=...$ b) Analog cu a).

Soluția II. Se consideră triunghiurile FBD și FAE. $\widehat{ABD}\equiv\widehat{DAC}$, căci aceste unghiuri au același complement, unghiul BAD. Rezultă că jumătățile lor sînt congruente, $\hat{3}\equiv\hat{4}$. Unghiurile lor cu vîrful în F sînt congruente. Rezultă că $\hat{E}\equiv\hat{D}$. Dar unghiul D este drept, deci...

3.2.35. Cîte grade are suma unghiurilor BMN și DNM? Suma jumătăților lor 1 și 2? $\hat{P}=90°$.

3.3.1. $\widehat{AMy}=\hat{O}+\hat{1}$. $\widehat{ANy}=\hat{O}+\hat{2}$. Deoarece $\hat{2}>\hat{1}$, suma a doua este mai mare decît prima.

3.3.2. 137°; 112°; 111°.

3.3.3. $\hat{B}=180°-\hat{B}'=110°$, $\hat{C}=32°$.

3.3.4. Dacă un unghi exterior al unui triunghi este ascuțit, unghiul interior corespunzător este ascuțit sau obtuz? Cîte unghiuri obtuze poate avea un triunghi? Răspuns: Cel mult un unghi exterior poate fi ascuțit.

3.3.5. *Soluția I.* Fie M un punct oarecare din interiorul triunghiului ABC (fig. 37) și $BM\cap AC=D$. Ce relație există între unghiurile 1, 2 și 3? Deci $\hat{1}>\hat{3}$. La fel, $3>A$. Deci $\hat{1}>A$. Răspuns: nu.

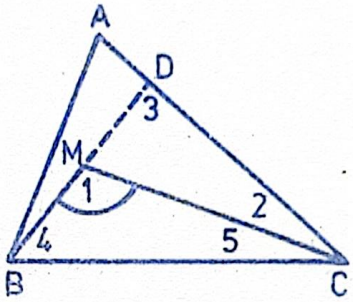


Fig. 37

Soluția II. Comparăm unghiurile triunghiurilor ABC și MBC. $\hat{4}<\hat{B}$ și $\hat{5}<\hat{C}$. Suma unghiurilor fiind aceeași în ambele triunghiuri, rezultă că $\hat{1}>A$.

3.3.6. $\hat{B}'=\hat{A}+\hat{C}$, $\hat{C}'=\hat{A}+\hat{B}$, deci $\hat{B}'+\hat{C}'-\hat{A}=(\hat{A}+\hat{C})+(\hat{A}+\hat{B})-\hat{A}=\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=...$

3.3.7. Ce relație există între unghiul 1 și unghiurile B și C ale triunghiului BMC? A cîta parte din unghiul ABC este unghiul 3? A cîta parte din unghiul ACB este unghiul 4?

3.3.8. Ce fel de triunghi este ACD (fig. 39)? $\hat{1}\equiv\hat{2}$. Ce este unghiul 3 pentru triunghiul ACB? Cîte grade are fiecare

dintre unghiurile 1 și 2? $\widehat{BAD} = 60° + 30° = 90°$.

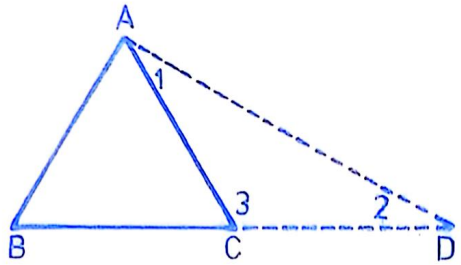


Fig. 39

3.3.9. a) Fie ABC un triunghi și A' unghiul exterior din A. $\hat{A}' = \hat{B} + \hat{C}$, deci $\hat{A}' > \hat{B}$ și $\hat{A}' > \hat{C}$. b) $\hat{N} > \hat{M}$. Cînd trecem din punctul M în punctul N, dreapta NA, care unește ochiul cu vîrful statuii trebuie să formeze cu orizontala un unghi mai mare, de aceea trebuie să ridicăm capul. c) Luna fiind foarte departe, diferența dintre unghiurile N și M este atît de mică încît nu se observă. d) Da.

3.3.10. Se compară $[EA$ cu ED, unghiul A cu ADE. Unghiul 1 este un unghi exterior al triunghiului ADE, deci $\hat{1} = \hat{A} + \hat{A}$, $\hat{1} = 2\hat{A}$.

3.4.1. a) Cînd se adaugă vîrful M (fig. 42) care latură se adaugă și care dispare? Numărul laturilor crește cu 1. b) Care unghi se adaugă la unghiul A? la unghiul B? Care unghi apare în plus? $\hat{1} + \hat{2} + \hat{M} = ?$ Suma crește cu 180°. c) Cînd $n = 3$, adică în cazul triunghiului, suma unghiurilor este de 180°, $S_3 = 180°$; patrulaterul, $n = 4$, poate fi privit ca triunghi la care s-a adăugat un vîrf, deci suma unghiurilor crește cu 180° și devine $S_4 = 2 \cdot 180°$; pentagonul, $n = 5$, poate fi privit ca patrulater la care s-a adăugat un vîrf, deci suma unghiurilor crește din nou cu 180° și devine $S_5 = 3 \cdot 180°$; la fel se vede că suma unghiurilor unui hexagon $S_6 = 4 \cdot 180°$ ș.a.m.d. În toate cazurile acestea, factorul cu care se înmulțește numărul 180 este cu 2 mai mic decît numărul vîrfurilor, adică în cazul unui poligon cu n vîrfuri, suma unghiurilor este $S_n = (n - 2)\ 180°$. Cînd se merge mai departe, adăugînd mereu cîte un vîrf, numărul n crește cu 1, dar și suma unghiurilor crește cu 180°, așa că rezultatul este valabil oricare ar fi numărul n.

3.4.2. Vîrful A (fig. 43) poate fi unit cu toate vîrfurile afară de vîrfurile vecine (în cazul octogonului B și H) și de el însuși, deci dintr-un vîrf se pot duce $(n - 3)$ diagonale. Cînd trasăm prima diagonală, AC, se formează triunghiul ABC, cînd trasăm diagonala AD, se formează încă un triunghi, ACD ș.a.m.d., fiecare diagonală dă un triunghi nou, numai ultima diagonală dă două triunghiuri (în cazul figurii, diagonala AG dă triunghiurile AFG și AGH). Rezultă că numărul triunghiurilor este $(n - 3) + 1 = n - 2$. Suma unghiurilor acestor triunghiuri este...

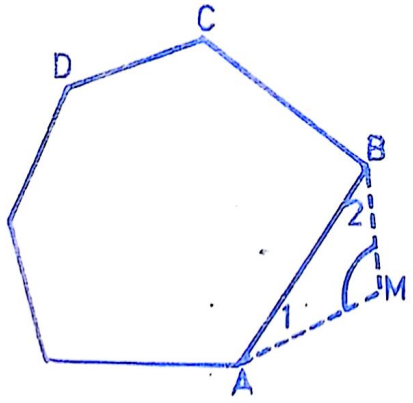


Fig. 42

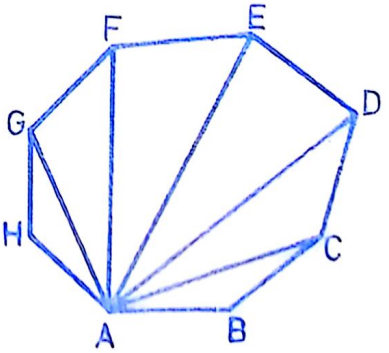


Fig. 43

3.4.3. *Soluția I.* a) Dacă se adaugă și unghiurile A, B, C și D, se obține suma unghiurilor a 4 triunghiuri, adică $4 \cdot 180°$. Suma adăugată este de 360°. Rezultat: 360°. b) $5 \cdot 180° - 3 \cdot 180° = 360°$. c) $6 \cdot 180° - 4 \cdot 180° = 360°$.

Soluția II. Dacă se adaugă și unghiurile patrulaterului $MNPQ$, se obține $4 \cdot 180°$. Se scad unghiurile patrulaterului.

3.4.4. a) Încercările sînt zadarnice. Un asemenea patrulater nu există. În adevăr, dacă A, B, C și D sînt măsurile unghiurilor unui patrulater convex,

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) + \hat{D} = 360° = 2 \cdot 180°.$$

Dar fiecare unghi are mai puțin decît 180°. Rezultă că din cei doi termeni ai acestei sume $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$ și $\hat{D}$, al doilea trebuie să fie mai mic decît 180°, deci primul trebuie să fie mai mare decît 180°. Suma celor trei unghiuri date este 170°, ceea ce este prea puțin. b) Suma lor trebuie să fie $> 180°$ și $< 360°$. c) Suma trebuie să fie $> 97 \cdot 180°$ și $< 98 \cdot 180°$.

3.4.5. *Soluția I* (fig. 45). Se duce diagonala AC. Ce relație există între unghiurile u, 1 și 2? între unghiurile v, 3 și 4?

$$\hat{u} + \hat{v} = (\hat{1} + \hat{3}) + (\hat{2} + \hat{4}).$$

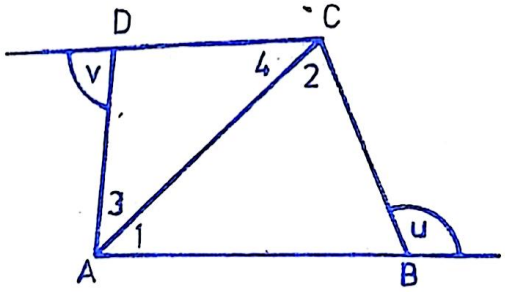


Fig. 45

Dar $\hat{1} + \hat{3} = \hat{A}$ și $\hat{2} + \hat{4} = \hat{C}$, deci...

Soluția II. $(\hat{u} + \hat{B}) + (\hat{v} + \hat{D}) = 180° + 180° = 360°$, adică

$$(\hat{u} + \hat{v}) + (\hat{B} + \hat{D}) = 360°.$$

Pe de altă parte

$$(\hat{A} + \hat{C}) + (\hat{B} + \hat{D}) = 360°.$$

Se compară aceste două relații.

3.4.6. a) Printr-un punct oarecare se duc semidrepte paralele la laturile poligonului. Unghiurile notate cu aceeași cifră sînt congruente. Suma $= 360°$. b) Da. c) 360°. d) În cazul unui poligon cu n laturi, suma unghiurilor interioare este

$$(180° - \hat{1}) + (180° - \hat{2}) + \ldots =$$
$$= n \cdot 180° - (\hat{1} + \hat{2} + \ldots) =$$
$$= n \cdot 180° - 360°.$$

3.5.4. a) Se compară triunghiurile CAM și MBD (LUL). Cîte grade are suma unghiurilor 1 și 2? unghiul CMD? Din congruența triunghiurilor rezultă că $MC \equiv MD$. Triunghi dreptunghic isoscel. b) Unghiul are mereu 45°.

3.5.5. Ce fel de triunghiuri sînt ABE și ADC? Se compară unghiurile lor. $\widehat{ABE} \equiv \widehat{ADC}$, deci...

3.5.6. Se compară triunghiul OAM cu triunghiul OBM (ULU), deci $OA \equiv OB$. Ce linie importantă în triunghiul OAB este Oz? Deci $Oz \perp AB$. La fel, $Oz \perp CD$. Din faptul că $\hat{1} \equiv \hat{2}$ rezultă că...

3.5.7. Ce este unghiul M pentru triunghiul AMB?

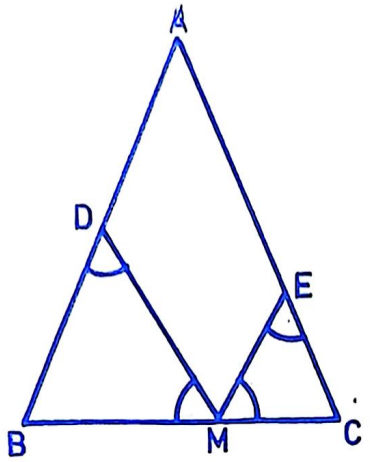
$$\hat{M} = \frac{2\hat{A}}{3} + \frac{\hat{B}}{3}, \quad \hat{N} = \frac{2\hat{B}}{3} + \frac{\hat{C}}{3},$$

$$\hat{P} = \frac{2\hat{C}}{3} + \frac{\hat{A}}{3}.$$

3.5.8. Ce fel de triunghiuri sînt DBM și EMC (fig. 50)? Se compară unghiurile lor. Toate unghiurile marcate cu cîte un arc sînt congruente, ele se pot nota cu aceeași literă, u. Suma

unghiurilor din jurul punctului M arată că unghiul $\widehat{DME} = 180° - 2u$; din triunghiul DBM se scoate că $\hat{B} = 180° - 2u$. Cazul cînd $BM > BA$ poate să apară cînd $BC > AB$. Figura se schimbă, dar demonstrația rămîne valabilă.

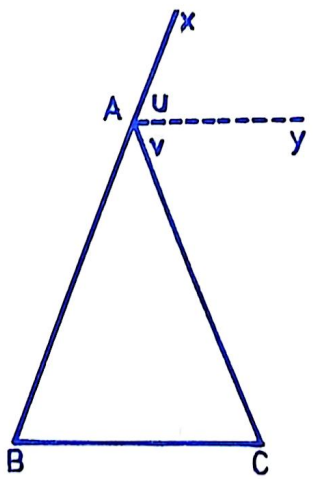
Fig. 50



3.5.9. Fie ABC un triunghi și A' unghiul exterior din A. $\hat{A}' = \hat{B} + \hat{C}$. a) Dacă $AB \equiv AC$, $\hat{B} \equiv \hat{C}$, deci $\hat{A}' = 2\hat{B}$. b) Dacă $\hat{A}' = 2\hat{B}$, $\hat{B} + \hat{C} = 2\hat{B}$, deci $\hat{C} = \hat{B}$, deci...

3.5.10. a) Fie Ay bisectoarea unghiului exterior CAx (fig. 51). $\widehat{CAx} = \hat{B} + \hat{C}$; deoarece $\hat{B} \equiv \hat{C}$, $\widehat{CAx} = 2\hat{B}$, adică $2\hat{u} = 2\hat{B}$, deci $\hat{u} \equiv \hat{B}$, deci $Ay \parallel BC$. b) Dacă $Ay \parallel BC$, $\hat{u} \equiv \hat{B}$ (coresp.) și $\hat{v} \equiv \hat{C}$ (alt. int.). Dar $\hat{u} \equiv \hat{v}$, deci $\hat{B} \equiv \hat{C}$, deci...

Fig. 51



3.5.11. a) Din $CD \perp d$ și $d \parallel e$ rezultă că $CE \perp e$, deci CD și CE sînt distanțele de la punctul C la dreptele d și e. Pentru a putea folosi faptul că AC și BC sînt bisectoare, se duce CF perpendicular pe AB. Se compară CD cu CF și CE cu CF. b) Se compară unghiul $\hat{1}$ cu $\hat{2}$ și $\hat{2}$ cu $\hat{3}$; $\hat{1} \equiv \hat{3}$, deci $GA \equiv GC$. La fel se arată că $GC \equiv GB$, deci...

3.5.12. a) $CB \equiv CB'$ și $BB' = 2AB$. Dar $AB = \frac{BC}{2}$ deci $2AB = AC$, deci $BB' \equiv BC$. Triunghiul CBB' este echilateral, deci $\widehat{BCB'} = 60°$. CA fiind mediană este și bisectoare, deci $\widehat{BCA} = 30°$. b) Dacă $\widehat{BCA} = 30°$, $\widehat{BCB'} = 2 \cdot 30° = 60°$. Triunghiul CBB' fiind isoscel ($CB' \equiv CB$), $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, deci fiecare din aceste unghiuri are $\frac{180° - 60°}{2} = 60°$, deci triunghiul CBB' este echilateral, $BB' \equiv AC$. Dar $AB = \frac{BB'}{2}$, deci $AB = \frac{BC}{2}$. Cateta mică este jumătate din ipotenuză.

3.5.13. a) Se duce și înălțimea AF (fig. 55). Ce relație există între unghiurile 1 și BCD (triunghiul CBD)? între unghiurile 3 și ACF (triunghiul AFC)? $\hat{1} \equiv \hat{3}$. La fel, $\hat{2} \equiv \hat{4}$. Aceste relații se adună și se ține seamă că $\hat{4} + \hat{3} = \hat{A}$. b) Dacă $\hat{A} > 90°$, nu se schimbă nimic. În cazul figurii 56 demonstrația se

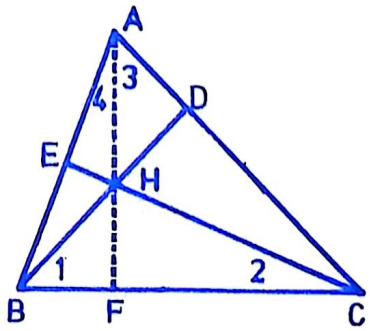


Fig. 55

poate repeta cuvînt cu cuvînt, pînă la ultimul pas. Dar acum $\hat{A} = \hat{3} - \hat{4}$ deci în locul relației date se obține $\widehat{DBC} - \widehat{ECB} = \hat{A}$.

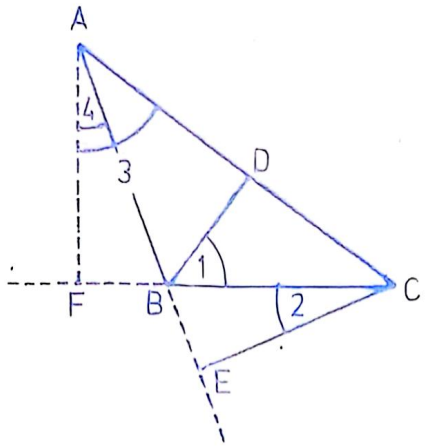


Fig. 56

Observări. 1) Soluția următoare este foarte simplă. Triunghiul BHC (fig. 55) dă $\hat{H} + (\hat{1} + \hat{2}) = 180°$. În patrulaterul $AEHD$ unghiurile E și D sînt drepte, deci $\hat{E} + \hat{D} = 180°$, deci $\hat{H} + \hat{A} = 360° - 180° = 180°$. Din aceste două relații se deduce că $\hat{H} + \hat{A} = \hat{H} + (\hat{1} + \hat{2})$, deci... Totuși am preferat prima demonstrație, căci a doua nu se poate repeta în cazul triunghiului obtuzunghic.

2) În demonstrație nu intervine faptul că înălțimile triunghiului sînt concurente.

3.5.14. a) Se compară triunghiul AEC (fig. 57) cu triunghiul ADB (ULU); $AD \equiv AE$. Se compară unghiurile triunghiurilor AED și ABC; $\hat{E} \equiv \hat{B}$, deci... b) Se consideră aceleași triunghiuri (ULU). c) Se consideră aceleași triunghiuri (LUL). $AD \equiv AE$ căci sînt jumătăți de laturi congruente.

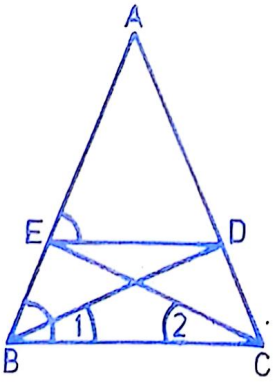


Fig. 57

3.5.15. Presupunem $\hat{B} > \hat{C}$. Deoarece ADC este un unghi exterior al triunghiului ABD,

$$\widehat{ADC} = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2};$$

la fel

$$\widehat{ADB} = \hat{C} + \frac{\hat{A}}{2}.$$

Se scade relația a doua din prima.

3.5.16 (fig. 58). $\triangle BDC \equiv \triangle FDA$ (LUL), deci $\hat{1} \equiv \hat{C}$, deci $AF \parallel BC$. La fel se arată că $AG \parallel BC$. Prin punctul A se poate duce numai o singură paralelă la BC, deci... b) Din congruența triunghiurilor rezultă că $AF \equiv BC$ și $AG \equiv BC$, deci $GF = 2AB$.

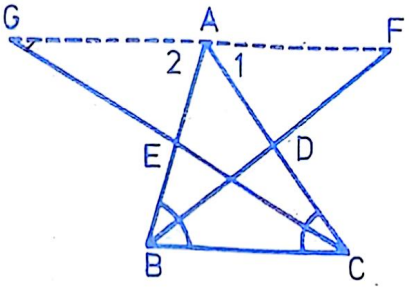


Fig. 58

3.5.17. a) $\widehat{MDB} \equiv \widehat{M'D'B} \equiv \hat{B}$. b) Ce fel de triunghi este MBD? Ce este MN pentru unghiul exterior AMD? Într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului exterior de la vîrf este paralelă cu baza (v. probl. 3.5.10). c) $\hat{D} = 180° - \hat{B}$; $\hat{C} \equiv \hat{C}$; $\hat{E} = 180° - \hat{A}$; $\widehat{ENM} \equiv \widehat{MNA}$ (același unghi în altă poziție), $\widehat{MNA} \equiv \hat{C}$ (coresp.), deci $\widehat{ENA} = 2\hat{C}$, $\widehat{ENC} = 180° - 2\hat{C}$.

3.5.18. Dreapta AP este totdeauna verticală. Dacă această dreaptă trece prin L, ea este mediană, deci și înălțime, deci dreapta DE este perpendiculară pe verticală, deci orizontală. Dar $BC \parallel DE$ (v. probl. 3.2.14) deci...

Cap. 4

4.1.1. a) $a > b$. b) Fie AB o dreaptă care reprezintă marginea unei străzi și C un punct de pe cealaltă parte a străzii. Drumul cel mai scurt de la punctul C la dreapta AB este segmentul CD, unde $CD \perp AB$ și $D \in AB$.

4.1.2. Fie ABC un triunghi dreptunghic, $AB \perp AC$. BA este perpendiculara și BC este o oblică dusă din punctul B spre dreapta AC, deci $BA < BC$. Tot așa, $CA < CB$.

4.1.3 (fig. 2). MN este perpendiculara și MB este o oblică dusă din punctul M spre dreapta AB, deci $MN < MB$. Tot așa, $MP < MC$. Din aceste două relații rezultă, prin adunare, că $MN + MP < MB + MC$. Dar $MB + MC = BC$, deci lungimea $NMP < BC$.

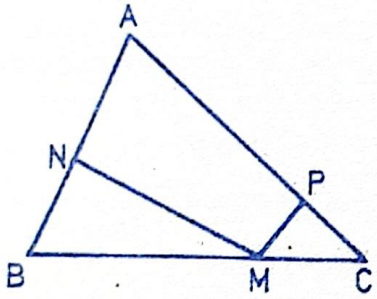


Fig. 2

4.1.4. În figura 3 se văd diferite poziții ale dreptei, 1, 2, 3..., și distanța AD de la punctul A la dreapta d. Se vede că distanța este maximă cînd dreapta d ocupă poziția AE, $AE \perp AB$.

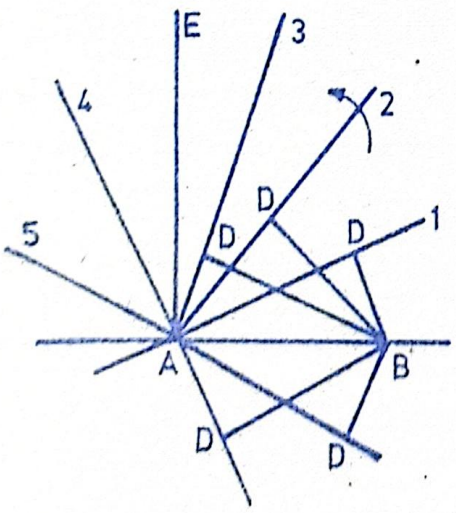


Fig. 3

Pentru a demonstra acest lucru, luăm cazul cînd dreapta ocupă poziția 3. În triunghiul ABD, BD este catetă și BA este ipotenuză, deci $BD < BA$, adică distanța $< BA$. Numai cînd dreapta coincide cu AE distanța $= BA$.

4.1.5. Se unește vîrful A (fig. 4) cu M. $\Delta ANM = \Delta ANP$ (LUL), deci $AP = AM$. La fel se arată că $AR = AM$. Lungimea liniei frînte RAP este $2AM$. Ea este minimă cînd AM este minim, cînd $AM \perp BC$.

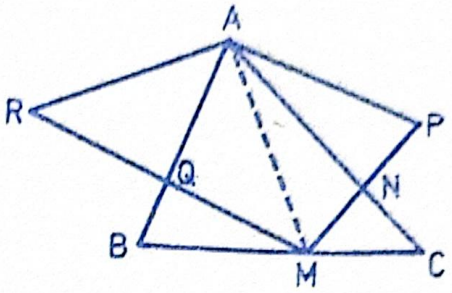


Fig. 4

4.2.1. a) Presupunem că $a < b < c$. Deoarece $a < b$, cu atît mai mult $a < b + c$; tot așa se vede că $b < a + c$. Deci rămîne de văzut dacă $c < a + b$. adică dacă latura cea mai mare este mai mică decît suma celorlalte două. Considerăm cazul triunghiului isoscel, laturile fiind a, a și b. Dacă $a < b$, fiecare dintre laturile a este mai mică decît suma celorlalte două, căci $a < b$. Rămîne de văzut dacă $b < a + c$, adică $b < 2a$. Dacă $a > b$ nu trebuie făcut nici un calcul. Dacă $a = b = c$ triunghiul există. b) Da. c) Nu. d) Da. e) Nu.

4.2.2. $c > 5$ și $c < 19$.

4.2.3. a) Cînd se trece de la triunghiul ABC la patrulaterul $BCED$, care părți din perimetrul triunghiului se pierd și ce se adaugă? Ce este mai mare, ceea ce se pierde sau ceea ce se adaugă? Perimetrul patrulaterului este mai mic. b) $BE < AB + AE$. Perimetrul triunghiului EBC este mai mic.

4.2.4. În interiorul poligonului.

4.2.5. $b < 2a$.

4.2.6. Vin în considerare două drumuri, indicate în figură. Lungimile lor sînt:

$$AC + CB \text{ și } AB + BC + CB.$$

În amîndouă cazurile el trebuie să facă drumul CB, deci rămîne să comparăm AC cu $AB + BC$. Primul drum mai scurt.

4.2.7. Fie O centrul cercului. În triunghiul OAB, ce relație există între AB și suma $OA + OB$? între această sumă și diametru? $AB <$ diametrul.

4.2.8. a, b și c fiind numere oarecare există posibilitățile următoare: 1) $a < \frac{c}{2}$ și $b < \frac{c}{2}$ 2) unul din ele este mai mic decît $\frac{c}{2}$ și celălalt este egal cu $\frac{c}{2}$, de exemplu $a < \frac{c}{2}$, $b = \frac{c}{2}$; 3) $a < \frac{c}{2}$ și $b > \frac{c}{2}$; 4) $a = \frac{c}{2}$ și $b = \frac{c}{2}$; 5) $a = \frac{c}{2}$ și $b > \frac{c}{2}$; 6) $a > \frac{c}{2}$ și $b > \frac{c}{2}$. În primul caz, $a + b < c$, deci a, b, c nu sînt laturile unui triunghi. La fel se vede că în cazurile 2 și 4 situația este aceeași. Cazurile posibile sînt 3, 5 și 6.

4.2.9. Fie a, b și c lungimile laturilor unui triunghi și p perimetrul lui, $p = a + (b + c)$. În această sumă, primul termen este mai mic decît al doilea, deci primul este mai mic decît jumătate din perimetru și al doilea este mai mare decît jumătate din perimetru.

4.2.10. a) Triunghiurile MCN, NAP și PBM (fig. 6) dau: $MN < MC + CN$,

$$NP < NA + AP,$$
$$PM < PB + BM.$$

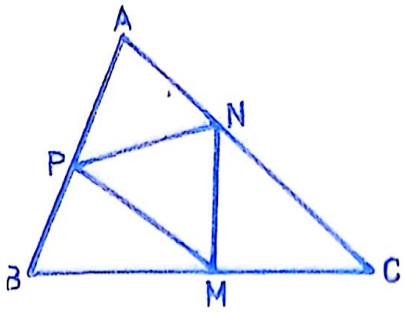


Fig. 6

Aceste relații se adună, $BM + MC$ se înlocuiește cu BC, $CN + NA$ cu CA și $AP + PB$ cu AB. Se obține $MN + NP + PM < BC + CA + AB$. Răspuns: nu. b) Același procedeu. Poligonul format are un perimetru mai mic decît cel inițial.

4.2.11. a) Triunghiurile MBC, MCA și MAB dau:

$$MB + MC > BC,\ MC + MA > CA,$$
$$MA + MB > AB.$$

Aceste neegalități se adună. b) Punctul M se unește cu toate vîrfurile poligonului și se procedează ca în cazul triunghiului.

4.2.12. a) Fie $ABCD$ un patrulater și AC o diagonală. Triunghiurile ABC și ADC dau:

$$AC < AB + BC,\ AC < AD + DC.$$

Adunarea acestor neegalități dă $2AC < p$ unde p reprezintă perimetrul patrulaterului, deci $AC < \frac{p}{2}$. La fel se obține $BD < \frac{p}{2}$. Aceste două neegalități se adună. b) Fie $AC \cap BD = O$. Triunghiurile OAB, OBC, OCD și ODA dau:

$$OA + OB > AB,\ OB + OC > BC,$$
$$OC + OD > CD,\ OD + OA > DA.$$

Aceste neegalități se adună, apoi $OA + OC$ se înlocuiește cu AC și $OB + OD$ cu BD.

4.3.1. a) $\hat{C} < \hat{A} < \hat{B}$.
b) $BC < AB < AC$.

4.3.2. a) Unghiul A opus laturii BC trebuie să fie cel mai mic. Dacă unghiul A ar fi drept sau obtuz, unghiurile B și C ar fi obtuze, deci suma lor ar fi mai mare decît 180°. Deci unghiul A este ascuțit. b) Se compară unghiurile B și C cu unghiul A. $BC > AC$ și $BC > AB$.

4.3.3. a) $\hat{A} < \hat{O}$. b) $\hat{A} \equiv \hat{O}$. c) $\hat{A} > \hat{O}$.

4.3.4. Din triunghiul ABD rezultă că unghiul BAD este complementul unghiului B; la fel, unghiul DAC este complementul unghiului C. Dar $\hat{C} < \hat{B}$, deci $\widehat{DAC} > \widehat{DAB}$.

4.3.5. Deoarece $AB < AC$, $\hat{C} < \hat{B}$. Dar $\hat{D} \equiv \hat{C}$ și $\hat{D}' \equiv \hat{B}$, deci $\hat{D} < \hat{D}'$. Triunghiul $AD'D$ dă $AD' < AD$.

4.3.6. Fie ABC un triunghi isoscel ($AB \equiv AC$) și AD înălțimea lui. Atunci DC este jumătate din bază. Numai unghiul A, de la vîrf, poate fi drept sau obtuz. a) Dacă $\widehat{BAC} < 90°$, $\widehat{DAC} < 45°$. Atunci cîte grade poate avea unghiul C? (Unghiurile DAC și C sînt complementare.) Care dintre unghiurile DAC și C este mai mare? Deci $AD > DC$, adică înălțimea este mai mare decît jumătate din bază. Reciproc, dacă $AD > DC$, $\hat{C} > \widehat{DAC}$. Aceste unghiuri fiind complementare, $\hat{C} > 45°$ și $\widehat{DAC} < 45°$, deci $\widehat{BAC} < 2 \cdot 45° = 90°$. b) Dacă $\widehat{BAC} = 90°$, cîte grade are unghiul DAC? unghiul C? $AD \equiv DC$. Reciproc, dacă $AD \equiv DC$, cîte grade are fiecare dintre unghiurile C și DAC? $\widehat{BAC} = 90°$. c) Analog cu a).

4.4.1 (fig. 8). Din relația dată și $BC < AB + AC$ rezultă că $AB < AC$, deci $\hat{C} < \hat{B}$. Fie AD o mediană a triunghiului. Se compară unghiul C cu 1 și unghiul 1 cu 2. $\hat{C} < \hat{2}$, deci $\hat{C} < \hat{A}$.

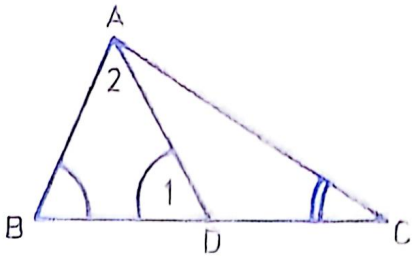


Fig. 8

4.4.2. Fie ABC (fig. 9) un triunghi și AD o mediană. O prelungim cu un segment DE congruent cu ea. $\triangle EDC \equiv \triangle ADB$ (LUL), deci $CE \equiv AB$. Din triunghiul AEC se scoate că $AE < AC + CE$. Înlocuind AE cu $2AD$ și CE cu AB, se obține $2AD < AC + AB$, deci $AD < \ldots$

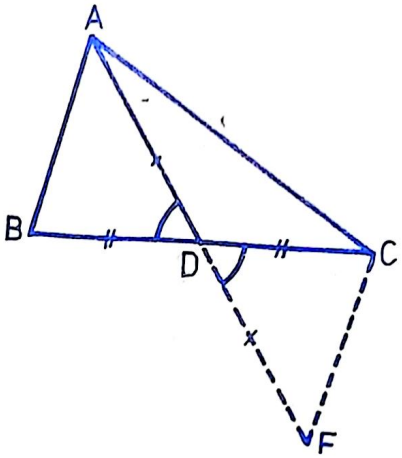


Fig. 9

4.4.3. Fie xy (fig. 10) mediatoarea laturii BC și $xy \cap AC = D$. Atunci $DC \equiv DB$. Apoi $AC = AD + DC$. Înlocuind DC prin DB, rezultă că $AC = AD + DB$. Triunghiul ABD arată că $AD + DB > AB$ deci $AC > AB$. Latura pe care o taie mediatoarea este mai mare. Mediatoarea nu

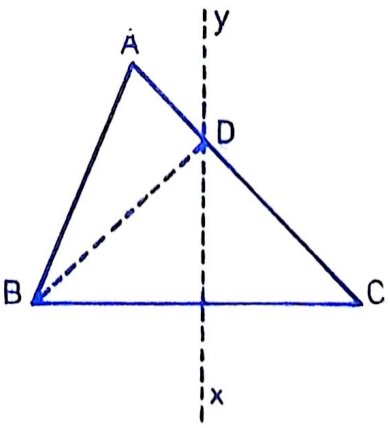


Fig. 10

poate tăia și latura AB, căci în acest caz AB ar fi mai mare decît AC, ceea ce nu este adevărat.

Observare. S-a admis, pe baza figurii, că mediatoarea taie măcar una dintre laturile AB și AC.

4.4.4. a) Punctul M este intersecția mediatoarei segmentului BC cu AB. b) În triunghiul ABC, mediatoarea laturii BC trebuie să taie latura AB, deci AB trebuie să fie mai mare decît AC (v. probl. 4.4.3). Punctul C trebuie să fie în interiorul cercului cu centrul în A și cu raza AB. c) Se poartă pe AB de la B spre A un segment BP congruent cu CD și bara se îndoaie astfel încît punctul P să cadă în C. Fie MB' noua poziție a părții MB. Ea se îndoaie în punctul C astfel ca punctul B' să cadă în D. CD trebuie să fie mai mic decît AB și C trebuie să fie în interiorul cercului cu centrul în A și cu raza AP. d) Se poartă pe AB un segment BQ de lungime $CD + DE$. Bara se îndoaie într-un punct M astfel ca punctul Q să cadă în C. Fie MB' noua poziție a părții MB ($Q = C$). Acum partea CB' se îndoaie astfel încît să treacă prin punctul D, apoi se îndoaie în punctul D.

4.4.5. a) Fie $BM \cap AC = N$ (fig. 12). Triunghiurile BAN și MNC dau:

$$MB + MN < AB + AN,$$
$$MC < MN + NC.$$

Aceste neegalități se adună, se schimbă ordinea termenilor și $AN + NC$ se înlocuiește cu AC. Se obține

$$MN + (MB + MC) < MN + (AB + AC).$$

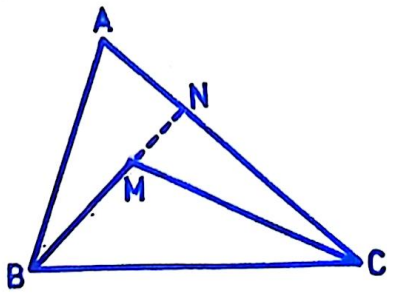


Fig. 12

Dacă la MN se adaugă prima paranteză se obține o sumă mai mică decît atunci cînd se adaugă paranteza a doua, deci prima paranteză este mai mică. b) Rezultatul obținut se aplică de trei ori:

$$MA + MB < CA + CB,$$
$$MB + MC < AB + AC,$$
$$MC + MA < BC + BA.$$

Aceste neegalități se adună și relația obținută se simplifică cu 2.

4.4.6. Fie xy mediatoarea segmentului AB (fig. 13), M un punct situat de aceeași parte a mediatoarei cu punctul B și $MA \cap xy = C$. Trebuie demonstrat că $MA > MB$.

$$MA = MN + NA.$$

Deoarece $N \in xy$, $NA \equiv NB$, deci putem înlocui NA cu NB, deci

$$MA = MN + NB.$$

Triunghiul MNB arată că $MN + NB > MB$, deci $MA > MB$.

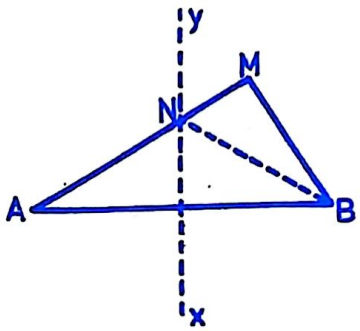


Fig. 13

4.4.7. Ducem MA și MB (fig. 14) respectiv perpendicular pe Ox și Oy. Trebuie să comparăm MA cu MB. Fie Oz bisectoarea unghiului, $MA \cap OZ = C$. Ducem CD perpendicular pe Oy; atunci $CD \equiv CA$. Folosind triunghiurile MBD și MCD, se obține:

$$MB < MD < MC + CD = MC + CA = MA.$$

La fel se arată că, dacă punctul M este în interiorul unghiului xOz, $MB > MA$.

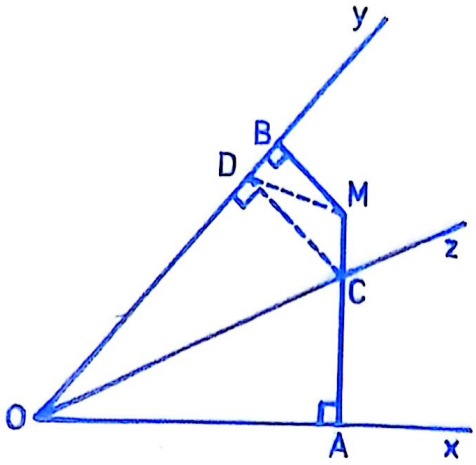


Fig. 14

Observare. S-a presupus că unghiul xOy nu este obtuz, căci dacă unghiul este obtuz și $\widehat{MOA} < 90°$, punctul A cade pe prelungirea semidreptei Ox dincolo de O, deci nu se mai poate vorbi de distanța de la punctul M la latura Ox.

4.4.8. a) Dat fiind că $\hat{C} < 90°$, unghiul ACD este ascuțit sau obtuz? Se compară acest unghi cu unghiul D. b) Purtăm pe AD un segment AE congruent cu AC. Latura BC a crescut cu CD, și AC a crescut cu ED, care este $AD - AC$. Triunghiul ACD arată că $CD > AD - AC$, adică $CD > ED$. Latura BC a crescut mai mult. c) Părțile care se desfășoară au lungimile CD și ED, $CD > ED$, deci bobina B se învîrtește mai repede. d) Bobina A. e) De-a lungul mediatoarei segmentului AB.

4.4.9 (fig. 16). Unghiul 1 este un unghi exterior al triunghiului ADC, deci $\hat{1} = \hat{v} + \hat{C}$, deci $\hat{1} > \hat{v}$. Dar $\hat{v} = \hat{u}$, deci $\hat{1} > \hat{u}$. În triunghiul ABD, care laturi se opun acestor unghiuri? $AB > BD$, adică $BD < AB$. La fel se arată că $DC < AC$.

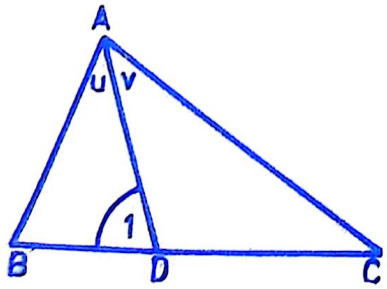


Fig. 16

Cap. 5

5.1.1. 96°.

5.1.2. Dacă $\hat{A} + \hat{B} = 180°$, cît este suma $\hat{C} + \hat{D}$? Răspuns: nu.

5.1.3. Fiecare unghi al patrulaterului trebuie să aibă mai puțin decît 180°. a) Se poate desena ușor un patrulater cu un singur unghi ascuțit, sau cu două unghiuri ascuțite (un trapez), sau cu trei unghiuri ascuțite. Dacă ar exista un patrulater cu patru unghiuri ascuțite, cîte grade ar avea suma măsurilor lor în comparație cu 360°? Un astfel de patrulater nu există. Răspuns: unul, două sau trei. b) Același raționament și același răspuns. d) Dacă un patrulater are trei unghiuri drepte, cîte grade are unghiul al patrulea? Răspuns: unul, două sau patru.

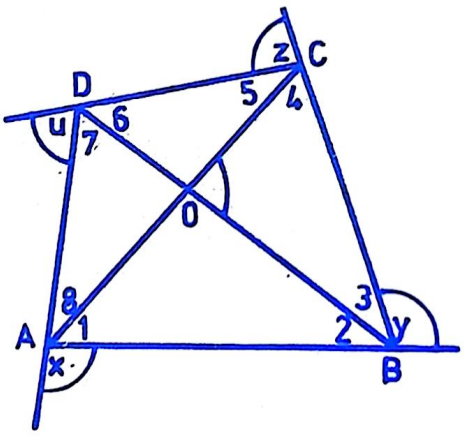


Fig. 1

5.1.9. a) Ce este unghiul BOC pentru triunghiul AOB? pentru triunghiul OCD? Ce relație există între unghiurile

$\widehat{BOC}$, $\hat{1}$ și $\hat{2}$? între $\widehat{BOC}$, $\hat{5}$ și $\hat{6}$? $\hat{1}+\hat{2} = \hat{5}+\hat{6}$. b) Se folosește unghiul AOB. $\hat{3}+\hat{4} = \hat{7}+\hat{8}$.

5.1.10. *Soluția I.* Ce este unghiul x pentru triunghiul DAB?

$$\hat{x} = \hat{2} + \hat{7}.$$

În mod analog se obține

$$\hat{y} = \hat{1} + \hat{4},\ \hat{z} = \hat{3} + \hat{6},\ \hat{u} = \hat{5} + \hat{8}.$$

Aceste relații se adună. La stînga apare suma $\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}+\hat{u}$, iar la dreapta toate cifrele de la 1 la 8. Dar $\hat{1}+\hat{8} = \hat{A}$, $\hat{2}+\hat{3} = \hat{B}$, ș.a.m.d. Se obține

$$\hat{x}+\hat{y}+\hat{z}+\hat{u} = \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}.$$

Soluția II. $\hat{x} = 180° - \hat{A}$, $y = 180° - \hat{B}$, $z = 180° - \hat{C}$, $\hat{u} = 180° - \hat{D}$. Aceste relații se adună și se ține seamă că $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 180°$ (v. probl. 3.4.5 și 3.4.6).

5.1.11. Fie M un punct oarecare din interiorul patrulaterului (fig. 2). Se compară unghiurile patrulaterelor $ABCD$ și $MBCD$. Unghiul $\hat{C}$ este comun, $\hat{1} < \hat{B}$ și $\hat{2} < \hat{D}$. Suma unghiurilor fiind aceeași în amîndouă patrulaterele, $\hat{M} > \hat{A}$. Răspuns: nu.

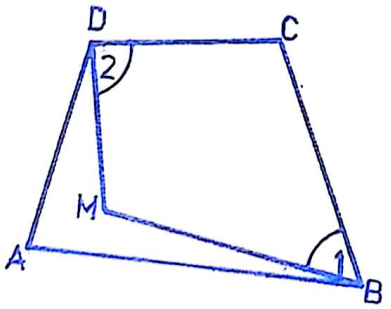


Fig. 2

5.1.12. a) Dacă triunghiul ar fi deformabil, ar exista mai multe triunghiuri cu laturile de aceeași lungime, dar cu unghiuri diferite, deci necongruente, ceea ce ar fi în contradicție cu cazul LLL. Răspuns: nu. b) Da. c) Atunci distanța dintre punctele B și D nu s-ar putea schimba, triunghiul ABD ar fi rigid (LLL), de asemenea și triunghiul DBC. Răspuns: nu. d) Același răspuns.

5.2.1. Unghiurile fiind congruente două cîte două, paralelogramul are două unghiuri „mici" congruente și două unghiuri „mari" congruente. Cîte grade are suma a două unghiuri diferite? Cîte grade are fiecare în comparație cu 90°?

Observare. Se poate face legătura cu problema următoare. Suma de 360 lei trebuie împărțită la patru copii, doi băieți și două fete, băieții primind sume egale și fetele de asemenea, dar diferite de ale băieților. La cîți copii se poate da mai mult decît 90 lei și la cîți mai puțin?

5.2.2. 63°; 117°; 117°.

5.2.3. a) 60°; 120°. b) 45°; 135°.

5.2.4. Se formează patru perechi de unghiuri congruente (alt. int.).

5.2.5. *Soluția I* (fig. 4). Ca în orice patrulater, $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D} = 360°$. Dacă $\hat{A} \equiv \hat{C}$ și $\hat{B} \equiv \hat{D}$, putem înlocui $\hat{C}$ cu $\hat{A}$ și $\hat{D}$ cu $\hat{B}$. Rezultă că $2\hat{A}+2\hat{B} = 360°$, $2(\hat{A}+\hat{B}) = 360°$, $\hat{A}+\hat{B} = 180°$. Pe de altă parte $\hat{1}+\hat{B} = 180°$, deci $\hat{A} \equiv \hat{1}$, deci $AD \parallel BC$. La fel se arată că $AB \parallel DC$. Răspuns: da.

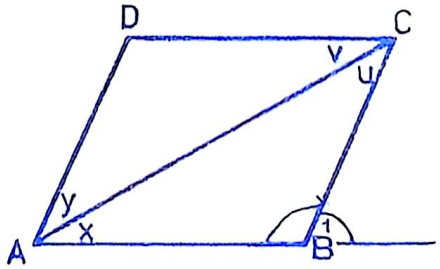


Fig. 4

Soluția II (fig. 4). Triunghiurile ABC și ADC arată că

$$\hat{x} + \hat{u} + \hat{B} = \hat{y} + \hat{v} + \hat{D}.$$

Deoarece, prin ipoteză, $\hat{B} \equiv \hat{D}$, rezultă că

$$\hat{x} + \hat{u} = \hat{y} + \hat{v}. \quad (1)$$

Tot prin ipoteză $\hat{A} \equiv \hat{C}$. Dar $\hat{A} = \hat{x} + \hat{y}$ și $\hat{C} = \hat{u} + \hat{v}$, deci

$$\hat{x} + \hat{y} = \hat{u} + \hat{v}. \quad (2)$$

Adunăm relațiile (1) și (2):

$$2\hat{x} + \hat{u} + \hat{y} = 2\hat{v} + \hat{u} + \hat{y}.$$

De aici rezultă că $2\hat{x} = 2\hat{v}$, deci $\hat{x} \equiv \hat{v}$. Aceste unghiuri fiind alterne interne, rezultă că $\overset{\frown}{AB} \parallel DC$. Din (1) și $\hat{x} \equiv \hat{v}$ rezultă că $\hat{u} \equiv \hat{y}$. Aceste unghiuri fiind alterne interne, $AD \parallel BC$.

5.2.6. 13 cm; 17 cm; 17 cm.

5.2.7. Fie $ABCD$ paralelogramul. Se află întîi suma $AB + AC$; $BD = 15$ cm.

5.2.8. Se află întîi suma laturilor AB și AD. Perimetrul $= 27$ cm.

5.2.9. Fie $ABCD$ paralelogramul și O centrul lui. Se află întîi suma $OA + OB$. $15 + 12 = 27$ cm și $15 + 7 = 22$ cm.

5.2.10. Fie C mijlocul lui AB. Pe AC se ia un punct oarecare D și pe CB se ia un punct E astfel încît segmentul EB să fie congruent cu DC.

5.2.14. Fie $ABCD$ și $A'B'C'D'$ două paralelograme, notațiile fiind cele din figura 8. Ca ele să fie congruente, este suficient să aibă loc relațiile: a) $AB \equiv A'B'$, $AD \equiv A'D'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$. b) $AB \equiv A'B'$, $AD \equiv A'D'$, $BD \equiv B'D'$. c) $AB \equiv A'B'$, $AD \equiv A'D'$, $AC \equiv A'C'$. d) $AC \equiv A'C'$, $BD \equiv B'D'$, $\overset{\frown}{AOB} \equiv \overset{\frown}{A'O'B'}$.

5.2.15. Fie $ABCD$ paralelogramul, $AB \parallel CD$, A opus lui C, și O intersecția diagonalelor. În triunghiul OAB, $AB < OA + OB$. Dar

$$OA = \frac{AC}{2} \text{ și } OB = \frac{BD}{2}, \text{ deci}$$

$$AB < \frac{AC}{2} + \frac{BD}{2}, \quad AB < \frac{AC + BD}{2}.$$

5.2.16. Liniile orizontale se prelungesc pînă la intersecția cu BC; se formează paralelograme în care latura din dreapta este congruentă cu cîte un segment oblic al scării. Suma lungimilor acestor segmente este egală cu BC. La fel se află suma lungimilor segmentelor orizontale. Lungimea cerută este de 25 cm.

5.2.17. a) Se compară ED cu AF. Apoi se compară unghiurile FDC și C cu unghiul B. Ce fel de triunghi este FDC? $FD \equiv FC$. Deci $ED + DF = AF + FC = AC = 7$ cm. b) Lungimea EDF este aceeași oricare ar fi punctul D.

5.2.18. a) $AM \parallel DN$ și $AM \equiv DN$. Paralelogram. b) Același răspuns.

5.2.19. a) $OB \equiv OB'$ și $OB \parallel OB'$; paralelogram. b) De asemenea. c) De asemenea.

5.2.20. Se compară OM cu OP și ON cu OQ. Răspuns: da.

5.2.21. Fie O centrul cercurilor. Se compară OA cu OB și OC cu OD. Paralelogram.

5.2.22. Se duce diagonala AC; ea trece prin O. $\triangle OAM \equiv \triangle OCN$ (ULU), deci $OM \equiv ON$. La fel, $\triangle OAP \equiv \triangle OCQ$ (ULU), deci $OP \equiv OQ$. Diagonalele patrulaterului $MQNP$ se împart în părți congruente, deci...

5.2.23 (fig. 9). Presupunem că $AB \parallel CD$ și $OB \equiv OD$. $\triangle AOB \equiv \triangle COD$ (LUL), deci $AB \equiv CD$. Patrulaterul are două laturi congruente și paralele, deci...

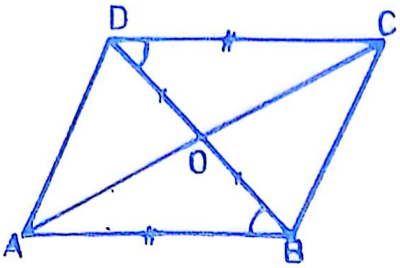


Fig. 9

5.2.24. $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$ (ULU) deci $\widehat{DBC} \equiv \widehat{ADB}$, deci $AD \parallel BC$. Răspuns: da.

5.2.25 (fig. 10). a) Se compară unghiul 1 cu 2 (jumătăți de unghiuri congruente) și unghiul 2 cu 3. $\hat{1} \equiv \hat{3}$, deci $AE \parallel CF$. c) Cîte grade are suma unghiurilor B și C ale paralelogramului? dar suma jumătăților lor 4 și 5? $\hat{G} = 90°$.

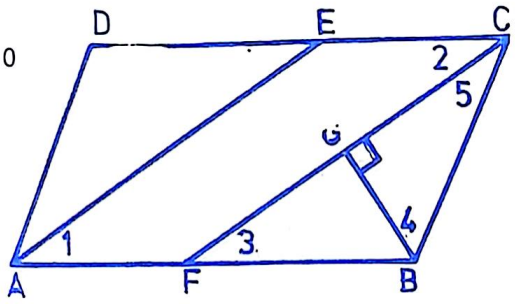


Fig. 10

5.2.26. a) Se compară unghiurile ADB și DBC (fig. 11), apoi jumătățile lor 1 și 2; $DE \parallel BF$. Paralelogram. b) Paralelogram.

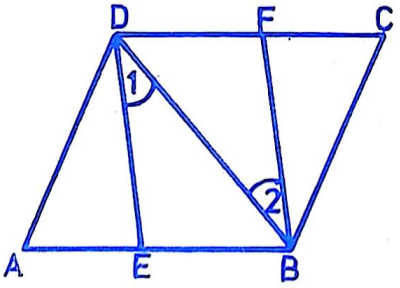


Fig. 11

5.2.27. Se compară unghiul ADB cu DBC, apoi unghiul 1 cu 2; $DE \parallel BF$. La fel se arată că $DF \parallel BE$. Paralelogram.

5.2.28. *Soluția I.* a) Se compară unghiul $\hat{1}$ cu $\hat{2}$ și $\hat{1}$ cu $\hat{3}$ (fig. 13); unghiul 2 $\equiv$ unghiul 3, deci $DE \equiv DA$. La fel se arată că $BF \equiv BC$. Dar $BC \equiv DA$, deci $BF \equiv DE$. Patrulaterul $FBED$ are două laturi congruente și paralele, deci este paralelogram. b) Dacă din laturile AB și DC, care sînt congruente, scădem segmentele congruente FB și DE, rămîn părți congruente, $AF \equiv EC$. Aceste segmente fiind și paralele, patrulaterul $AFCE$ este paralelogram.

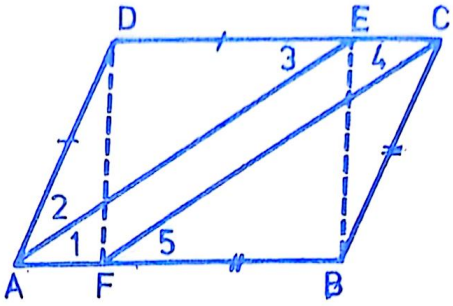


Fig. 13

Soluția II. b) Se compară unghiul 1 cu 4 și acesta cu unghiul 5; unghiul 1 $\equiv$ unghiul 5, deci $AE \parallel FC$; $AFCE$ este un paralelogram. a) Rezultă că $AF \equiv CE$. Dacă din AB și CD se scad segmentele congruente AF și EC, rămîn segmente congruente, deci $FB \equiv DE$. Patrulaterul $FBED$ are două laturi egale și paralele, deci...

5.2.29. În triunghiul ABC (fig. 14), care dintre laturile AB și BC este mai mare? Care dintre unghiurile 1 și 3 este mai mare? Ce relație există între unghiurile 3 și 2? $\hat{1} < \hat{2}$. La fel se arată că $\hat{4} < \hat{5}$. Diagonala face cu latura mai mare un unghi mai mic.

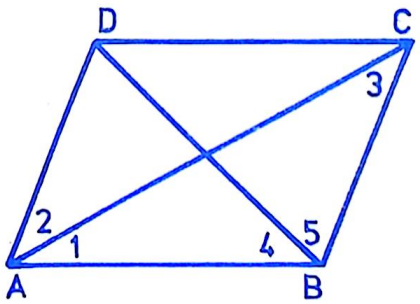


Fig. 14

5.2.30 (fig. 15). Ce fel de patrulater este $OBAC$? Punctul M este mijlocul diagonalei OA, deci diagonala BC trece prin punctul M.

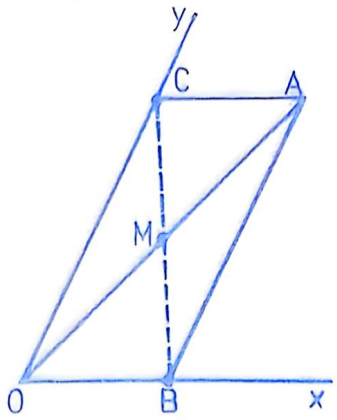


Fig. 15

5.2.31. a) Ce poziție au una față de alta dreptele AM și DN (fig. 16)? Se compară lungimile laturilor AM și DN. $AMND$ este un paralelogram. De asemenea $MBCN$. b) Se compară laturile MB și DN; $DM \parallel NB$. De asemenea $AN \parallel MC$.

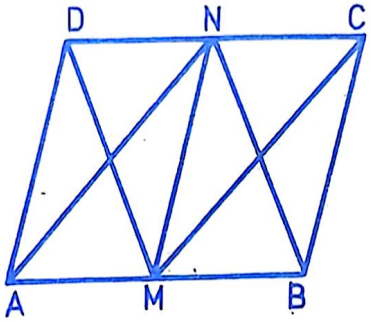


Fig. 16

5.2.32 (fig. 17). Se trasează baza AB a paralelogramului și prin capetele ei se duc două semidrepte paralele Ax și By situate de aceeași parte a dreptei AB. Pentru a putea trasa latura a patra, se duc bisectoarele unghiurilor A și B; fie M intersecția lor. Prin punctul M se duce paralela la AB.

a) Se compară unghiurile 2 și 3 cu unghiul 1; $\hat{2} \equiv \hat{3}$, deci $DM \equiv AD$. La fel, $MC \equiv CB$. Deci, $DC = 2AD$.

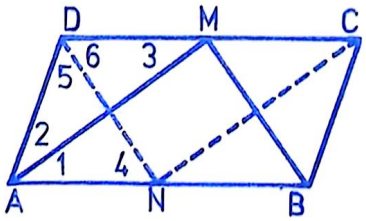


Fig. 17

b) Perimetrul paralelogramului se compune din 6 părți congruente cu AD. Rezultă că $AD = 12 : 6 = 2$ cm; $AB = 4$ cm. c) Fie N mijlocul laturii AB. Atunci AN este jumătate din AB, deci $AN \equiv AD$. Rezultă că $\hat{4} \equiv \hat{5}$; dar $\hat{4} \equiv \hat{6}$ (alt. int.), deci $\hat{5} \equiv \hat{6}$, deci DN este bisectoarea unghiului D. Înseamnă că bisectoarea unghiului D trece prin punctul N. La fel se arată că bisectoarea unghiului C trece prin N.

5.2.33 (fig. 18). Se compară segmentul NM cu AP și MP cu NA. $BN + MP = AB$, $NM + PC = AC$. Suma celor patru segmente care formează linia frântă este egală cu $AB + AC$. Ea nu depinde de poziția punctului M. Nu există nici maxim nici minim.

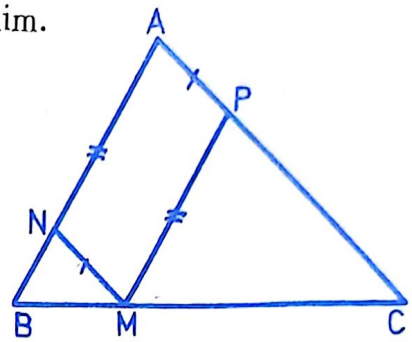


Fig. 18

5.2.34. a) Cé fel de patrulater este $BMNA$ (fig. 19)? $BM \equiv AN$. La fel se arată că $MC \equiv PA$. Din aceste relații se deduce, prin adunare, că $BC \equiv PN$. Patrulaterul $BCNP$ are două laturi congruente și paralele, deci este un paralelogram. b) $MN \equiv BA$ și $MP \equiv CA$ (paralele cuprinse între paralele) și unghiul 1 $\equiv$ unghiul 2 (unghiuri cu laturi paralele). c) Rotație cu 180° în jurul mijlocului segmentului AM. (Ordinea primelor două puncte se poate inversa. Se demonstrează că $\triangle MNP \equiv \triangle ABC$ (LUL) și de aici se deduce că $PN \equiv BC$, deci patrulaterul $BCNP$ are două laturi congruente și paralele.)

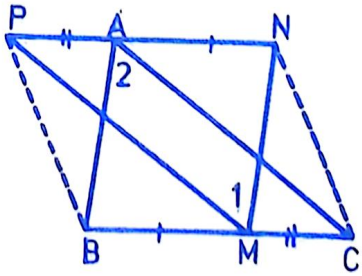


Fig. 19

5.2.35. *Soluția I.* Cîte grade are unghiul EMC? Se compară acest unghi cu unghiul B; ce poziție are dreapta ME față de BA? La fel se arată că $MD \parallel CA$. $ADME$ este un paralelogram.

Soluția II. Ce fel de triunghiuri sînt DBM și EMC? Fie $BM = b$, $MC = c$. Triunghiul DBM fiind echilateral, $DM = b$ și $BD = b$; apoi, deoarece BD este congruent cu una din părțile în care punctul M împarte latura triunghiului, DA este congruent cu cealaltă parte, $DA \equiv c$. La fel se arată că $ME = c$ și $EA = b$. Rezultă că $DM \equiv AE$ și $ME \equiv DA$, deci... Perimetrul paralelogramului este dublul laturii triunghiului.

5.2.36 (fig. 20). Se prelungește segmentul OM cu un segment MN congruent cu el și prin punctul N se duc paralelele la laturile unghiului. Fie $OANB$ paralelogramul care se formează astfel. Punctul M fiind mijlocul diagonalei ON, diagonala AB trece prin punctul M și acest punct este mijlocul ei, deci dreapta căutată este AB.

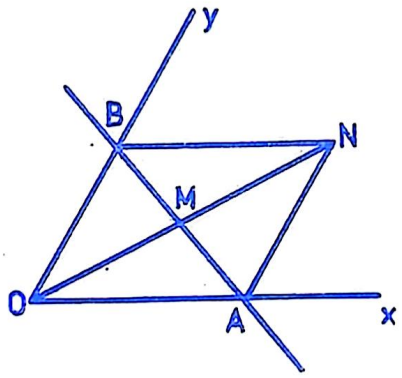


Fig. 20

5.2.37 (fig. 21). Se poartă pe baza BC un segment BD congruent cu s și prin D se duce paralela la BA; fie N intersecția ei cu AC. Prin N se duce paralela la BC; intersecția ei cu AB este punctul căutat M. În adevăr, $MN \equiv BD$ (paralele cuprinse între paralele). Problema are o soluție dacă $s \leqslant BC$.

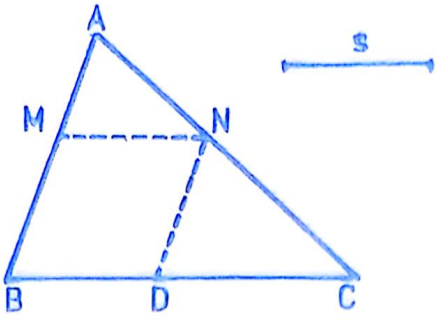


Fig. 21

5.2.38 (fig. 22). Printr-un punct oarecare A al dreptei d se duce paralela la dreapta f și se poartă pe ea două segmente AB și AB' congruente cu s. Prin punctul B se duce paralela BN la d, $N \in e$, și prin N se duce paralela la f. Punctul ei de intersecție cu dreapta d este punctul căutat. În adevăr, $MN \equiv AB \equiv s$ (paralele cuprinse între paralele). În mod analog se găsește punctul M' care îndeplinește de asemenea condiția.

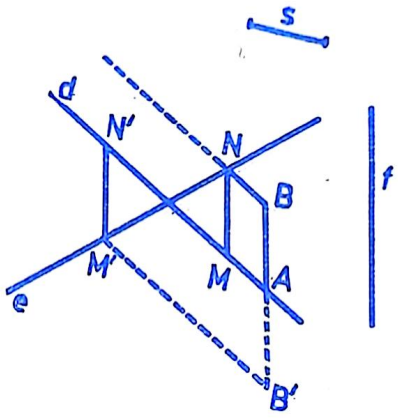


Fig. 22

5.2.39 (fig. 23). Se trasează un cerc cu centrul într-un punct oarecare M al dreptei d și cu raza congruentă cu a; fie N și P punctele lui de intersecție cu dreapta e. Prin punctul O se duc paralelele la MN și MP. Dreptele AB și $A'B'$ sînt cele căutate. Dacă punc-

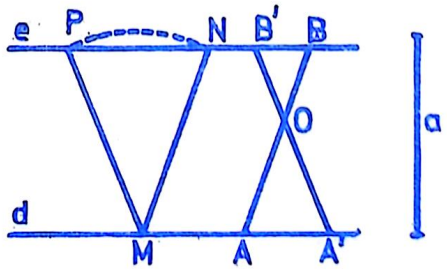


Fig. 2

tul O este în exteriorul fîşiei, soluţia este aceeaşi. Fie b distanţa dintre dreptele d şi e. Dacă $a > b$, problema are două soluţii; dacă $a \equiv b$, o singură soluţie; dacă $a < b$, nici o soluţie.

5.2.40. a) Ce fel de patrulater este $DCGA$ (fig. 24)? $AG \parallel DC$, adică $AG \parallel BC$. La fel, $AH \parallel BC$. Prin punctul A se poate duce numai o singură paralelă la BC, deci dreptele AG şi AH coincid. b) $BDGA$ este un paralelogram, căci $BD \equiv AG$ $(\equiv DC)$. Fie $BG \cap AD = K$; punctul K este mijlocul diagonalei AD. La fel, HC trece prin mijlocul diagonalei AD.

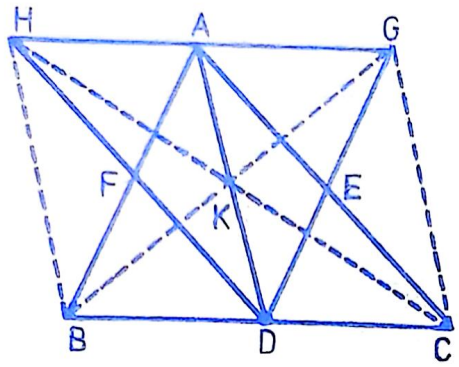


Fig. 24

5.2.41. Se desenează un paralelogram oarecare $ABCD$, A opus cu C, prin A şi C se duc două semidrepte paralele situate de o parte şi de alta a dreptei AC şi se poartă pe ele două segmente congruente AE şi CF. Punctele O şi O' coincid cu mijlocul diagonalei AC.

5.2.42. a) $OA \equiv O'A'$ şi $OA \parallel O'A'$; paralelogram. b) La fel. c) Se trasează diagonalele ambelor patrulatere. Centrele coincid cu mijlocul segmentului OO'.

5.2.43. a) Fie M şi N (fig. 26) poziţiile punctelor mobile într-un moment oarecare; $DM \equiv BN$. Se compară segmentele AM şi CN. Ce fel de patrulater este $ANCM$? Fie O mijlocul diagonalei AC. Care este centrul paralelogramului $ANCM$? Dreapta MN trece mereu prin punctul O care este fix; punctul N este invizibil din M. b) Aceeaşi soluţie.

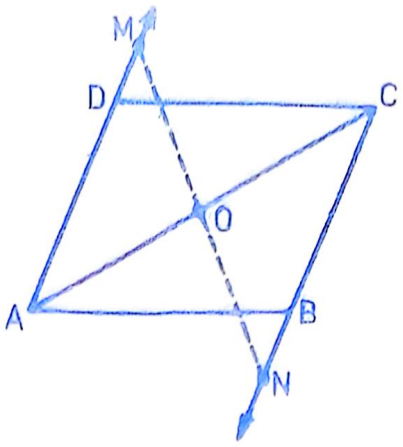


Fig. 26

5.2.44 (fig. 27). Ce fel de patrulater este $ANCM$? Care este centrul lui? Cînd dreptele Ax şi By se rotesc, diagonala AC se schimbă? Dreapta MN se roteşte în jurul centrului O al paralelogramului $ABCD$.

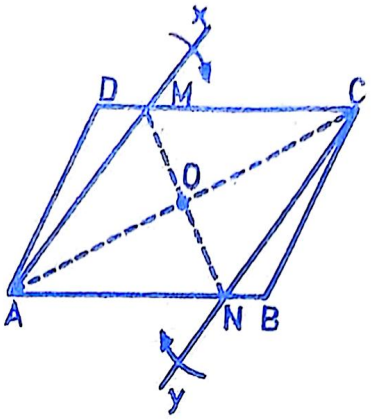


Fig. 27

5.2.45. *Soluţia I* (fig. 28). a) $\triangle AMD \equiv \triangle CNB$ (ULU), căci $AD \equiv BC$ şi unghiurile notate cu aceeaşi cifră sînt congruente, ca jumătăţi de unghiuri congruente. Rezultă că $DM \equiv BN$ şi $AM \equiv CN$. Apoi $\triangle AMB \equiv \triangle CND$ (LUL), deci $BM \equiv DN$. Rezultă că patrulaterul $MBND$ are laturile opuse congruente două cîte două, deci... Centrul acestui paralelogram este mijlocul diagonalei BD, care este şi centrul paralelogramului $ABCD$. b) $ANCM$.

Soluţia II. Simetrie faţă de punctul O.

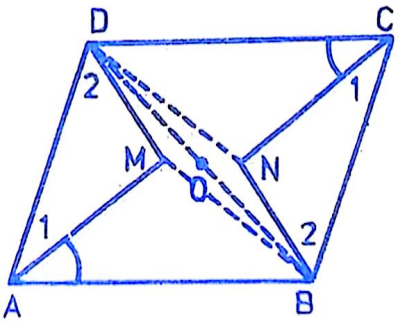


Fig. 28

5.2.46. Fie O centrul paralelogramului $ABCD$; el este mijlocul diagonalei AC. Într-un paralelogram, fiecare diagonală trece prin mijlocul celeilalte. Care sînt diagonalele paralelogramului $AMCP$? Deci diagonala PM trece prin mijlocul diagonalei AC, adică prin punctul O. Tot așa, care sînt diagonalele paralelogramului $AQCN$? QN trece prin O. În sfîrșit, care sînt diagonalele paralelogramului $AECF$? FE trece prin O.

5.2.47. a) Lungimile laturilor se schimbă? Laturile opuse rămîn congruente. Răspuns: nu. b) Laturile opuse pot deveni congruente? Răspuns: nu. c) Dreapta MN rămîne fixă, verticală. Deoarece $AC \parallel MN$, AC rămîne de asemenea verticală, deci...

5.3.1 (fig. 31). Dreptunghiul este un patrulater cu trei unghiuri drepte. Trebuie demonstrat că, dacă într-un patrulater $ABCD$, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = 90°$, patrulaterul este paralelogram. Deoarece $AD \perp AB$ și $BC \perp AB$, $AD \parallel BC$; la fel se deduce că $AB \parallel CD$, deci....

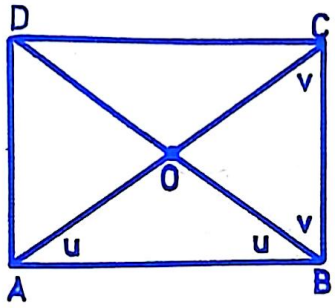


Fig. 31

5.3.2. Se știe că diagonalele unui dreptunghi sînt congruente și se împart în părți congruente. Ce fel de triunghi este OAB? Unghiul $OAB \equiv$ unghiul OBA. Cele opt unghiuri se împart în două grupe de cîte patru unghiuri congruente.

5.3.3. a) Unghiul v (fig. 31) se află din triunghiul isoscel OBC. 59° și 31°. b) Triunghiul OAB dă $\widehat{AOB} = 96°$.

5.3.8. Fie $ABCD$ și $A'B'C'D'$ două dreptunghiuri, cu notațiile din figura 36. Ca ele să fie congruente, este suficient să aibă loc relațiile: a) $AB \equiv A'B'$, $AD \equiv A'D'$. b) $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$. c) $AB \equiv A'B'$, $\widehat{CAB} \equiv \widehat{C'A'B'}$. d) $AC \equiv A'C'$, $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$.

5.3.9. *Soluția I* (fig. 31). $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ (LLL), deci unghiul $DAB \equiv$ unghiul CBA. Aceste unghiuri fiind suplementare, cîte grade are fiecare? Dreptunghi.

Soluția II. Se compară OA cu OB. Ce fel de triunghi este AOB? Unghiurile notate cu u sînt congruente; de asemenea cele notate cu v. Suma unghiurilor triunghiului ABC este de 180°, $2u + 2v = 180°$, deci $u + v = 90°$, adică unghiul B este drept.

5.3.10 (fig. 32). Fie O centrul paralelogramului. Ce fel de triunghi este OAB? Se compară diagonalele AC și BD. Diagonalele fiind congruente, paralelogramul este dreptunghi (v. probl. 5.3.9).

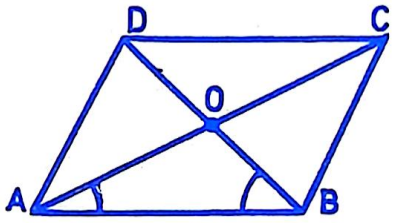


Fig. 32

5.3.11. Fie $ABCD$ (fig. 33) un paralelogram și xy mediatoarea laturii AB; deci punctele A și B sînt simetrice față de xy. Dacă xy este o axă de simetrie a paralelogramului, $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Pe de altă parte, $ABCD$ fiind un paralelogram, $\hat{A} + \hat{B} = 180°$. Rezultă că $\hat{A} = \hat{B} = 90°$. Paralelogramul este dreptunghi.

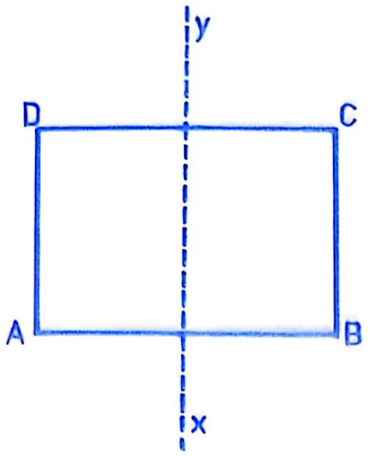


Fig. 33

5.3.12. *Soluția I.* a) Ce fel de triunghiuri sînt RNO și SQO (fig. 34)? Se compară unghiurile 1, 2, 3 și 4; unghiul 1 $\equiv$ unghiul 3. Aceste unghiuri fiind alterne interne, ... b) $MN \equiv OB$, $PQ \equiv OD$, deci $MN + PQ = OB + OD = BD$. Suma este mereu egală cu diagonala dreptunghiului $ABCD$.

Soluția II. a) Se duce diagonala AC și se compară unghiurile 6 și 7 cu 5; unghiul 7 $\equiv$ unghiul 6, deci $MN \parallel AC$. La fel se arată că $QP \parallel AC$, deci... (v. probl. 15.3.8.)

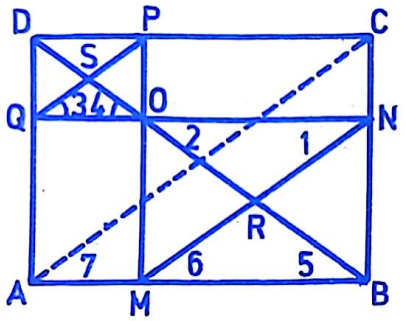


Fig. 34

5.3.13. a) Într-un punct oarecare A al laturii Ox (fig. 35) se ridică perpendiculara pe Ox și se poartă pe ea, în interiorul unghiului, un segment AB de lungime a. Prin B se duce paralela la Ox; intersecția ei cu Oy este punctul căutat M, căci $MN \equiv AB$. În mod analog se află punctul P. b) Într-un punct oarecare A al dreptei d (fig. 36) se ridică perpendiculara pe d și se poartă pe ea, în semiplanul în care se găsește cercul, un segment AB de lungime a. Prin B se duce paralela la d; punctele M și M' în care paralela taie cercul sînt cele căutate.

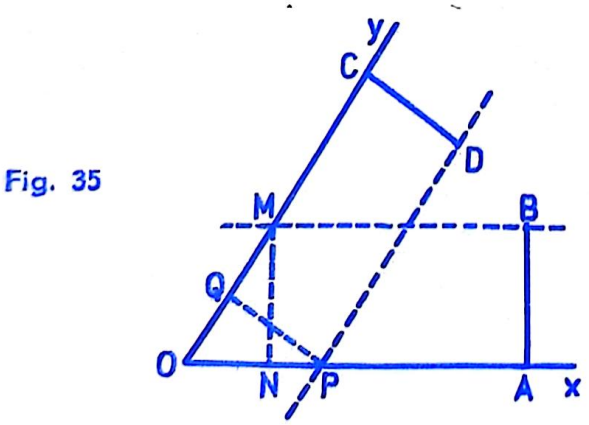


Fig. 35

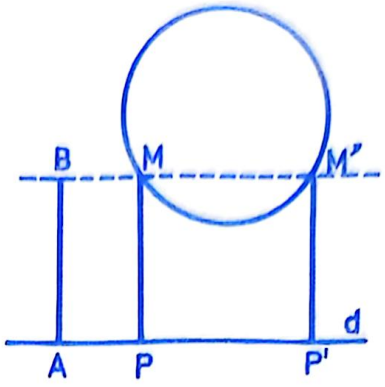


Fig. 36

5.3.14 (fig. 37). Fie xOy un unghi. linia verticală reprezintă marginea foii de desen. Se fac construcțiile următoare: $AB \perp Ox$, $Bu \parallel Ox$, $CD \perp Oy$, $CD \equiv AB$, $Dv \parallel Oy$. Fie $Bu \cap Dv = M$.

$$MN \equiv BA,\ MP \equiv DC,\ BA \equiv DC',$$

deci $MN \equiv MP$, punctul M aparține bisectoarei. Luînd în locul lui AB un alt segment, AB', și CD' congruent cu AB', se obține la fel punctul M' care aparține de asemenea bisectoarei, deci bisectoarea este MM'.

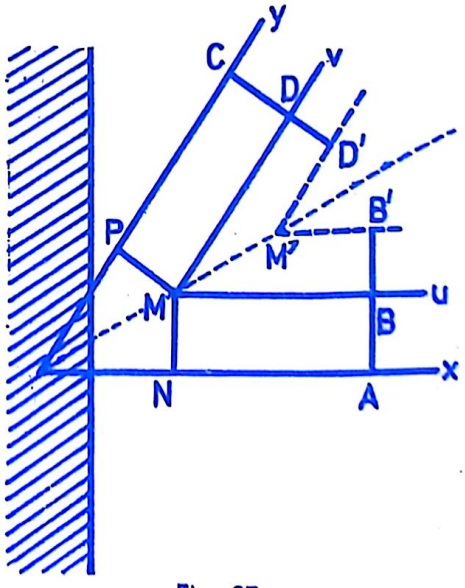


Fig. 37

5.3.15 (fig. 38). Ce fel de triunghi este BMN? Se compară segmentul MN cu BN și MP cu NA. $MN + MP = BA$, deci este aceeași oricare ar fi punctul M. Nu există nici maxim, nici minim.

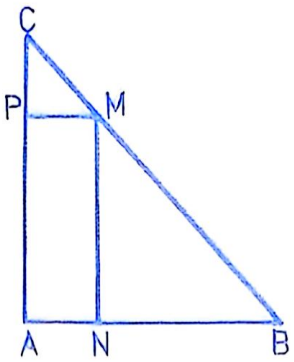


Fig. 38

5.3.16 (fig. 39). Oricum am lua punctele M și N, $MP \equiv BP$, $NQ \equiv QC$, căci triunghiurile MBP și NCQ sînt isoscele. În general, $MN > PQ$, căci $MN > NR$ și $NR \equiv PQ$. Rezultă că lungimea $PMNQ > BC$; numai cînd $MN \parallel BC$, $MN \equiv PQ$. Rezultă că lungimea $PMNQ$ este minimă cînd $MN \parallel BC$. Rămîne de văzut unde trebuie luat punctul M. Acest punct poate fi luat după voie pe AB; oricînd lungimea $PMNQ = BC$.

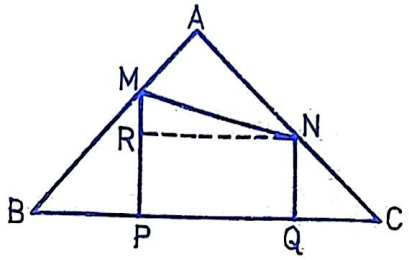


Fig. 39

5.3.17. a) Fie ABC un triunghi dreptunghic (fig. 40). Ducem prin vîrfurile B și C paralelele la laturile AC și AB. Patrulaterul $ABDC$ care se formează astfel este un dreptunghi, deci diagonalele sale sînt congruente și se împart în părți congruente, $OA \equiv OD \equiv OB \equiv OC$. Relația $OB \equiv OC$ arată că AO este mediană și segmentele OB și OC sînt jumătăți ale ipotenuzei, iar relația $AO \equiv OC$ arată că... b) Fie ABC un triunghi în care mediana AO este congruentă cu jumătatea laturii BC, $AO \equiv OB \equiv OC$. Prelungim mediana AO cu un segment OD congruent cu ea, $OD \equiv AO$, și formăm patrulaterul $ABDC$. Segmentele OA, OD, OB și OC fiind congruente, înseamnă că diagonalele AD și BC sînt congruente și se împart în părți congruente, deci patrulaterul este dreptunghic, deci unghiul BAC este drept. (v. probl. 6.5.12 și 8.5.9)

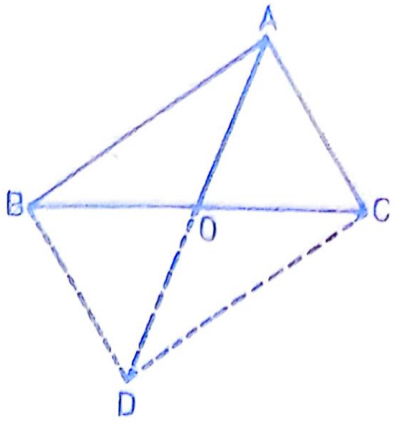


Fig. 40

5.3.18. Segmente de drepte paralele cuprinse între paralele.

5.3.19. a) Fie M și M' (fig. 43) două poziții ale punctului și MN, $M'N'$ distanțele sale la dreapta d. $MN \equiv M'N'$, căci distanța rămîne constantă și $MN \parallel M'N'$, căci amîndouă sînt perpendiculare pe d. Punctul M descrie

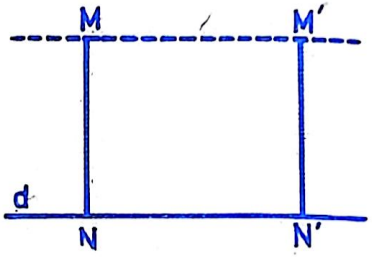


Fig. 43

o dreaptă paralelă cu d. b) Fie AB și $A'B'$ două poziții ale greblei, PQ coada greblei și A un dinte (în figura 44 lungimea dinților greblei se neglijează). Privim segmentul AP. Cînd mișcăm grebla, punctul P se mișcă pe dreapta PQ și segmentul AP rămîne perpendicular pe PQ, căci coada este perpendiculară pe greblă. Rezultă că punctul A descrie o dreaptă AA' paralelă cu PQ. La fel se demonstrează că orice alt dinte, de exemplu B, descrie o dreaptă paralelă cu PQ. Deci, toți dinții descriu drepte paralele între ele.

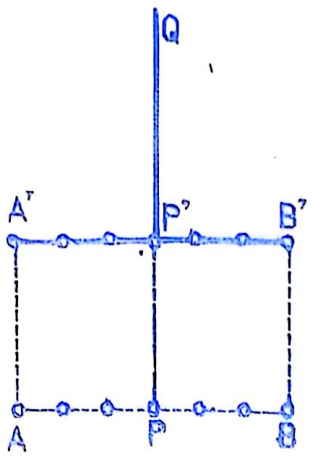


Fig. 44

5.4.1. Rombul este un patrulater în care toate laturile sînt congruente. De aici rezultă că rombul este un paralelogram, căci laturile opuse sînt congruente două cîte două.

5.4.2. 30°; 150°.

5.4.3. Fie $ABCD$ rombul, $BD \equiv AB$. a) Ce fel de triunghi este ABD? 60°; 120°. b) 30°; 60°.

5.4.4. Fie $ABCD$ rombul, $\hat{B} = 120°$. Se află unghiul A. Ce fel de triunghi este ABD? 28 cm.

5.4.5. a) Hîrtia se împăturește de două ori, o dată după o dreaptă oarecare și a doua oară după o dreaptă perpendiculară pe prima, apoi se taie un colț al hîrtiei astfel împăturite. b) Hîrtia se împăturește de două ori după drepte paralele și se continuă ca în cazul a).

5.4.6. Toate laturile rămîn congruente. Răspuns: nu.

5.4.7. Fie AB o latură a rombului și O centrul lui. Ce fel de triunghi este OAB? Ce este mai mare OA sau AB? Răspuns: nu.

5.4.12. Fie $ABCD$ și $A'B'C'D'$ două romburi, notațiile fiind cele din figura 46. Ca ele să fie congruente, este suficient să aibă loc relațiile: a) $AB \equiv A'B'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$. b) $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$. c) $AC \equiv A'C'$, $BD \equiv B'D'$. d) $AB \equiv A'B'$, $\overset{\frown}{CAB} \equiv \overset{\frown}{C'A'B'}$.

5.4.13. a) Fie $ABCD$ rombul (fig. 46), $DE \perp AB$ și $DF \perp BC$. $\triangle DAE \equiv \triangle DCF$ (ULU), deci $DE \equiv DF$. b) Fie $ABCD$ un paralelogram, notațiile fiind aceleași, în care $DE \equiv DF$. $\triangle DAE \equiv \triangle DCF$ (ULU), deci $AD \equiv DC$, deci...

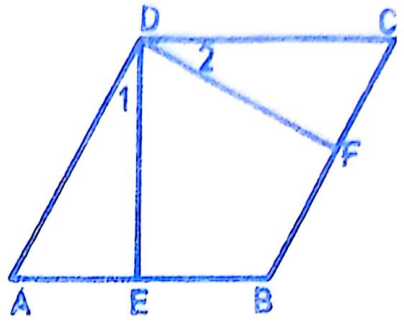


Fig. 46

5.4.14. Fie $ABCD$ paralelogramul ($AB \parallel CD$, A opus lui C) și O centrul lui. $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$ (LUL), deci $AB \equiv AD$. Romb.

5.4.15. a) Unghiurile opuse ale unui paralelogram fiind congruente, jumătățile lor sînt de asemenea congruente, deci $\hat{1} \equiv \hat{3}$ (fig. 47), deci triunghiul ABC este isoscel, $AB \equiv AC$. Răspuns: da. b) Dacă una dintre diagonale este bisectoare, paralelogramul este romb, deci și cealaltă diagonală este bisectoare. Răspuns: nu.

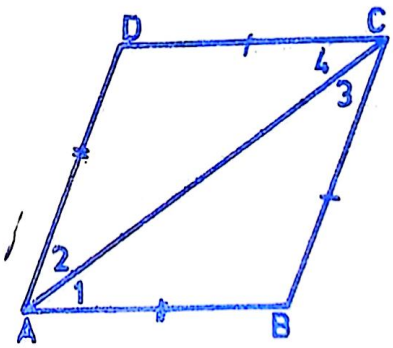


Fig. 47

5.4.16. Patrulaterul este în orice caz paralelogram. Condiția ca să fie romb este ca diagonala AM să fie bisectoare (v. probl. 5.4.15), deci punctul M

trebuie să fie intersecția lui BC cu bisectoarea unghiului A.

5.4.17. *Soluția I.* a) $DE \perp AB$ și $BH \perp AB$ (fig. 48), deci $DE \parallel BH$; de asemenea $BG \parallel DF$. Rezultă că $DKBL$ este un paralelogram. Apoi, triunghiul ADB este isoscel ($AB \equiv AD$), deci unghiul 1 $\equiv$ unghiul 2, deci și complementele lor sînt congruente, unghiul 3 $\equiv$ unghiul 4. Rezultă că triunghiul LBD este isoscel, $LB \equiv LD$. Patrulaterul $LDKB$ este romb.

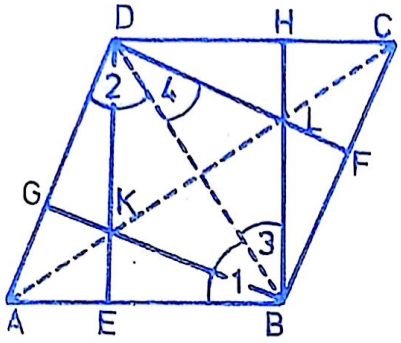


Fig. 48

b) Într-un romb, fiecare diagonală este mediatoarea celeilalte. Rezultă că dreapta AC este mediatoarea diagonalei BD și dreapta KL este de asemenea mediatoarea diagonalei BD, deci AC și KL sînt una și aceeași dreaptă.

Soluția II. Simetrie față de dreapta BD.

5.5.1. În dreptunghiul rămas, două laturi vecine sînt congruente.

5.5.2. a) $\triangle AMQ \equiv \triangle BNM$ (LUL), deci $QM \equiv MN$ și $\hat{1} \equiv \hat{3}$. Dar $\hat{1} + \hat{2} = 90°$. Deci $\hat{2} + \hat{3} = 90°$. Rezultă că $\hat{4} = 90°$. La fel se arată că $MN \equiv NP$ și $\hat{5} = 90°$ ș.a.m.d. Pătrat. b) Fie $AC \cap NQ = O$. $\triangle AOQ \equiv \triangle CON$ (ULU), deci $OA \equiv OC$ și $ON \equiv OQ$. Rezultă că punctul O este centrul ambelor pătrate. c) Analog cu a) și b).

5.5.3. a) Cîte grade are unghiul format de diagonalele pătratului? Cu 90°. b) Fie $ABCD$ un patrulater (fig. 51). Presupunem că există un punct O astfel încît o rotație cu 90° în jurul lui să ducă vîrful A în B, B în C, C în D și D în A. Cîte grade are fiecare dintre

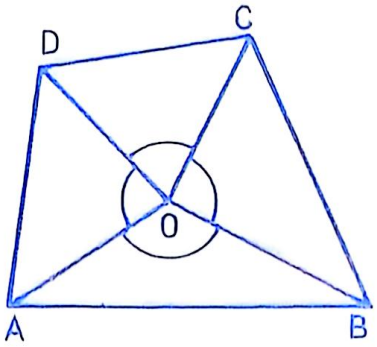


Fig. 51

unghiurile din jurul punctului O? Deci punctele A, O, C sînt coliniare, de asemenea B, O, D. AOC și BOD sînt diagonale. În urma rotației, OA devine OB, OB devine OC ș.a.m.d., deci $OA \equiv OB \equiv OC \equiv OD$, deci diagonalele sînt congruente și se împart în părți congruente, deci figura este un dreptunghi. În urma rotației AB devine BC, deci $AB \equiv BC$, deci figura este un pătrat. Răspuns: nu.

5.5.4. O axă de simetrie a unui patrulater este mediatoarea a două laturi opuse sau o diagonală. Un patrulater are două perechi de laturi opuse și două diagonale; $2 + 2 = 4$. Acesta este numărul căutat. Pătratul are patru axe de simetrie și nu există patrulater care să aibă mai multe axe de simetrie.

5.5.5. a) Cîte grade au unghiurile 1, 2 și 3? suma lor? b) $AN \perp PQ$ și $RB \perp PQ$, deci... c) Unghiul 3 are mereu 45°.

5.5.6. a) Fie AB o diagonală (fig. 53) și Bx prelungirea ei. Se află unghiurile 1 și 2, suma lor, apoi unghiul 3. Acest

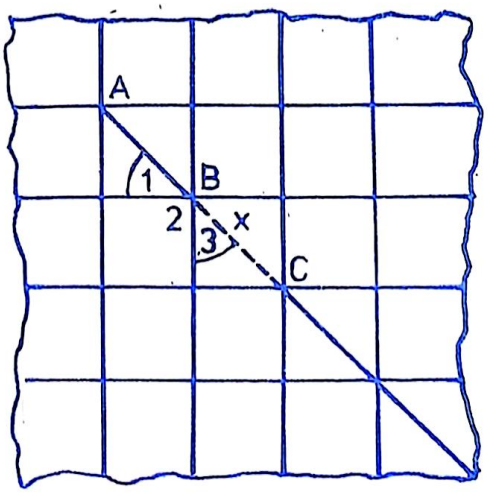


Fig. 53

unghi avînd 45°, Bx este diagonală în pătrățelul al doilea ș.a.m.d. b) Demonstrația rămîne valabilă.

5.5.7. a) Unim punctul A cu C. Triunghiul CAB este dreptunghic și isoscel, deci $\widehat{CAB} = 45°$. La fel se arată că $\widehat{FAB} = 45°$. Rezultă că semidreptele AC și AF coincid, deci $F \in AC$. Se arată la fel că $M \in AC$. b) Fie $AF \cap BL = O$. Triunghiul OAB are două unghiuri de cîte 45°, deci... c) $GE \perp AC$ și $PN \perp AC$, deci...

5.5.8. a) Cîte grade au unghiurile CMB, CNB, 1, 2, MCN? Apoi se compară MC cu MB. $MBNC$ este un pătrat. b) Diagonalele pătratului fiind perpendiculare, $MN \perp BC$; totodată $AE \perp BC$, deci $MN \parallel AE$.

5.6.4. Se duce CE paralel cu DA, $E \in AB$.

5.6.5. Cu notațiile din figura 57, pentru ca două trapeze $ABCD$ și $A'B'C'D'$ să fie congruente, este suficient să fie îndeplinite condițiile următoare. a) $AB \equiv A'B'$, $BC \equiv B'C'$, $CD \equiv C'D'$, $DA \equiv D'A'$. b) Aceleași condiții numai ultima condiție se înlocuiește cu $AC \equiv A'C'$ sau $BD \equiv B'D'$. c) $AB \equiv A'B'$, $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\hat{B} \equiv \hat{B}'$, $AD \equiv A'D'$. d) Aceleași condiții, ultima fiind înlocuită cu $BC \equiv B'C'$.

5.6.6 (fig. 56). Ce relație există între unghiurile A și 1? între unghiurile 1 și 2? Unghiurile A și 2 sînt suplementare. De asemenea unghiurile B și 3.

5.6.7 (fig. 57). Considerăm cazul cînd $AD < BC$. Se duce CE paralel cu DA, se compară CE cu DA și unghiul E cu unghiul A, apoi se folosesc relațiile între laturile cu unghiurile triunghiului CEB, $\hat{A} > \hat{B}$; latura mai mică formează cu baza mare un unghi mai mare. Unghiurile D și C sînt suplementele unghiurilor A și B. Din $\hat{A} > \hat{B}$ rezultă că $\hat{D} < \hat{C}$; latura mai mică face cu baza mică un unghi mai mic (v. probl. 5.6.6).

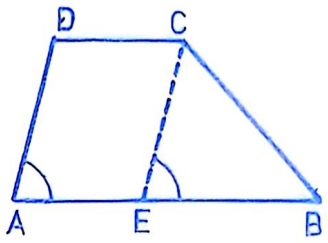


Fig. 57

5.6.8. Fie $ABCD$ trapezul. Se duce DE paralel cu CB, $E \in AB$. În triunghiul DAE, latura AE este mai mare decît...

5.6.9. Fie $ABCD$ (fig. 58) trapezul care trebuie construit. Pare natural să se procedeze astfel (fig. 59): Se trasează un segment AB congruent cu a, apoi se trasează un arc de cerc u cu centrul în A și cu raza d; vîrful D trebuie să fie pe acest arc de cerc. Tot așa, se trasează un arc de cerc v cu centrul în B și cu raza c; vîrful C trebuie să fie pe acest arc de cerc.

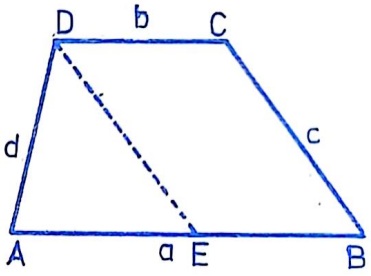


Fig. 58

Acum urmează să determinăm punctele C și D pe v și u astfel încît segmentul CD să fie congruent cu b și dreapta CD să fie paralelă cu AB — nu se vede cum s-ar putea găsi aceste puncte. Căutăm o altă cale.

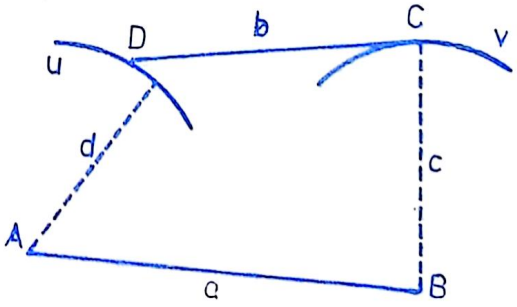


Fig. 59

Ducem DE paralel cu CB (fig. 58). În triunghiul DAE se cunosc toate laturile: $AD = d$, $DE = c$ şi $AE = a - b$. *Construcţie:* Se construieşte triunghiul DAE (LLL), latura AE se prelungeşte cu un segment EB congruent cu b, prin punctul D se duce paralela la AB şi se poartă pe ea un segment DC congruent cu b, punctele C şi B fiind de aceeaşi parte a dreptei AD, şi se unesc punctele B şi C.

Triunghiul DAE odată construit, punctele B şi E există oricare ar fi segmentul b, deci condiţia ca trapezul să existe este ca triunghiul DAE să existe. Pentru aceasta trebuie ca cel mai mare dintre segmentele $a - b$, c şi d să fie mai mic decît suma celorlalte. Dacă această condiţie este îndeplinită, problema are o singură soluţie, trapezul este determinat.

În primul exemplu, $a - b = 5$; cel mai mare dintre numerele 5, 3 şi 6 este 6; $6 < 5 + 3$. Trapezul se poate construi. În exemplul al doilea construcţia este imposibilă.

5.6.10. Cînd deformăm trapezul, lungimile laturilor sale nu se schimbă. Dacă, deformînd trapezul articulat, s-ar putea obţine un alt trapez cu aceleaşi baze, ar însemna că există două trapeze diferite unde bazele unuia sînt congruente cu bazele celuilalt şi laturile neparalele ale unuia sînt congruente cu laturile neparalele ale celuilalt. Or, un trapez este determinat prin lungimile laturilor sale cînd se precizează care dintre laturile date sînt bazele (v. probl. 5.6.9). Deci nu există două astfel de trapeze. Răspuns: nu.

5.7.1. 50°; 130°; 130°.

5.7.2. Ce fel de patrulater este $FBCE$? $EF \equiv BC \equiv AD$. Trapez isoscel.

5.7.3. *Soluţia I* (fig. 60). Presupunem că $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Se duce DE paralel cu CB şi se compară unghiurile A, E şi B; ce fel de triunghi este DAE? Deci $AD \equiv DE$. Ce fel de patrulater este $EBCD$? Deci $DE \equiv BC$. Din aceste

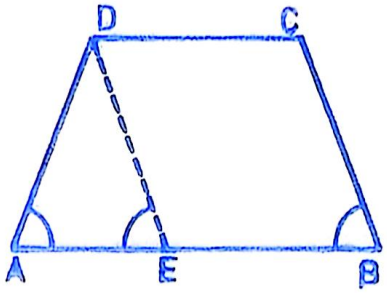


Fig. 60

relaţii rezultă că... Dacă $\hat{C} \equiv \hat{D}$, suplementele lor $\hat{A}$ şi $\hat{B}$ sînt congruente, deci...

Soluţia II. Simetrie faţă de mediatoarea bazei AB.

5.7.4. Se trasează baza mare AB şi de aceeaşi parte a ei se duc două semidrepte Ax şi By astfel ca unghiurile xAB şi yBA să fie congruente; fie $Ax \cap By = M$. Printr-un punct oarecare D al segmentului AM se duce o semidreaptă Dz situată de aceeaşi parte a dreptei Ax cu AB, astfel ca unghiul MDz să fie congruent cu unghiul A (v. probl. 5.7.3).

5.7.5. a) Se compară unghiurile B şi C de la baza trapezului $BCNM$ (fig. 61). Ele sînt şi unghiurile de la baza triunghiului ABC. $AB \equiv AC$. b) Fie ABC un triunghi isoscel, $MN \parallel BC$. Se compară unghiul B cu M, unghiul C cu N, apoi M cu N. Ce fel de triunghi este AMN? Dacă din segmentele congruente AB şi AC se scad segmentele congruente AM şi AN, rămîn segmente congruente, $BM \equiv CN$. Trapezul $BCNM$ este isoscel. (Soluţia este imediată dacă se ţine seamă de problema 5.7.3.)

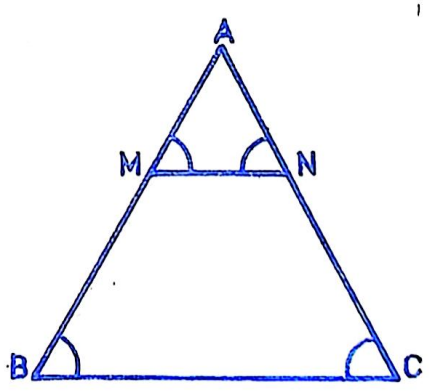


Fig. 61

5.7.6. Fie $ABCD$ un trapez isoscel în care unghiurile A și B au cîte $60°$. Prelungim laturile neparalele pînă la intersecția lor E. Ce fel de triunghi este EAB? $EA \equiv AB$. Dar $DA < EA$, deci $DA < AB$.

5.7.7. a) Ce fel de triunghiuri sînt OAB și OCD (fig. 62)? Se compară unghiurile lor de la vîrf, apoi unghiurile 1 și 2. $\hat{1} \equiv \hat{2}$, deci $DC \parallel AB$. Apoi $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$ (LUL), deci $AD \equiv BC$. Trapez isoscel. b) În acest caz, diagonalele se împart în părți congruente și sînt congruente. Dreptunghi.

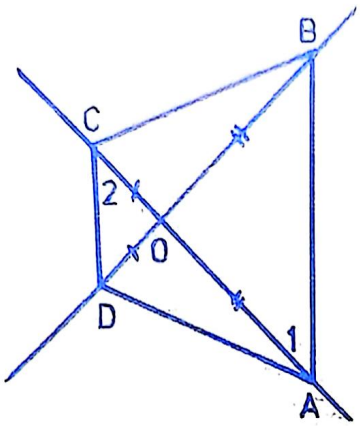


Fig. 62

5.7.8. a) Fie $ABCD$ (fig. 63) un trapez în care $\hat{1} \equiv \hat{2}$ și $\hat{3} \equiv \hat{4}$. Se compară unghiurile 1, 2 și 5; $\hat{2} \equiv \hat{5}$, deci triunghiul DAC este isoscel, $AD \equiv DC$. La fel se arată că $BC \equiv DC$, deci $AD \equiv BC$. Trapezul este isoscel. Dacă diagonalele sînt bisectoarele unghiurilor D și C, demonstrația se face la fel (laturile neparalele sînt congruente cu baza mare). b) Nu. Contraexemplu: trapezul din figura 61 este isoscel, dar diagonala BN nu este bisectoare.

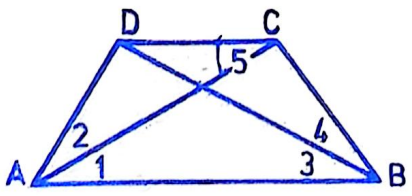


Fig. 63

5.7.9. *Soluția I* (fig. 64). Se compară unghiurile 1 și 2. Ce fel de triunghi este EAB? Dacă din segmentele congruente AD și BC se scad segmentele congruente AE și BE, rămîn segmente congruente, $ED \equiv EC$. Unghiurile de la vîrf ale triunghiurilor isoscele fiind congruente, celelalte unghiuri sînt de asemenea congruente, deci $\hat{1} \equiv \hat{3}$, deci $CD \parallel AB$. Apoi, $AC \equiv BD$. Trapez isoscel.

Soluția II. Simetrie față de mediatoarea laturii AB.

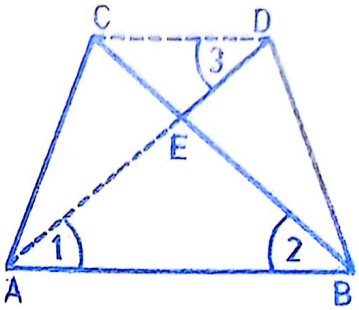


Fig. 64

5.8.1. a) Se compară triunghiurile (fig. 65) AOA', $A'OC$, COC' și $C'OA$. Cîte grade are unghiul $A'AO$? unghiul OAC'? suma lor? $AA'CC'$ este un pătrat. De asemenea $BB'DD'$. b) Se compară unghiul OAA' cu $OD'B$; $AA' \parallel D'B$. Laturile patrulaterelor sînt paralele două cîte două. c) Fie $AB \cap A'B' = E$. Se compară unghiurile triunghiurilor OAB și $A'BE$. Unghiurile lor din A și A' sînt congruente datorită rotației și cele din B ca opuse la vîrf, deci $\hat{E} \equiv \widehat{AOB}$. Dar $\widehat{AOB} = 90°$, deci...

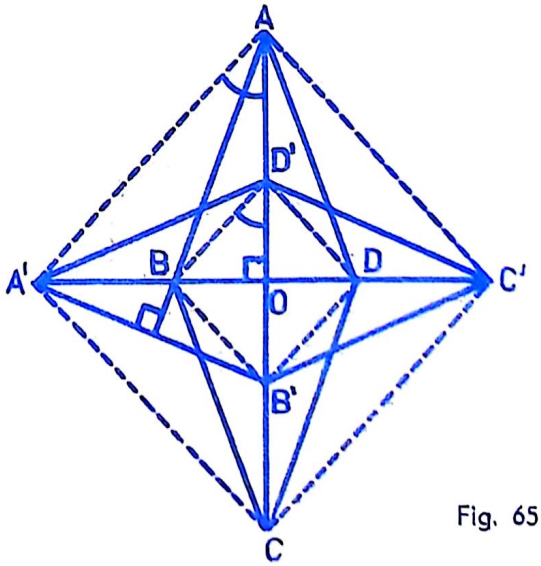


Fig. 65

5.8.2. a) Ce proprietate au diagonalele patrulaterului? Paralelogram. b) Se adaugă faptul că diagonalele sînt congruente; dreptunghi. c) Se adaugă faptul că diagonalele sînt perpendiculare; pătrat.

5.8.3. a) Se compară laturile opuse; paralelogram. b) Se adaugă faptul că un unghi este drept; dreptunghi. c) Se adaugă la a) faptul că două laturi vecine sînt congruente; romb. d) Se adaugă la c) faptul că rombul are un unghi drept; pătrat.

5.8.4. În toate cazurile dreapta AC este o axă de simetrie a figurii. a) Triunghi isoscel. b) De asemenea. c) Se compară laturile patrulaterului; romb. d) Se adaugă faptul că rombul are un unghi drept; pătrat. e) Dreapta AC este o diagonală a patrulaterului. Într-un dreptunghi care nu este pătrat, diagonala nu este axă de simetrie. Răspuns: în nici un caz. f) În nici un caz (aceeași motivare).

5.8.5. a) Diagonalele EF și BD, (fig. 68) se împart în părți congruente și sînt congruente. $EBFD$ este un dreptunghi. b) Același răspuns. c) Din triunghiul OEB se scoate $\hat{E} = \frac{180° - \hat{O}}{2}$, și din triunghiul OAH, $\hat{A} = \frac{180° - \hat{O}}{2}$, deci $\hat{E} \equiv \hat{A}$, deci $AH \parallel EB$. La fel, $AG \parallel ED$. d) Trebuie ca diagonalele EF și BD să fie perpendiculare, deci trebuie ca $ABCD$ să fie romb.

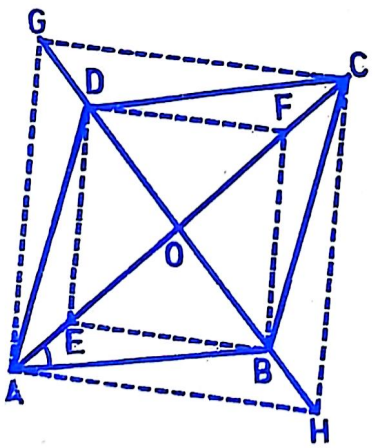


Fig. 68

5.8.6. Este ușor de construit un patrulater în care două, trei sau patru dintre aceste segmente să fie congruente. Ca numărul de segmente congruente să fie cît mai mare, este în primul rînd necesar ca patrulaterul să fie romb. Dar atunci diagonalele nu sînt congruente între ele și, în general, sînt diferite de laturi. Dacă rombul are și un unghi de 60°, una din diagonale este congruentă cu latura, deci cinci din cele șase segmente sînt congruente. Acesta este numărul maxim; este imposibil ca toate cele șase segmente să fie congruente (încercare cu șase bețe de chibrit!).

În adevăr, dacă cinci din aceste segmente sînt congruente, sînt posibile două cazuri: ele să fie cele patru laturi și o diagonală sau trei laturi și ambele diagonale. În primul caz, figura este un romb $ABCD$ (fig. 69) în care $BD \equiv AB$, deci triunghiul ABD este echilateral, deci $\widehat{BAD} = 60°$. Rezultă că $\hat{1} = 30°$, complementul său $\hat{2} = 60°$ deci $\hat{1} \not\equiv \hat{2}$. Rezultă că $OB \not\equiv OA$, jumătățile diagonalelor nu sînt congruente, deci nici diagonalele nu sînt congruente, $AC \not\equiv BD$. Așadar segmentul al șaselea nu este congruent cu primele cinci.

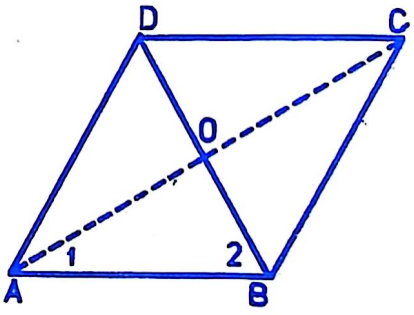


Fig. 69

În cazul al doilea, fie $ABCD$ un patrulater în care trei laturi și ambele diagonale sînt congruente între ele,

$$AB \equiv AC \equiv BD \equiv AD \equiv BC.$$

Atunci triunghiul ABC este echilateral, deci $\widehat{CAB} = 60°$; triunghiul ABD este de asemenea echilateral, deci $\widehat{DAB} = 60°$. Rezultă că $\widehat{CAB} \equiv \widehat{DAB}$, semidreptele AC și AD coincid și, deoarece $AC \equiv AD$, punctul C coincide cu D. Patrulaterul are numai trei vîrfuri — ceea ce este imposibil. Deci, acest caz este imposibil.

În concluzie, din cele 6 segmente cel mult 5 pot fi congruente.

Cap. 6

6.1.1. R fiind raza cercului, $OA < R$ și $OB > R$.

6.1.2. Se schimbă distanța dintre vîrful de oțel și vîrful minei.

6.1.3. Punctul A nu rămîne mereu în același plan.

6.1.4. Un arc de cerc.

6.1.5. Un cerc cu centrul în O.

6.1.6. Fie A, B, C, ... centrele. Se compară segmentele OA, OB, OC, ... cu raza monedei. Centrele se găsesc pe cercul cu centrul în O și cu raza congruentă cu raza monedei.

6.1.7. Se compară OC cu OD. Ce fel de triunghi este OCD? $CD = 5$ cm.

6.1.8. b) Se compară laturile lui. Romb. c) Ce fel de triunghi este AOP? 60°; 120°.

6.1.9. Se compară segmentele OB, OC și OD cu OA. Punctele aparțin cercului.

6.1.10. Se compară laturile patrulaterului. Romb.

6.1.11 (fig. 2). Ce fel de triunghiuri sînt OAD și OBC? Se compară unghiul A cu unghiul B; $AD \parallel BC$. Apoi

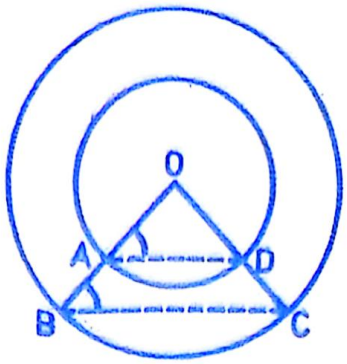


Fig. 2

$AB \equiv DC$ este diferența razelor. Trapez isoscel.

6.1.12. Razele se pot duce de aceeași parte sau de o parte și de alta a liniei centrelor. În ambele cazuri se formează un patrulater în care laturile OA și $O'A'$ sînt paralele și congruente.

6.1.13 (fig. 3). $AP \equiv OM$ (paralelogram), deci lungimea segmentului AP rămîne neschimbată. Punctul P descrie cercul cu centrul în A, congruent cu primul.

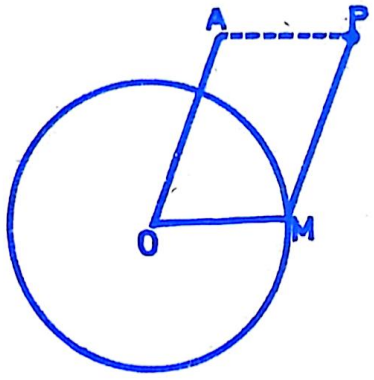


Fig. 3

6.1.14. Segmentul OA își schimbă lungimea? Prin punctul B se duce paralela la OA; fie C intersecția ei cu dreapta OP. Ce fel de patrulater este $CBAO$? Cînd coborîm ciutura, lungimile laturilor sale se schimbă? Dar punctul C? Distanța CB? Punctul B descrie un arc de cerc cu centrul în punctul C.

6.1.15 (fig. 5). Punctul P este mijlocul diagonalei AB a dreptunghiului $OAMB$ (O, centrul cercului), deci mijlocul diagonalei OM. Dar OM este constant, deci și OP rămîne constant. Punctul P descrie un cerc concentric cu primul.

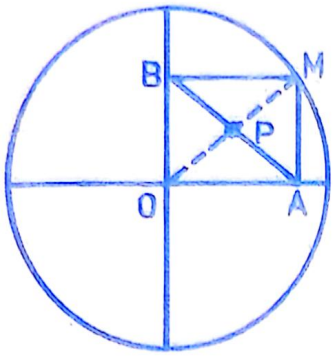


Fig. 5

6.1.16. Se iau trei puncte ale arcului de cerc A, B și C. Mediatoarele segmentelor AB și BC se taie în centrul cercului.

6.1.17. Se construiește cercul care trece prin trei puncte ale curbei.

6.1.18. Centrul cercului este intersecția dreptei d cu mediatoarea segmentului AB. Dacă $d \perp AB$, problema nu are soluție.

6.1.19. a) Centrul cercului este unul din punctele în care cercul cu centrul în A și raza r taie mediatoarea segmentului AB. b) $r \geqslant \frac{AB}{2}$.

6.2.1 (fig. 6). Cîte grade are unghiul A? unghiul B? Tangentele sînt paralele.

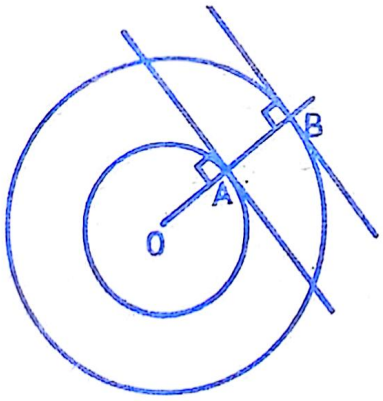


Fig. 6

6.2.2 (fig. 7). Se compară triunghiurile OAM și OAN (LUL). $OM \equiv ON$.

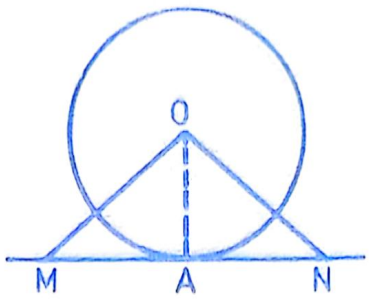


Fig. 7

6.2.3 (fig. 8). În patrulaterul $OABC$, $\hat{A} \equiv \hat{B} \equiv 90°$, deci se cunosc trei unghiuri. $\hat{C} = 50°$. Unghiurile sînt suplementare.

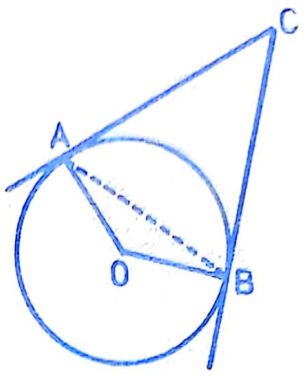


Fig. 8

6.2.4 (fig. 8). Fie C intersecția tangentelor și O centrul cercului. Cîte grade are unghiul C? Din patrulaterul $CAOB$ se află că $\hat{O} = 120°$. Construcție: Se duc două raze OA și OB care să formeze un unghi de 120°.

6.2.5. a) O infinitate. b) Un cerc concentric cu cercul dat și cu raza $R + r$. c) Raza OA (fig. 9) se prelungește cu un segment AP de lungime r. Cercul cu centrul în P și cu raza de lungime r este cel cerut.

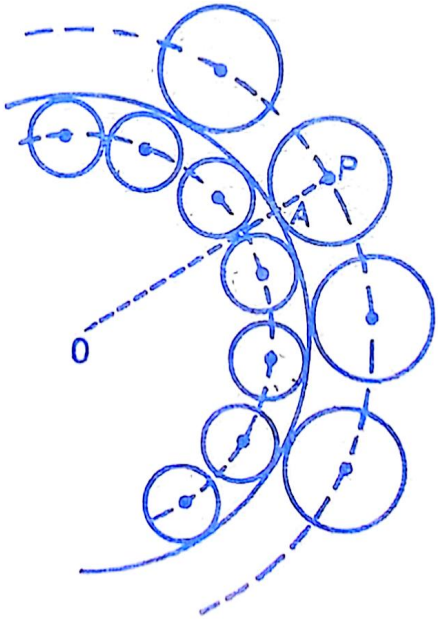


Fig. 9

6.2.6. a) O infinitate. b) Pe una sau alta dintre paralelele la dreapta d situate la distanța r de ea. c) Tangentă. d) Distanța de la punctul O la dreapta d se schimbă? Punctul O descrie o paralelă la d. (v. problema 5.3.19.)

6.2.7. Ca cercul să îndeplinească ultimele două condiții, unde trebuie să fie situat centrul lui? Într-un punct oarecare A (fig. 11) al dreptei d se ridică perpendiculara pe d și se poartă pe ea un segment AM congruent cu r. Prin M se duce paralela la d; fie O intersecția ei cu dreapta e. Cercul cu centrul în O și cu raza r îndeplinește condițiile problemei. Cercul cu centrul în P îndeplinește de asemenea condițiile.

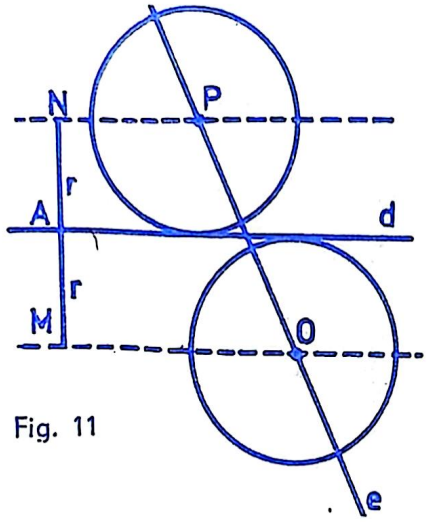


Fig. 11

6.2.8. a) O infinitate. b) Dacă O este centrul unuia dintre cercuri, cîte grade are unghiul format de dreptele OA și d? Centrele formează perpendiculara în A pe d. c) Pe această perpendiculară se poartă de o parte și de alta a punctului A cîte un segment AO și AP congruent cu r. Cercul cu centrul în O sau P și raza r este cel cerut.

6.2.9. a) O infinitate. b) Dreapta f paralelă cu d și e situată la aceeași distanță de ele. c) Fie a distanța dintre dreptele date. Ce relație există între a și raza cercurilor? Se trasează un arc de cerc cu centrul în A și cu raza $\frac{a}{2}$; fie O și P punctele sale de intersecție cu dreapta f. Cercul cu centrul în O sau P și cu raza $\frac{a}{2}$ este cel cerut.

6.2.10. a) O infinitate. b) Fie P (fig. 12) centrul unui cerc tangent la Ox și Oy, iar A și B punctele de contact. Care sînt distanțele de la punctul P la Ox și Oy? Se compară aceste distanțe; punctul P fiind egal depărtat de laturile unghiului este pe bisectoarea lui. Răspuns: bisectoarea. c) Într-un punct oarecare C al laturii Ox se ridică perpendiculara pe Ox și se poartă pe ea un segment CD de lungime r situat, în întregime sau în parte, în interiorul unghiului. Prin D se duce paralela la Ox; intersecția ei cu bisectoarea este centrul cercului cerut.

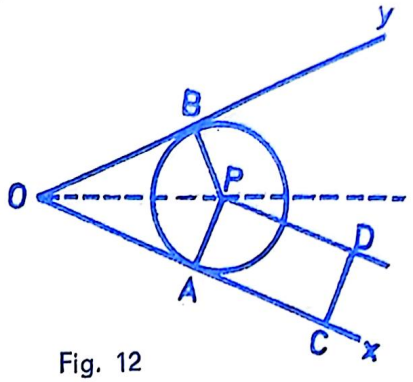


Fig. 12

6.2.11. Linia este formată din patru sferturi de cerc.

6.2.12. Pe ce linie trebuie să fie situat centrul arcului de cerc, ca să fie tangent la prima parte a șoselei? la partea a doua? (v. probl. 6.2.6). Se duce cîte o paralelă la Ax și By situate la 5 cm de ele; intersecția lor este centrul cercului.

6.2.13. $AO \perp d$, $AO = 5$ cm, $\widehat{AOB} = 45°$, $BP \equiv AO$, $\widehat{BPC} = 45°$, $e \perp PC$ ($e \parallel d$).

6.2.14 (fig. 16). Se calculează unghiurile BOC și C.

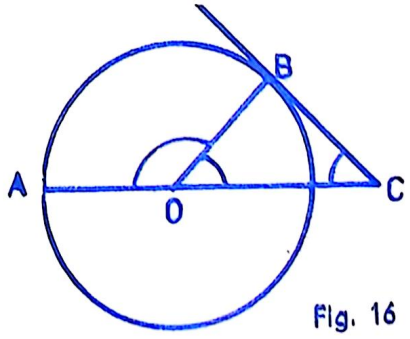


Fig. 16

6.2.15 (fig. 17). Ce fel de triunghi este AOC (O fiind centrul cercului)? Cîte grade are unghiul 1? Din triunghiul OCD se află că $\hat{D} = 30°$, deci $\hat{D} \equiv \hat{A}$, triunghiul ACD este isoscel, $CA \equiv CD$.

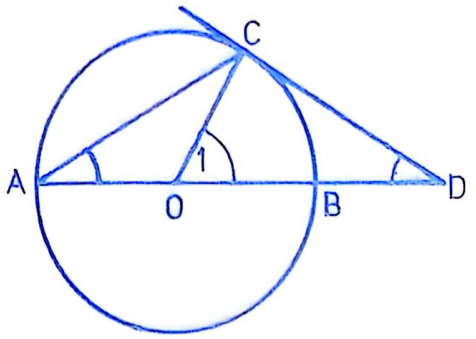


Fig. 17

6.2.16 (fig. 18). Ce fel de triunghi este OAB? Se compară unghiul 1 cu 2. Ce poziție are dreapta BC față de OA? Se compară unghiul 1 cu 3.

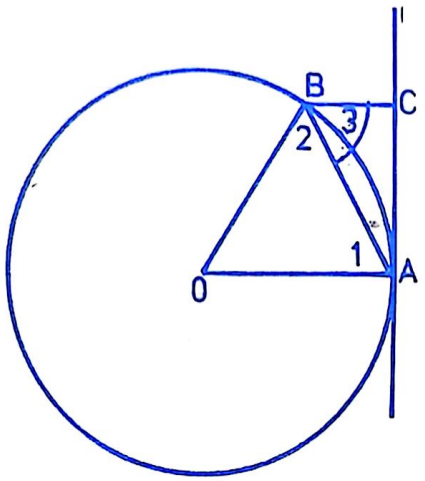


Fig. 18

6.2.17 (fig. 19). Dreapta trebuie să fie tangentă la cerc, căci $OT > OM > ON$.

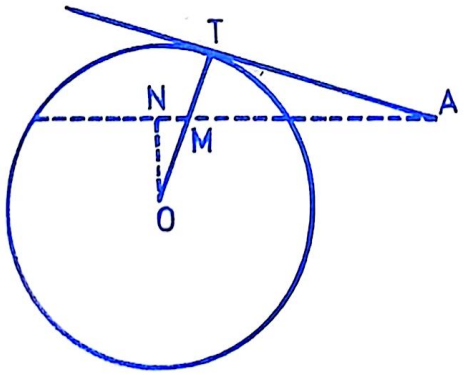


Fig. 19

6.3.1. *Soluția I* (fig. 20). Fie O și P centrele celor două cercuri; $OA \equiv OB$, deci punctul O aparține mediatoarei segmentului AB. La fel, punctul P aparține mediatoarei segmentului AB. Deci...

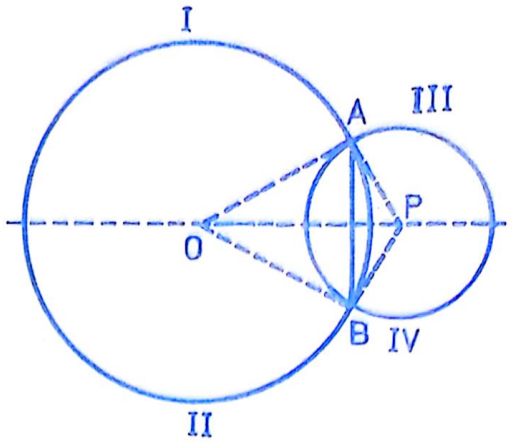


Fig. 20

Soluția II. Dreapta OP este o axă de simetrie a ambelor cercuri; semicercul I este simetric cu II și semicercul III este simetric cu IV. Dar $I \cap III = A$ și $II \cap IV = B$, deci punctele A și B sînt simetrice față de OP, deci...

6.3.2 (fig. 21). Fie O centrul cercului. Ce fel de triunghi este OAB? OD fiind înălțime este și mediană, deci mediatoarea segmentului AB. Rezultă că $CA \equiv CB$ și $DA \equiv DB$.

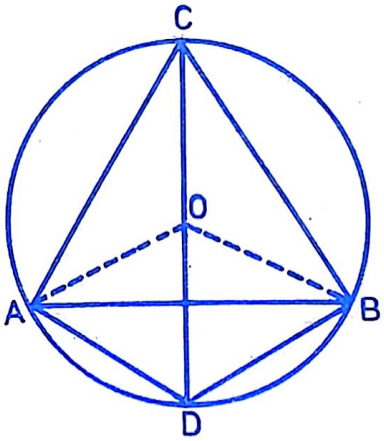


Fig. 21

6.3.3. a) $DE = DA + AE$. A cîta parte din BA este DA? A cîta parte din AC este AE? $DE = 67$ mm. b) Ce relație există în acest caz între lungimile segmentelor OP și DE? $BC = 2OP$.

6.3.4. *Soluția I* (fig. 23). Unim centrul O cu punctele M și N. Cîte grade are suma arcelor AMB și ANB? Suma arcelor AM și AN? Această sumă fiind de 180°, unghiurile 1 și 2 sînt suplementare, deci ON este prelungirea lui OM.

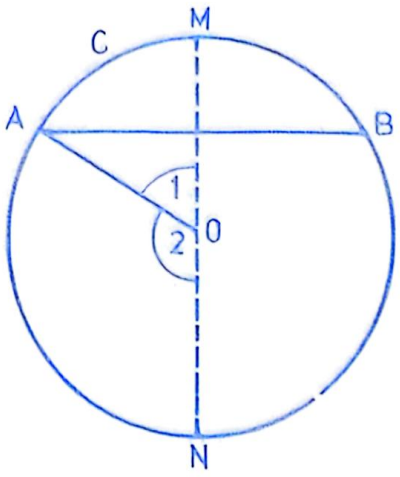


Fig. 23

Soluția II. Deoarece M este mijlocul arcului ACB, $OM \perp AB$; tot așa, $ON \perp AB$. Din punctul O se poate duce numai o singură perpendiculară pe AB, deci dreapta OM coincide cu ON.

6.3.5. Perpendiculara în A pe diametrul care trece prin A.

6.3.6. Imposibil, căci, O fiind centrul cercului, dreapta OC trebuie să fie perpendiculară pe acea coardă.

6.3.7. a) Trebuie comparat segmentul AB cu CD (fig. 24). Se duce OP perpendicular pe AD și se compară PA cu PD și PB cu PC; $AB \equiv CD$. Dacă AD trece prin centru, AB este diferența razelor. b) Se duce diametrul care trece prin M. Cîte grade are unghiul M? $ME \equiv MF$.

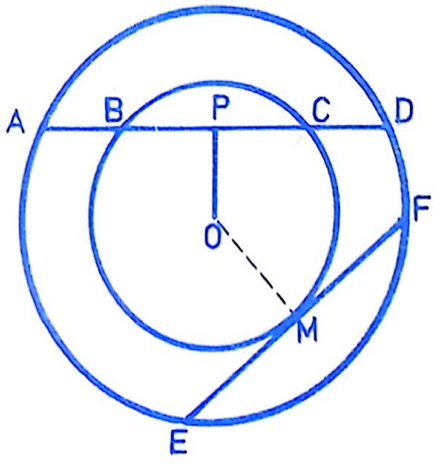


Fig. 24

6.3.8. a) Fie O centrul cercului (fig. 25). Cîte grade are unghiul format de raza OC cu tangenta? unghiul format de raza OC cu coarda AB? $CD \parallel AB$. b) $OC \perp CD$ și $CD \parallel AB$, deci $OC \perp AB$. Rezultă că punctul C este mijlocul arcului AB.

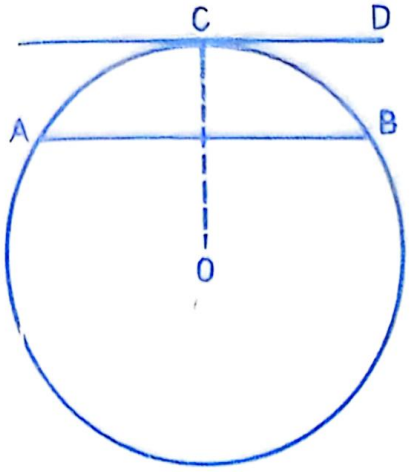


Fig. 25

6.3.9. a) Se duce o coardă congruentă cu baza dată și mediatoarea ei. b) Se construiește un cerc cu centrul într-un punct al cercului dat și cu raza congruentă cu latura dată.

6.3.10 (fig. 26). Se compară arcele AC și BD, apoi coardele AC și BD. Trapez isoscel.

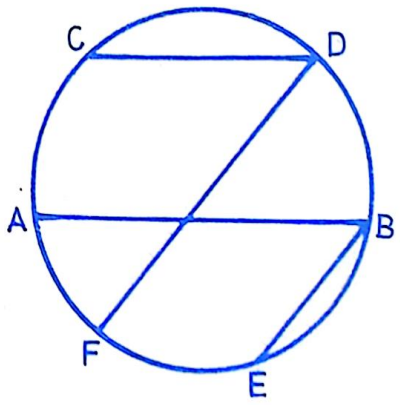
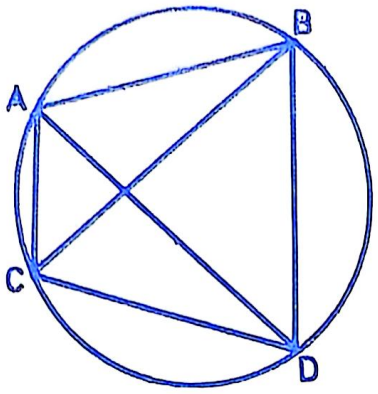


Fig. 26

6.3.11. Amîndouă arcele se compară cu arcul BD. $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{FE}$.

6.3.12 (fig. 27). Fie AB și CD cele două coarde congruente, ele nu se taie. Atunci $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$, deci aceste arce sînt cuprinse între drepte paralele, $AC \parallel BD$. Adăugînd la arcele congruente AB și CD arcul AC, rezultă că $\overset{\frown}{CAB} \equiv \overset{\frown}{ACD}$, deci coardele subîntinse sînt congruente, $CB \equiv AD$. Fie AD și BC cele două coarde congruente. Din $AD \equiv BC$ rezultă că $\overset{\frown}{ACD} \equiv \overset{\frown}{CAB}$. Scăzînd arcul AC, rezultă că $\overset{\frown}{AB} \equiv CD$, deci, $AB \equiv CD$ și $AC \parallel BD$.



27

6.3.13. $\overset{\frown}{AC} \equiv \overset{\frown}{BD}$, deci $\overset{\frown}{AOC} \equiv \overset{\frown}{BOD}$. a) $\overset{\frown}{AOC} = 80°$; $130 + 80 + 80 = 290$; $360 - 290 = 70$; $\overset{\frown}{COD} = 70°$. b) $120 + 50 = 170$; $360 - 170 = 190$; $190 : 2 = 85$. $\overset{\frown}{AOC} = \overset{\frown}{BOD} = 85°$.

6.3.14. *Soluția I.* Punem $\overset{\frown}{AOB} = u$ (fig. 29). a) Fie A' și B' respectiv punctele diametral opuse cu A și B. Se compară arcele MB', $B'A'$ și $A'N$ cu arcul AB (arce cuprinse între coarde paralele). $\overset{\frown}{MON} = 3u$. b). Ele sînt coliniare. c) Dacă $u < 120°$ (dar $> 60°$), relația $\overset{\frown}{MON} = 3u$ rămîne adevărată dacă prin MON se înțelege unghiul neconvex determinat de semidreptele OM și ON. Dacă $u = 120°$ punctele M și N coincid. Dacă $u > 120°$ (dar $< 180°$), $\overset{\frown}{MON} = 3a - 360°$.

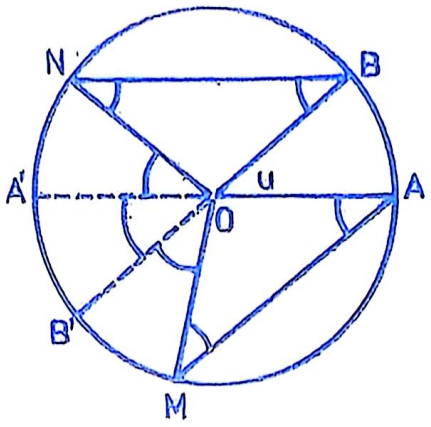


Fig. 29

Soluția II. Fie $\overset{\frown}{AOB} = u$. Atunci $u = \hat{A}$ (alt. int.), $\hat{A} = \hat{M}$, căci triunghiul AOM este isoscel, deci $\hat{M} = u$. Triunghiul OAM dă $\overset{\frown}{MOA} = 180° - 2u$. La fel $\overset{\frown}{NOB} = 180° - 2u$. $\overset{\frown}{MOA} + \overset{\frown}{AOB} + \overset{\frown}{BON} = (180° - 2u) + u + (180° - 2u) = 360° - 3u$. Rezultă că $\overset{\frown}{MON} = 3u$.

6.3.15 (fig. 30). a) $\overset{\frown}{AA'} \equiv \overset{\frown}{BB'} \equiv \overset{\frown}{CC'} \equiv \overset{\frown}{DD'}$ (arce cuprinse între coarde paralele). Din faptul că $\overset{\frown}{AA'} \equiv \overset{\frown}{DD'}$ rezultă că... c) Dacă două poligoane cu același număr par de laturi sînt înscrise în același cerc și toate laturile ale unuia dintre poligoane afară de una sînt paralele cu cîte o latură a celuilalt, atunci și ultimele laturi sînt paralele. d) În cazul a două pentagoane, $ABCDE$ și $A'B'C'D'E'$, în care $A'B' \parallel AB$, $B'C' \parallel BC$, $C'D' \parallel CD$, $D'E' \parallel DE$, EA nu este paralel

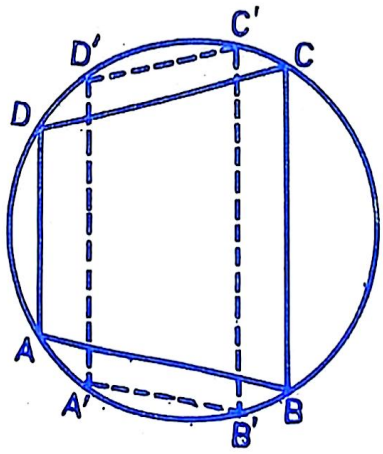


Fig. 30

cu $E'A'$, dar $EA' \parallel E'A$. În cazul unui poligon cu un număr impar de laturi, dreptele care unesc primul vîrf al unuia dintre poligoane cu ultimul vîrf al celuilalt sînt paralele.

6.3.16. a) Se compară segmentele care unesc mijloacele coardelor cu centrul cercului. Aceste mijloace formează un cerc concentric cu primul. b) Un cerc concentric cu primul.

6.3.17 (fig. 32). Fie AMB și CND două tangente. Se compară distanțele lor de la centru, OM și ON. Coardele fiind egal depărtate de centru sînt congruente, $AB \equiv CD$. Toate tangentele sînt congruente, nu există minim.

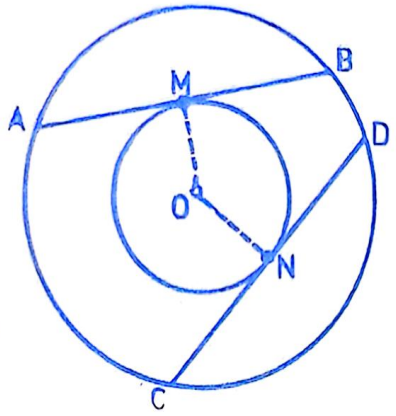


Fig. 32

6.3.18 (fig. 33). Fie M și N picioarele perpendicularelor coborîte din centrul cercului pe AB și AC. Coardele fiind congruente, sînt egal depărtate de centru, deci $OM \equiv ON$. Aceasta înseamnă că punctul O este egal depărtat de laturile unghiului BAC, deci AO este bisectoarea unghiului A. Triunghiul BAC fiind isoscel, bisectoarea este și înălțime, deci $AO \perp BC$, adică $BC \perp AO$. La fel se arată că $DE \perp AO$. Din aceste două relații rezultă că...

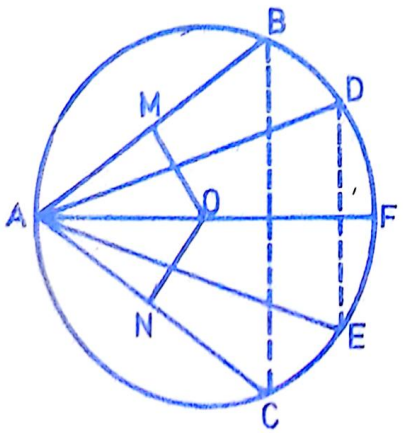


Fig. 33

6.3.19 (fig. 34). Diametrul AB este bisectoarea unghiurilor A și B (v. probl. 6.3.18). $\hat{1} = \hat{2}$ și $\hat{3} = \hat{4}$. $\triangle GAB = \triangle HAB$ (ULU), deci $AG = AH$, triunghiul GAH este isoscel. AB fiind bisectoare, este și înălțime, deci...

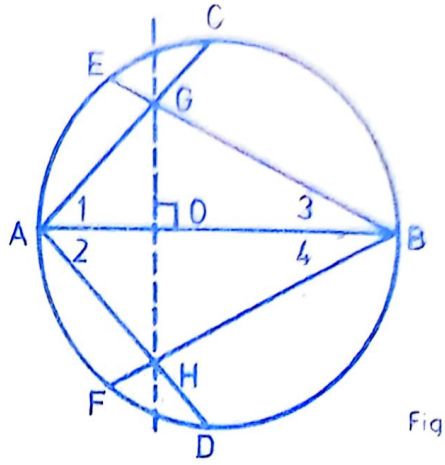


Fig. 34

6.4.1. a) 95°; 100°; 85°; 80°. b) 25°; 70°; 30°; 55°.

6.4.2. În figura 35, unghiurile notate cu aceeași cifră sînt congruente.

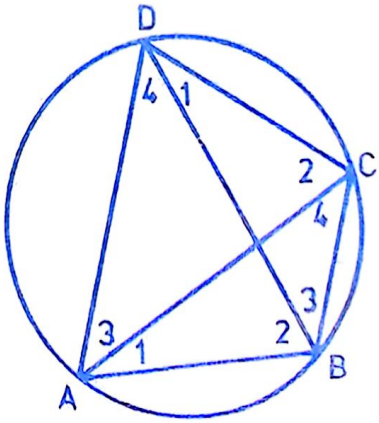


Fig. 35

6.4.3. a) $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB} \equiv \widehat{AEB}$; $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BEC} \equiv \widehat{BAC}$; ș.a.m.d. b) În cazul unui hexagon $ABCDEF$, $\widehat{ACB} \equiv \widehat{ADB} \equiv \widehat{AEB} \equiv \widehat{AFB}$; $\widehat{BDC} \equiv \widehat{BEC} \equiv \widehat{BFC} \equiv \widehat{BAC}$; ș.a.m.d. c) 100 de grupe de cîte 98 de unghiuri.

6.4.4. a) Unghiul rămîne constant, deci nu există maxim. b) Același răspuns. c) Unghiurile variază. Care sînt arcele cuprinse între laturile lor? $\overset{\frown}{MBN} + \overset{\frown}{MAN} = 360°$, deci $\overset{\frown}{MAN} + \overset{\frown}{MBN} = 180°$.

6.4.5. a) Fiindcă $\hat{M} \equiv \hat{N}$, căci aceste unghiuri cuprind același arc. b) Este la fel de ușor.

6.4.6. Se află întîi arcele AB, BC și AC. 75°; 65°; 40°.

6.4.7. a) Cîte grade are arcul BC? $\overset{\frown}{BOC} = \overset{\frown}{BC} = 2 \cdot 58° = 116°$; $\overset{\frown}{COA} = 2 \cdot 63° = 126°$; $\overset{\frown}{AOB} = 360° - (116 + 126) = 118°$. b) $2\hat{A}$, $2\hat{B}$, $2\hat{C}$.

6.4.8. a) Pe semicercul AB care nu conține punctul C. b) Pe semicercul AB care conține punctul C.

6.4.9. a) Cîte grade are arcul AB? arcul AMB? $\overset{\frown}{AMB} = 208° : 2 = 104°$.

b) $\hat{N} = \dfrac{360° - 2\hat{M}}{2} = 180° - \hat{M}$.

6.4.10 (fig. 37). Fie M' poziția punctului M după un minut. Ce relație există între unghiul O, arcul MM' și unghiul A? Cu 30° : 2 = 15° pe minut.

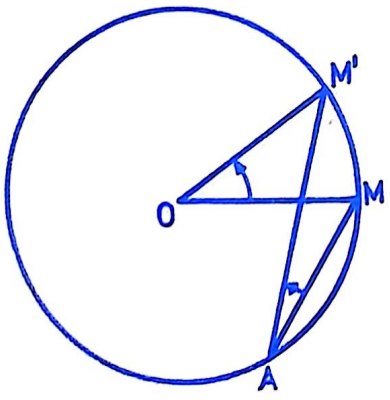


Fig. 37

6.4.11 (fig. 38). Care sînt arcele cuprinse între laturile acestor unghiuri? Ce relație există între aceste arce? $\overset{\frown}{BDC} = \hat{B} + \hat{C}$.

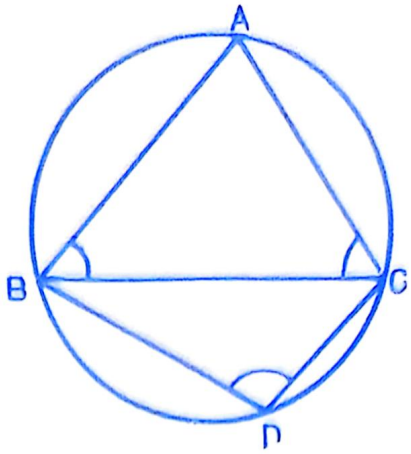


Fig. 38

6.4.12. a) Fie AD bisectoarea unghiului A ($D \in k$). Se compară arcele AB și AC, BD și DC; arc $ABD \equiv$ arc ACD, deci... b) Punctul D fiind mijlocul arcului BC, $AD \perp BC$. (v. probl. 6.3.18).

6.4.13 (fig. 39). Deoarece $\hat{1} \equiv \hat{2}$, $\overset{\frown}{AM} \equiv \overset{\frown}{MB}$, punctul M este mijlocul arcului ADB, deci $OM \perp AB$. La fel, $ON \perp AB$. Din punctul O se poate duce numai o singură perpendiculară pe AB, deci dreptele OM și ON sînt una și aceeași dreaptă.

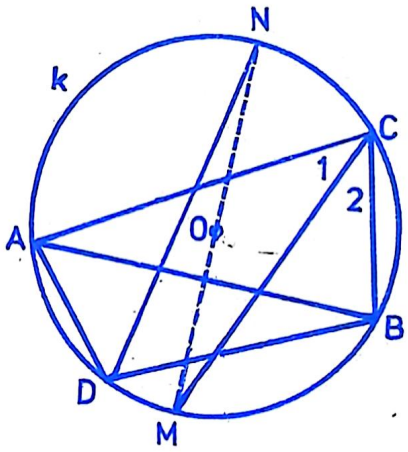


Fig. 39

6.4.14. a) Cîte grade are arcul cuprins între laturile unghiului? $\overset{\frown}{AMD} = 45°$ sau 135°. b) $\dfrac{180° - n°}{2}$ sau $\dfrac{180° + n°}{2}$.

6.4.15. Fie C punctul (deosebit de M) în care bisectoarea unghiului AMB taie cercul. Se compară arcul AC cu CB. Bisectoarea trece prin mijlocul arcului AB; de asemenea și bisectoarele celorlalte unghiuri.

6.4.16 (fig. 40). Unghiul D este un unghi înscris care cuprinde între laturi arcul EAF, deci trebuie aflat acest arc. Ce relație există între arcele AE și AC? între arcul AC și unghiul B? între arcul AE și unghiul B? $\widehat{AE} = \hat{B}$. În mod analog se găsește că $\widehat{AF} = \hat{C}$. Rezultă că $\widehat{EF} = \hat{B} + \hat{C}$, deci $\hat{D} = \dfrac{\hat{B} + \hat{C}}{2}$. În mod analog se află că $\hat{E} = \dfrac{\hat{C} + \hat{A}}{2}$, $\hat{F} = \dfrac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$.

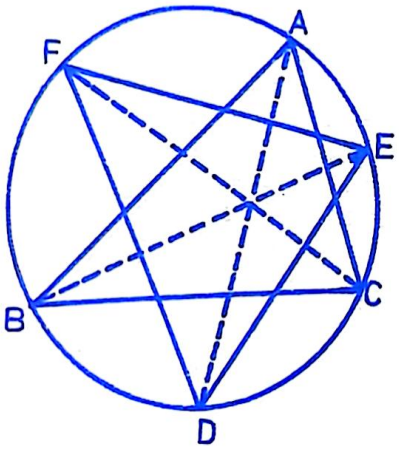


Fig. 40

6.4.17. Se compară arcele AC și CB. Dacă P aparține arcului MA sau MB, $\widehat{APC} \equiv \widehat{CPB}$, căci $\widehat{AC} \equiv \widehat{CB}$. Luăm punctul P în interiorul unghiului AMB (fig. 41). Care sînt arcele cuprinse între laturile unghiurilor APC și BPC? Suma lor este $\widehat{BMC} + \widehat{AC}$. Dar AC se poate înlocui cu CB, deci suma este $\widehat{BMC} + \widehat{CB} = 360°$. Deci suma unghiurilor este de 180°.

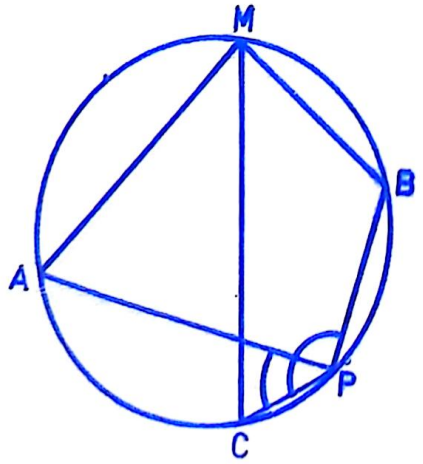


Fig. 41

6.4.18 (fig. 42). Ce relație există între arcul AB și unghiul AOB? între unghiurile AOB și C? între unghiul C și arcul AD? între arcele AB și AD? $\widehat{AD} = 2\,\widehat{AB}$, deci $\widehat{AB} \equiv \widehat{AD}$, deci...

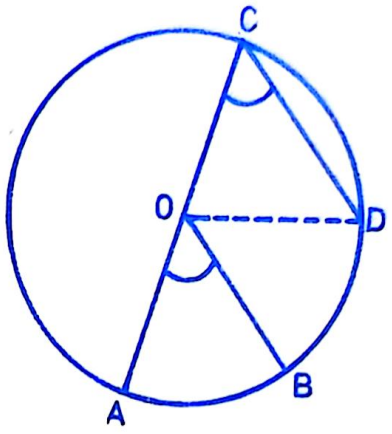


Fig. 42

6.4.19. A cîta parte din arcul AM (fig. 43) este arcul DM? A cîta parte din arcul BM este arcul CM? A cîta parte din arcul AMB este arcul DMC? Cînd punctul M se mișcă, arcul DMC își schimbă mărimea? Deci nici coarda DC...

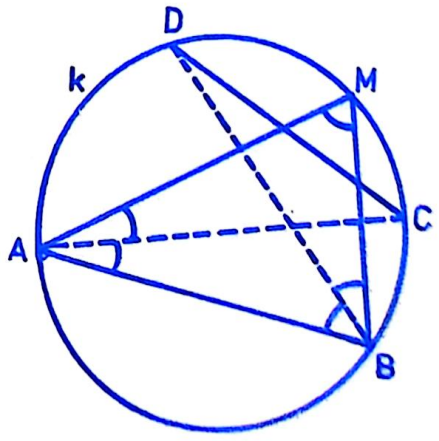


Fig. 43

6.4.20. a) Se consideră triunghiul MAB (fig. 44). Ce relație există între

unghiurile BMC, A și B? Între unghiurile A, B și arcele MB, MA? $\widehat{BMC} = \dfrac{\widehat{AM} + \widehat{MB}}{2} = \dfrac{\widehat{AMB}}{2}$. b) Unghiul AMB variază? Deci și suplementul său, BMC, rămîne constant.

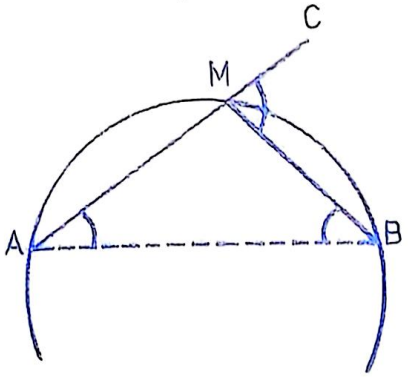


Fig. 44

6.4.21. a) Se unesc vîrfurile luate din două în două. Unghiul a este un unghi exterior al triunghiului ABH, deci

$$a = \hat{1} + \hat{2} = \frac{\widehat{HA}}{2} + \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{\widehat{HB}}{2}.$$

La fel se obține

$$c = \frac{\widehat{BD}}{2},\ e = \frac{\widehat{DF}}{2},\ g = \frac{\widehat{FH}}{2}.$$

Adunînd aceste relații, se obține

$$(*) \qquad s_1 = a + c + e + g = \frac{\widehat{HB} + \widehat{BD} + \widehat{DF} + \widehat{FH}}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ,$$

căci arcele de la numărător formează cercul întreg. Pe aceeași cale se obține $s_2 = b + d + f + h = 180^\circ$, deci $s_1 = s_2$.

b) $\hat{A} = 180^\circ - a$, $C = 180^\circ - c$, $E = 180^\circ - e$, $G = 180^\circ - g$.

Adunînd aceste relații, se obține

$$S_1 = A + C + E + G = 4 \cdot 180 - (a + c + e + g) = 4 \cdot 180^\circ - s_1 = 3 \cdot 180^\circ.$$

La fel se obține $S_2 = 4 \cdot 180^\circ - s_2 = 3 \cdot 180^\circ$, deci $S_1 = S_2$.

c) Oricare ar fi numărul par n, arcele HB, BD ș.a.m.d. care apar în rîndul (*) formează cercul întreg, deci $s_1 = s_2$. Rezultă că și $S_1 = S_2$. d) Cînd n este impar, problema nu are nici un sens.

Observare. Ordinea punctelor a) și b) din problemă se poate inversa. Unghiul A cuprinde între laturi cercul întreg din care s-a scos arcul HB, deci

$$\hat{A} = \frac{360^\circ - \widehat{HB}}{2}$$

La fel:

$$\hat{C} = \frac{360^\circ - \widehat{BD}}{2},\ \hat{E} = \frac{360^\circ - \widehat{DF}}{2},$$

$$\hat{G} = \frac{360^\circ - \widehat{FH}}{2}.$$

Aceste relații se adună, suma $\widehat{HB} + \ldots + \widehat{FH}$ se înlocuiește cu 360° și se obține $S_1 = 3 \cdot 180^\circ$, adică jumătate din suma unghiurilor unui octogon. Rezultă că $S_2 = S_1$. Ținînd seama că $a = 180^\circ - A$, $b = 180^\circ - B$ ș.a.m.d., se deduce că $s_1 = s_2 = 180^\circ$.

6.4.22. a) În figura 46, cîte două arce congruente s-au notat cu aceeași literă mică a, b, c, d. Cîte grade are suma $a + b + c + d$? Fie $MP \cap NQ = O$. Din ce se compune arcul

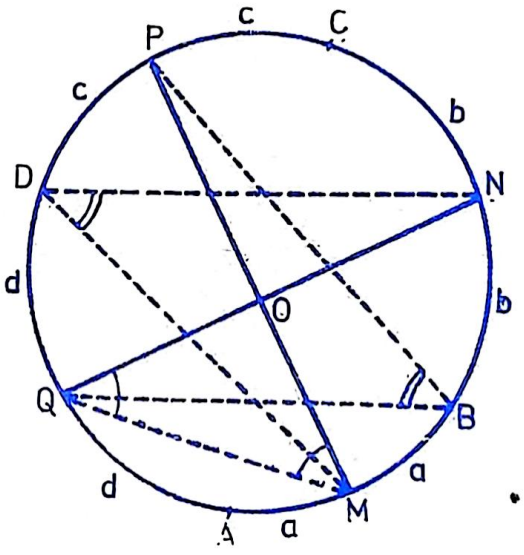


Fig. 46

cuprins între laturile unghiului OMQ? între laturile unghiului OQM? Ce relație există între suma acestor unghiuri și arcele a, b, c, d? Dar suma arcelor este de 180°, deci suma unghiurilor este de 90°. Din triunghiul MOQ rezultă că unghiul $\hat{O} = \ldots$. b) Se ține seama de relațiile dintre aceste unghiuri și arcele a, b, c și d.

6.4.23. a) Se compară arcul $A'B$ cu AC și acesta cu BC'; $\overset{\frown}{A'B} \equiv \overset{\frown}{BC'}$, deci $A'B \equiv BC'$. b) Aceasta rezultă din relația precedentă. Se compară unghiul B cu unghiul C.

6.4.24. a) Ce fel de triunghi este AFC (fig. 48). Ce relație există între unghiurile 1 și C? Se arată la fel că unghiurile 2 și C sînt complementare, deci $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Pe de altă parte se compară unghiurile 1 și 3 (arcul CD). Din $\hat{1} \equiv \hat{2}$ și $\hat{1} \equiv \hat{3}$ rezultă că... b) Ce relație există între $\overset{\frown}{AB}$ și $\hat{C}$? între $\overset{\frown}{CD}$ și $\hat{1}$? Cîte grade are suma $\hat{C} + \hat{1}$? suma $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}$? Dacă unghiul A este obtuz, demonstrația se poate repeta cuvînt cu cuvînt.

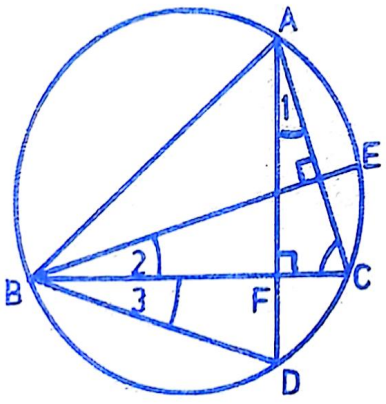


Fig. 48

6.4.25. a) Fie E intersecția coardelor (fig. 49). $\overset{\frown}{BC} = 2\hat{A}$ și $\overset{\frown}{AD} = 2\hat{C}$, deci $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD} = 2(\hat{A} + \hat{C})$. Coardele fiind perpendiculare, unghiul E este drept. Din triunghiul AEC rezultă că $\hat{A} + \hat{C} = 90°$, deci... b) În relația dată, $\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD} = 180°$, se înlocuiește

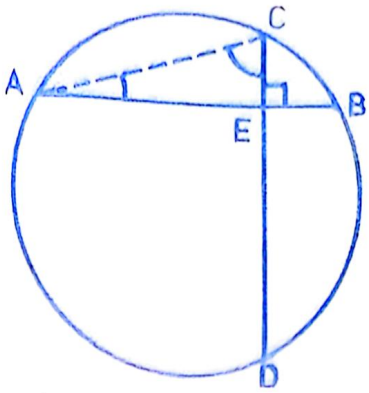


Fig. 49

$\overset{\frown}{BC}$ prin $2\hat{A}$ și $\overset{\frown}{AD}$ prin $2\hat{C}$. Se obține $2\hat{A} + 2\hat{C} = 180°$, deci $\hat{A} + \hat{C} = 90°$. Triunghiul AEC arată că $\hat{E} = 90°$.

6.4.26 (fig. 50). Cînd unghiul se rotește, arcul AB cuprins între laturile sale crește sau scade? Dar coarda AB? Lungimea coardei fiind constantă, distanța ei de la centru rămîne constantă, punctul M se mișcă pe cercul k cu centrul în O și raza OM, această rază fiind determinată de poziția inițială a unghiului. Dar punctul M nu descrie tot cercul. Fie PT tangenta în P la cerc, PD o coardă congruentă cu AB și N mijlocul coardei PD. TPD este o poziție extremă a unghiului, deci N este un capăt al arcului descris de punctul M. La fel se găsește celălalt capăt, N'. Punctul M descrie arcul NMN' al cercului k.

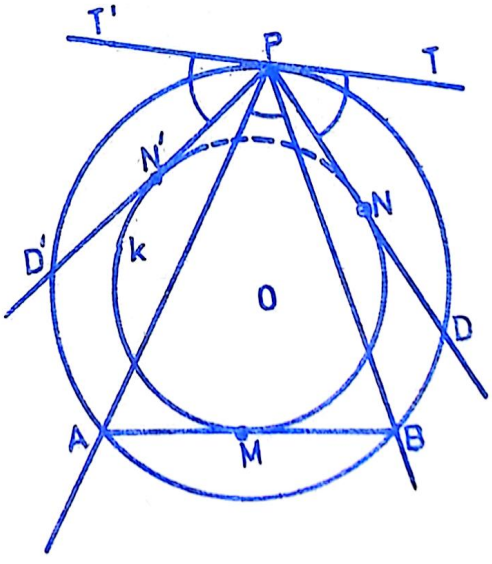


Fig. 50

6.5.1. Ce linie importantă în cerc este coarda BC? Cîte grade are unghiul format de o tangentă cu BC? Tangentele sînt paralele.

6.5.2. *Soluția I.* Cîte grade are arcul cuprins între laturile unghiului DAC (fig. 51)? Cîte grade are acest unghi? Aceleași întrebări cu privire la unghiul ACB ș.a.m.d. Dreptunghi.

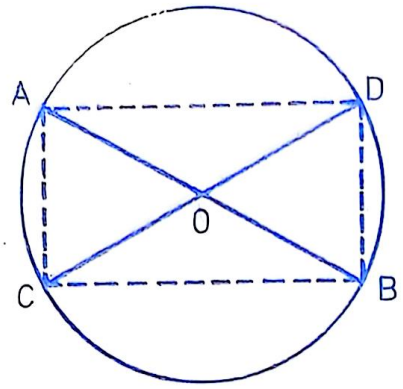


Fig. 51

Soluția II. Diagonalele AB și CD sînt congruente și se împart în părți congruente, deci...

6.5.3. Fie B punctul (deosebit de M) în care prima perpendiculară taie cercul. Cîte grade are arcul AB? Cele trei perpendiculare trec prin punctul diametral opus cu A.

6.5.4. Se trasează un segment BC congruent cu cel dat. Apoi se construiește un semicerc cu diametrul BC. Pe urmă se trasează un arc de cerc cu centrul B și cu raza egală cu BD; intersecția lui cu semicercul este punctul D. Tot așa, se trasează un arc de cerc cu centrul în C și cu raza CE; intersecția lui cu semicercul este punctul E. $BE \cap CD = A$.

6.5.5. a) Se duce o coardă AB congruentă cu cateta și diametrul AC. b) Se duce un diametru BC și o coardă BA care să formeze cu BC un unghi congruent cu unghiul dat. c) Se duce un diametru BC, în B se ridică perpendiculara pe BC, se poartă pe ea un segment BD congruent cu înălțimea și prin D se duce paralela la BC.

6.5.6. Se construiește cercul cu centrul în D și cu raza DB. Intersecțiile lui cu laturile AB și AC sînt punctele căutate.

6.5.7. Ce poziție are punctul E față de cercul de diametru BC? Unghiul BEC are 90°.

6.5.8. Cîte grade are unghiul M? unghiul B? $OM \parallel CB$.

6.5.9. Diagonalele tuturor dreptunghiurilor sînt congruente, căci sînt diametre.

6.5.10 (fig. 53). Se compară unghiul D cu F și se deduce că $ED \parallel BC$. Rezultă că arc $BE \equiv$ arc DC, deci...

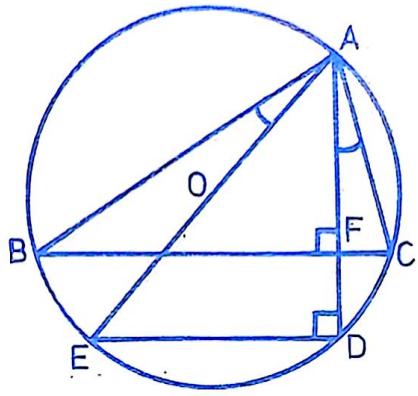


Fig. 53

6.5.11 (fig. 54). Cîte grade are unghiul ACG? Ce poziție are dreapta CG față de DB? La fel, $BG \parallel EC$. Patrulaterul $BGCF$ este un paralelogram.

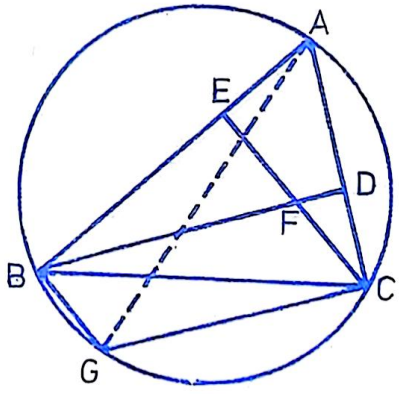


Fig. 54

6.5.12. a) Fie ABC un triunghi dreptunghic (fig. 55). Considerăm cercul circumscris triunghiului. Unghiul A având 90°, arcul BMC are $90° \cdot 2 = 180°$, deci BC este un diametru, deci centrul O al cercului este mijlocul ipotenuzei, deci raza cercului este jumătate din ipotenuză. Dar OA este mediană și totodată o rază, deci... . b) Fie ABC un triunghi, AO o mediană și $AO \equiv \frac{BC}{2}$. Atunci $OA \equiv OB \equiv OC$. Cercul cu centrul în punctul O și cu raza OB trece prin punctele C și A. Atunci unghiul A este înscris într-un semicerc, deci... (v. probl. 5.3.17 și 8.5.9).

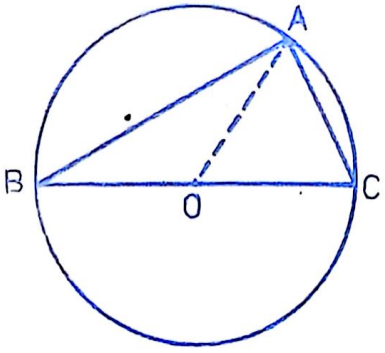


Fig. 55

6.5.13. a) Cîte grade are unghiul TAC? unghiul TBD? $AC \parallel BD$. b) Ce fel de triunghiuri sînt TOA și TPB? Se compară unghiurile lor. Unghiul 1 $\equiv$ unghiul 2, deci $OA \parallel PB$.

6.5.14. *Soluția I.* a) Dat fiind că arcul AMO' este un semicerc, cîte grade are unghiul AMO'? AM este tangentă. Analog $A'M$. b) $\triangle AMO' \equiv \triangle A'MO$ (IC), deci $MA \equiv MA'$. c) Ce fel de triunghi este OMO'? $\hat{O} = 60°$. Din triunghiul AMO se află că $\hat{A} = 30°$.

Soluția II. c) Triunghiul MOO' fiind echilateral, $\hat{O} = 60°$. Acest unghi fiind un unghi exterior al triunghiului isoscel AOM, $\hat{A} = 60° : \hat{2} = 30°$. b) La fel se arată că $\hat{A}' = 30°$, deci $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, deci triunghiul AMA' este isoscel.

a) În triunghiul MAO', $\hat{A} = 30°$, $\hat{O}' = 60°$; deci $\widehat{M} = 90°$, $AM \perp MO'$, AM este tangentă.

6.5.15 (fig. 58). Cîte grade au arcele CMB și BND? BC și BD sînt diametri, deci unghiurile BCE și BDE sînt drepte. Se consideră patrulaterul $ECBD$.

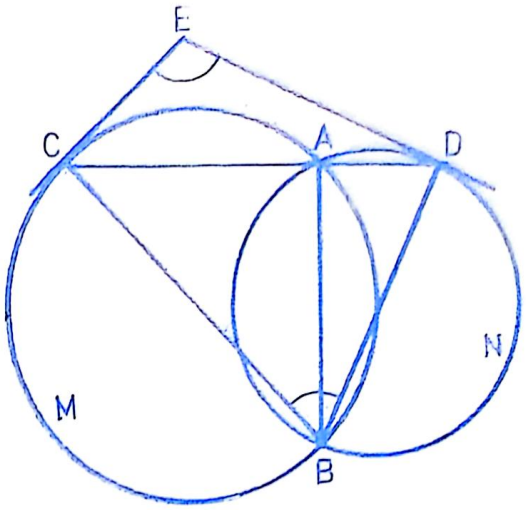


Fig. 58

6.6.1. a) Se compară arcele AB și AC; $\hat{1} \equiv \hat{2}$. b) Se compară unghiul 1 cu unghiul 3 (arcul AB) și unghiul 3 cu B; $\hat{1} \equiv \hat{B}$, deci $AD \parallel BC$. c) Ce relație există între unghiul 3 și arcul AB, între acest arc și arcul AC, între arcul AC și unghiul 4?

6.6.2. a) Ce relație există între unghiul A și arcul AB? între unghiul B și arcul BC? ș.a.m.d. Cîte grade are suma acestor arce? Suma unghiurilor este de 180°. b) Același răspuns. c) Același răspuns.

6.6.3. a) Ce legătură există între unghiul 1 și arcul AB? între unghiul 2 și arcul BC? ș.a.m.d. Cîte grade are suma acestor arce? Suma cerută este de 180°. b) Același răspuns.

6.6.4. Fie M un punct oarecare al arcului AB. Ce relație există între unghiul TAM și arcul AM? între unghiul TBM și arcul MB? Între suma

acestor unghiuri și arcul AB? Suma unghiurilor nu depinde de alegerea punctului M.

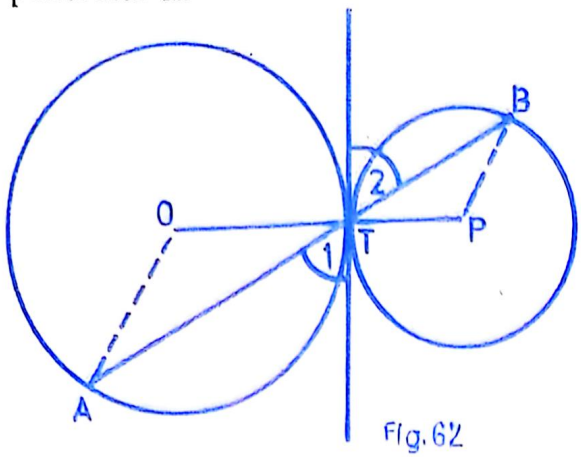


Fig. 62

6.6.5. Figura 62 reprezintă cazul cînd cercurile sînt tangente exterior. Se duce în T tangenta comună și se compară unghiul 1 cu 2, apoi arcul AT cu BT, apoi unghiul O cu unghiul P. Aceste unghiuri sînt alterne interne și congruente, deci...

6.6.6. *Soluția I.* Cîte grade are unghiul AMB? unghiul OMC? $\widehat{AMO} \equiv \widehat{BMC}$, căci au același complement, OMB.

Soluția II. Ce relație există între unghiurile AMO și A? între unghiul A și arcul MB? între unghiul BMC și arcul MB?

6.7.1. Se compară unghiul DAB cu unghiul B și acesta cu unghiul CAB. AB este bisectoarea unghiului CAD.

6.7.2. a) Se compară (fig. 65) CM cu CA și DM cu DB; $CD = 40$ mm.

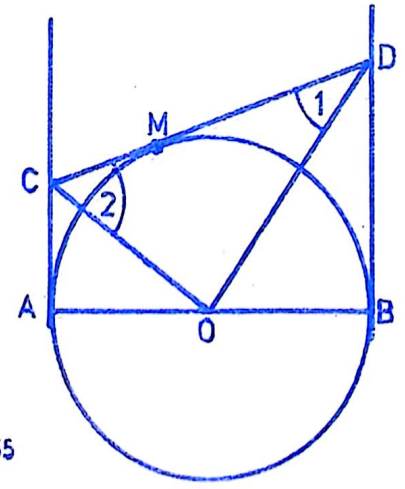


Fig. 65

b) Suma $AC + BD$ este minimă cînd segmentul CD este minim, cînd $CD \parallel AB$, cînd M este mijlocul semicercului AB. c) Din patrulaterul $ABDC$ se vede că suma unghiurilor ACD și BDC este de 180°, deci suma jumătăților lor $\hat{1}$ și $\hat{2}$ este de 90°. Din triunghiul COD rezultă că...

6.7.3 (fig. 66). Se compară DM cu DB și EM cu EC. Perimetrul triunghiului ADE este

$$(AD + DM) + (ME + AE)$$

DM se poate înlocui cu DB, deci prima paranteză devine $AD + DB$, adică AB. La fel se vede că paranteza a doua este egală cu AC. Deci perimetrul este $AB + AC$. Dar $AB \equiv AC$, deci perimetrul este $2AB$ — oricare ar fi poziția punctului M. Nu există nici minim, nici maxim. b) 20 cm.

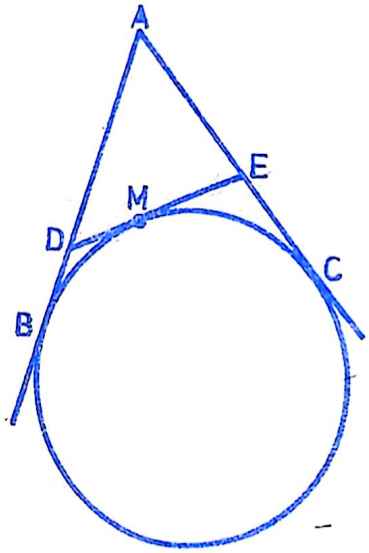


Fig. 66

6.7.4. $MG \equiv MF$ și $LG \equiv LE$ (tangente duse din același punct la un cerc), deci perimetrul triunghiului AML este egal cu $AF + AE$. Notînd cu p_A perimetrul triunghiului AML,

$$p_A = AF + AE.$$

La fel, notînd cu p_B și p_C respectiv perimetrul triunghiului BPN și CRQ,

$$p_B = BF + BD,$$

$$p_C = CD + CE.$$

Rezultă că

$$p_A + p_B + p_C = \dots$$

În cazul unui poligon cu n laturi, se formează n triunghiuri analoage cu AML și suma perimetrelor lor este egală cu perimetrul poligonului.

6.7.5. a) Fie M, N, P și Q punctele de contact. Se compară AM cu AQ, BM cu BN ș.a.m.d. și segmentele congruente se notează cu aceeași literă, a, b, c, d. Atunci

$$AB + CD = a + b + c + d \text{ și}$$

$$AD + BC = a + d + b + c;$$

sumele sînt egale. b) 30 cm. c) 24 cm. Latura oblică este media bazelor.

6.7.6. $BC + AD = AB + CD = 15$; $BC = 10$, $AD = 5$.

6.7.7. a) Se procedează ca în problema 6.7.5. b) De asemenea. c) Propoziția nu are sens. Numărul n trebuie să fie par.

6.7.8. Fie $ABCD$ patrulaterul și O centrul cercului. Se compară distanțele de la punctul O la laturile AB și AC. Ce poziție are punctul O față de bisectoarea unghiului A? Ce poziție are punctul O față de bisectoarea unghiului B? ș.a.m.d. Toate bisectoarele trec prin centrul cercului.

6.7.9. *Soluția I* (fig. 69). Patrulaterul $ABCD$ care se formează este sigur paralelogram. Fie O centrul cercului și E, F două puncte de contact, $OE \perp AB$ și $OF \perp AD$ și $OE \equiv OF$, deci AO este bisectoarea unghiului A. La fel se vede că BO este bisectoarea unghiului B și CO este bisectoarea unghiului C. Unghiurile A și B fiind suplementare, suma jumătăților lor este de 90°, $\hat{1} + \hat{2} = 90°$, deci triunghiul AOB este dreptunghic, $AO \perp OB$. La fel se arată că $OC \perp OB$, deci semidreptele OA și OC sînt în prelungire. În triunghiul ABC, $\hat{1} \equiv \hat{3}$, ca jumătăți ale unghiurilor congruente A și C, deci acest triunghi este isoscel, $BA \equiv BC$, paralelogramul $ABCD$ este romb. (v. și probl. 5.4.15).

Soluția II. $ABCD$ fiind un paralelogram, $AB \equiv DC$ și $AD \equiv BC$. Se știe că, într-un patrulater circumscris, suma a două laturi opuse este egală cu suma celorlalte laturi opuse (v. probl. 6.7.5), deci

$$AB + DC = AD + BC.$$

Înlocuind DC cu AB și AD cu BC, se obține $2AB = 2BC$; $AB \equiv BC$. Paralelogramul $ABCD$ avînd două laturi vecine congruente, este romb.

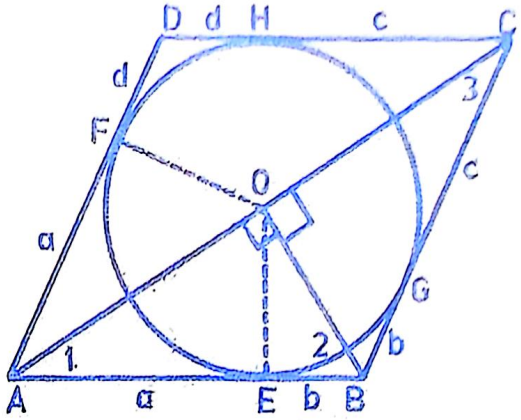


Fig. 69

6.7.10. a) Fie P (fig. 70) un punct oarecare din exteriorul cercului, PA și PB tangentele duse din P la cerc și O centrul cercului. Ce relație există între unghiurile O și P? (Unghiurile A și B sînt drepte.) Construcție: Se construiește un unghi la centru AOB de $(180° - u°)$, în A și B se duc tangentele la cerc. Intersecția lor este punctul căutat P. b) Punctul A poate fi luat după voie. Dacă în locul lui se ia punctul A' și se face aceeași construcție, se obține un alt punct, P'. Există o infinitate de puncte. $\triangle AOP \equiv \triangle OA'P'$ (ULU) (unghiurile 1 și 2 sînt jumătăți ale unghiurilor congruente APB și $A'P'B'$), deci $OP \equiv OP'$. Rezultă că punctul P' aparține cercului cu centrul în O și raza OP. Pentru a arăta că punctele P, P' etc. formează în adevăr tot cercul, considerăm un punct oarecare M al cercului mare și ducem din el o tangentă MC la cercul dat,

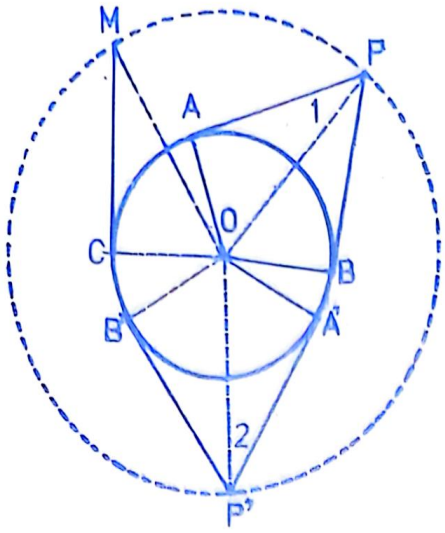


Fig. 70

$\triangle MOC \equiv \triangle POA$ (IC), deci $\widehat{M} \equiv \hat{1}$. Rezultă că tangentele duse din punctul M la cerc formează un unghi congruent cu unghiul APB, deci toate punctele cercului mare îndeplinesc condiția din problemă.

6.7.11. Fie O centrul cercului, D, E și F punctele de contact (fig. 71) și r lungimea razei. $DA = OE = r$, deci $CD = AC - r$, deci și $CF = AC - r$ (tangente duse din același punct). Tot așa, $BE = AB - r$, deci

$BF = AB - r$. $CB = CF + FB$,

$CB = (AB - r) + (AC - r) =$

$= AB + AC - 2r = AB + AC - d$.

Ecuația se rezolvă în raport cu d.

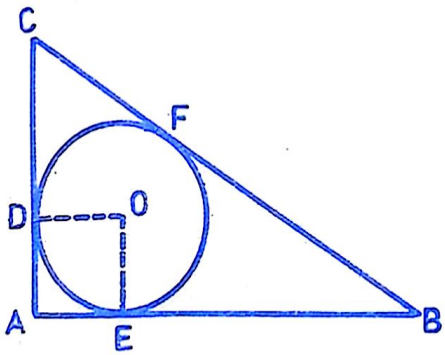


Fig. 71

6.8.1. *b*, *d* și *f*.

6.8.2 (fig. 72). $\triangle AMC \equiv \triangle CNB$ (LUL), deci $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Dar $\hat{2} + \hat{3} = 180°$, deci $\hat{1} + \hat{3} = 180°$. Rezultă că patrulaterul $AMPN$ este inscriptibil, deci unghiurile A și P sînt suplementare. Cum $\hat{A} = 60°$, rezultă că $\hat{P} = 120°$, oricare ar fi punctul M pe latura AB.

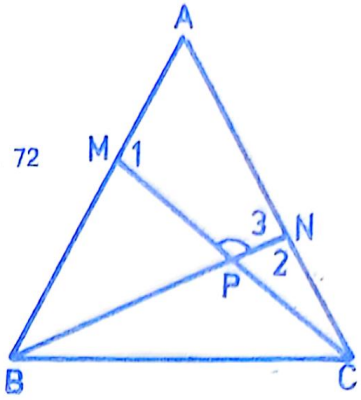


Fig. 72

6.8.3. a) Ce relație există între unghiurile 1 și 2? (fig. 73)? între $\hat{2}$ și $\hat{B}$? (patrulaterul $BCDE$ este înscris), între $\hat{1}$ și $\hat{B}$? $\hat{1} \equiv \hat{B}$. La fel se arată că $\hat{3} \equiv \hat{C}$. b) Se compară unghiul 4 cu unghiul B. Dar $\hat{B} \equiv \hat{1}$, deci $\hat{1} \equiv \hat{4}$, $AT \parallel ED$.

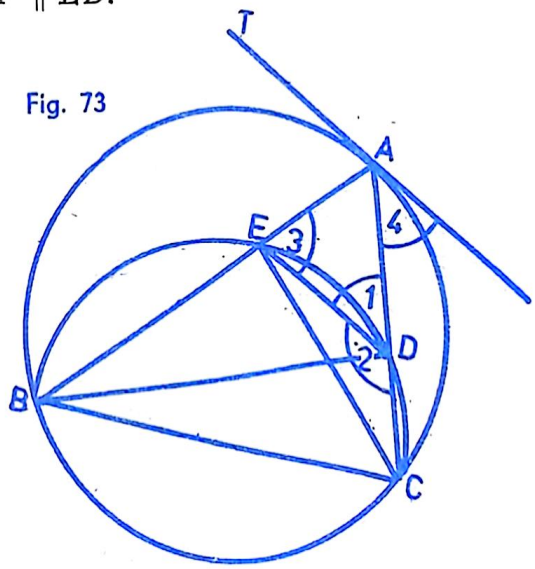


Fig. 73

6.8.4 (fig. 74). Patrulaterul $AEDF$ este inscriptibil, căci unghiurile E și F sînt suplementare. Unghiul E fiind drept, cuprinde între laturi un arc de 180°, deci AD este un diametru al cercului circumscris patrulaterului. EF este o coardă a aceluiași cerc. Se știe că diametrul unui cerc este cea mai

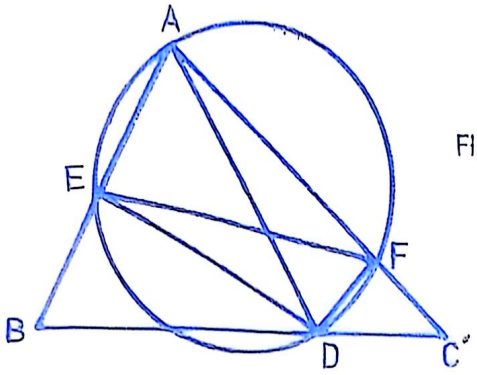


Fig. 74

mare coardă, deci $EF \leqslant AD$. Dacă $EF \equiv AD$, EF este de asemenea un diametru, deci unghiul A este drept. Reciproc, dacă unghiul A este drept, patrulaterul $AEDF$, avînd trei unghiuri drepte, este dreptunghi, deci are diagonale congruente, $EF \equiv AD$. Aşadar, $EF \equiv AD$ dacă şi numai dacă triunghiul ABC este dreptunghic în A.

6.8.5. *Soluţia I* (fig. 75). Patrulaterul $CBAE$ fiind înscris, $\hat{E} \equiv \hat{1}$, căci au acelaşi suplement, unghiul 2; tot aşa, $\hat{1} \equiv \hat{3}$, căci au acelaşi suplement, unghiul 4. Rezultă că $\hat{E} \equiv \hat{3}$. Paralelogram.

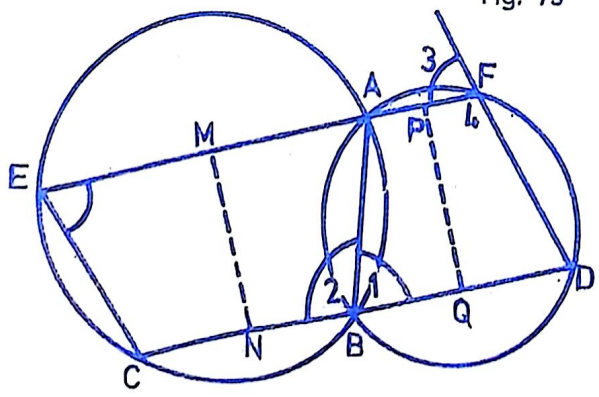
Soluţia II. Ducem prin centrele cercurilor cîte o perpendiculară pe cele două paralele; se formează un dreptunghi $NQPM$.

$$AM = \frac{AE}{2},\ AP = \frac{AF}{2},\ \text{deci}$$

$$MP = \frac{EF}{2};\ \text{la fel, } NQ = \frac{CD}{2}.$$

Dar $MP \equiv NQ$, deci $EF \equiv CD$. Patrulaterul $CDFE$ avînd laturile CD şi EF congruente şi paralele, ...

Fig. 75



6.8.6 (fig. 76). Patrulaterul $ABCD$ avînd două unghiuri opuse suplementare, este inscriptibil. Dacă $AC \equiv BD$, $\overset{\frown}{ADC} \equiv \overset{\frown}{DCB}$. Scăzînd partea comună, $\overset{\frown}{DC}$, rezultă că $\overset{\frown}{AD} \equiv \overset{\frown}{BC}$, deci $AB \parallel CD$ şi $AD \equiv BC$, deci...În cazul particular cînd unghiul A este drept, $AD \perp AB$ şi, deoarece $AB \parallel DC$, $AD \perp DC$, deci unghiul D este drept. Trapezul fiind isoscel, $\hat{A} \equiv \hat{B}$, deci unghiul B este drept. Patrulaterul avînd trei unghiuri drepte, este un dreptunghi.

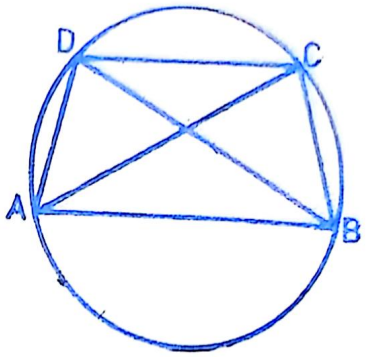


Fig. 76

6.8.7 (fig. 77). a) Cîte grade are suma unghiurilor A şi D ale trapezului (v. probl. 5.6.6)? suma unghiurilor 1 şi 2? unghiul $1QD$? unghiul 3? La fel se arată că unghiul 4 este drept, deci... .
b) În aceeaşi figură, considerăm că $ABCD$ este un patrulater oarecare. Unghiul 3 este congruent cu unghiul Q al triunghiului AQD, deci

$$\hat{3} = 180° - \hat{1} - \hat{2} =$$

$$= 180° - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{D}}{2}.$$

La fel,

$$\hat{4} = 180° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2}.$$

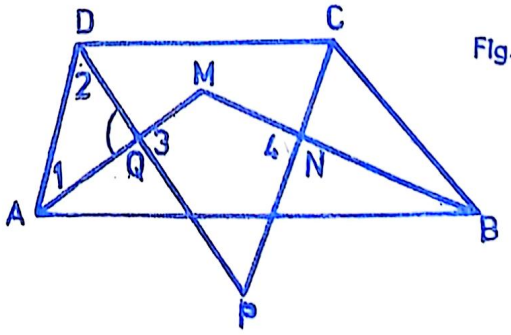


Fig. 77

Rezultă că

$$\hat{3} + \hat{4} = 360° - \frac{\hat{A}}{2} - \frac{\hat{D}}{2} - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{C}}{2} =$$

$$= 360° - \frac{\hat{A} + \hat{D} + \hat{B} + \hat{C}}{2}.$$

Cîte grade are suma $\hat{A} + \hat{D} + \hat{B} + \hat{C}$? Rezultă că $\hat{3} + \hat{4} = 180°$, deci... Bisectoarele unghiurilor unui patrulater convex determină un patrulater inscriptibil.

6.8.8. a) Fie ABC (fig. 78) triunghiul și O centrul cercului. Ce relație există între unghiurile A și BOC, B și COA, C și AOB? Dacă se dă că $\widehat{BAC} = u°$ și $\widehat{ABC} = v°$, se construiesc unghiurile la centru BOC de $2u°$ și COA de $2v°$. Problema are o singură soluție. b) Fie $\widehat{DAB} = u°$ și $\widehat{ABC} = v°$ (fig. 79) unghiurile date. Se duce o coardă oarecare AB și o coardă AD astfel ca unghiul DAB să aibă $u°$, și o coardă BC astfel ca unghiul ABC să aibă $v°$. Patrulaterul $ABCD$ este cel căutat. Deoarece în alegerea coardei AB avem multă libertate, există o infinitate de soluții.

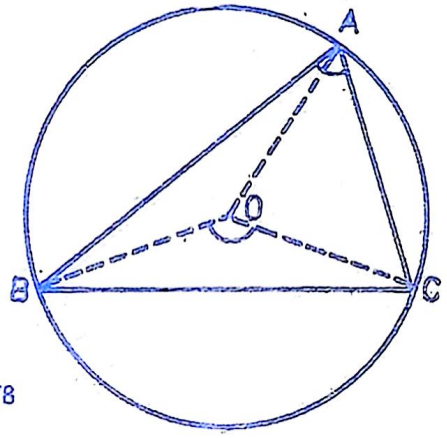


Fig. 78

Observări. 1) Coarda AB nu poate fi luată cu totul după voie. În adevăr, dacă patrulaterul se poate construi,

$$\widehat{BCD} = 2u,\ \widehat{ADC} = 2v,\ \text{deci}$$

$$\widehat{BCD} + \widehat{ADC} = 2(u + v).$$

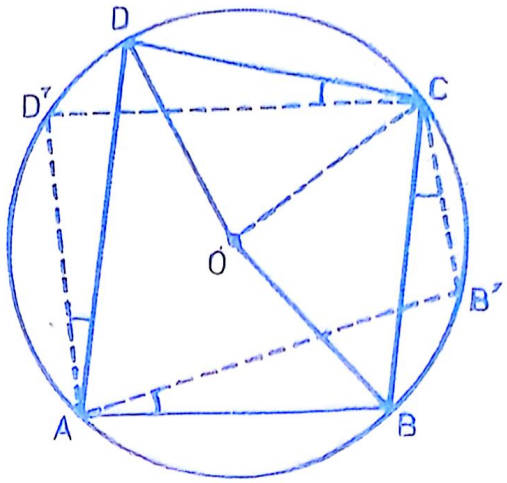


Fig. 79

Dar $\widehat{BCD} + \widehat{ADC} > \widehat{ADCB}$, deci $2(u+v) > \widehat{ADCB}$ sau $\widehat{ADCB} < 2(u+v)$.

Dacă această condiție nu este îndeplinită, se obține un patrulater încrucișat. Așadar, coarda AB trebuie dusă astfel încît măsura arcului AB care va conține vîrfurile C și D să fie mai mică decît $2(u + v)$ sau, ceea ce este același lucru, măsura arcului AB care nu conține punctele C și D să fie mai mare decît $360° - 2(u + v)$.

2) Faptul că problema are o infinitate de soluții se poate vedea și astfel: Fie $ABCD$ (fig. 79) un patrulater înscris. Lăsăm punctele A și C fixe și mutăm punctul B în B' și D în D' astfel ca arcele BB' și DD' să fie congruente. Atunci unghiurile marcate cu cîte un arc sînt congruente, unghiurile patrulaterului $AB'CD'$ sînt congruente cu unghiurile patrulaterului $ABCD$. Arcul BB' poate fi luat într-o infinitate de moduri, deci...

6.9.1. Unim punctul P cu A și B. În dreptunghiul $AQPM$ diagonalele sînt congruente, $MQ \equiv AP$. La fel se arată că $NQ \equiv PB$. De asemenea $MN \equiv AB$. Rezultă că $\triangle MQN \equiv \triangle APB$ (LLL). Dar triunghiul APB este dreptunghic, căci este înscris într-un semicerc, deci...

6.9.2. a) Se construiește un triunghi ABC în care $AB = a + b$, $BC = b + c$, $CA = c + a$, apoi cercul cu centrul în A și de rază a ș.a.m.d.

Construcția este totdeauna posibilă, căci $(a + b) + (b + c) = a + 2b + c + c > a + c$ ș.a.m.d. b) Bisectoarele triunghiului ABC sînt mediatoarele triunghiului MNP. Cele două centre coincid.

6.9.3. *Soluția I.* a) Trebuie aflat arcul PN (fig. 81). $\overset{\frown}{PN} = \overset{\frown}{PM} + \overset{\frown}{MN}$. A cîta parte a arcului AM este PM? La fel, arcul MN este jumătate din MB. Cîte grade are suma arcelor AM și MB? suma jumătăților lor PM și MN? $\overset{\frown}{PN} = 90°$, deci $\overset{\frown}{PON} = 90°$. b) Cînd punctul M descrie cercul, arcul PN are mereu 90°, deci coarda PN rămîne constantă. Nu există maxim. c) Coarda PN fiind constantă, segmentul OQ, care reprezintă distanța sa de la centru, rămîne constantă, deci punctul Q descrie un cerc cu centrul O.

Soluția II. a) Punctul N este mijlocul arcului BM, deci diametrul care trece prin N este perpendicular pe coarda BM. Deoarece $AM \perp MB$, $ON \parallel AM$. La fel, $OP \parallel BM$. Rezultă că unghiurile PON și M au laturile paralele. Unghiul M fiind drept, rezultă că...

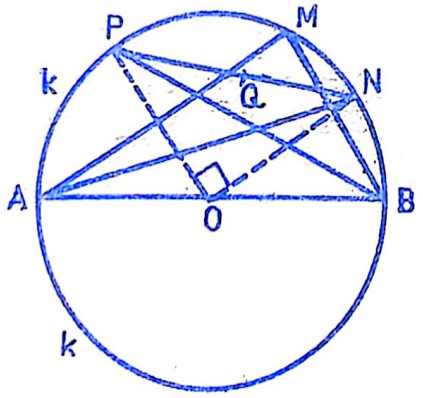


Fig. 81

6.9.4. a) Fie $AC \cap BN = E$ și $AB \cap CP = F$ (fig. 82). Triunghiul dreptunghic ABE arată că $\hat{1} = 90° - \hat{A}$ și triunghiul dreptunghic ACF arată că $\hat{2} = 90° - \hat{A}$, deci $\hat{1} \equiv \hat{2}$, deci $\overset{\frown}{AN} \equiv \overset{\frown}{AP}$, deci $\overset{\frown}{PMA} \equiv \overset{\frown}{AMN}$, deci MA este bisectoarea unghiului PMN. La fel se arată că NB este bisectoarea unghiului MNP și PC este bisectoarea unghiului NPM. b) S-a arătat că $\hat{1} = 90° - \hat{A}$, deci $\overset{\frown}{AN} = 2 \cdot \hat{1} = 180° - 2\hat{A}$. Pe de altă parte

$$\overset{\frown}{PMN} = \frac{\overset{\frown}{PAN}}{2} = \frac{2\overset{\frown}{AN}}{2} = \overset{\frown}{AN},$$

deci $\overset{\frown}{PMN} = 180° - 2\hat{A}$. La fel se arată că $\overset{\frown}{MNP} = 180° - 2\hat{B}$, $\overset{\frown}{NPM} = 180° - 2\hat{C}$.

Observare. Din prima parte a acestei probleme se obține o demonstrație, deosebită de cea clasică, a faptului că înălțimile unui triunghi sînt concurente — dacă s-a demonstrat în prealabil că bisectoarele unui triunghi sînt concurente. În adevăr, bisectoarele triunghiului MNP fiind concurente, înălțimile triunghiului ABC sînt concurente.

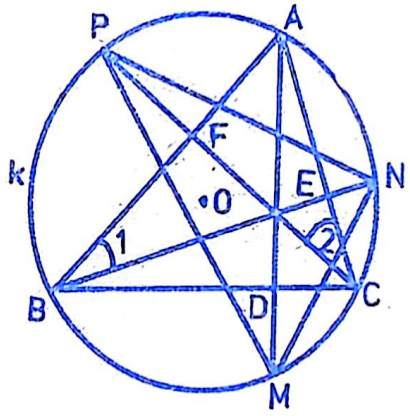


Fig. 82

6.9.5. a) *Soluția I.* Se consideră triunghiurile ABB' și $AA'B'$ (fig. 83). Ele sînt dreptunghice, $AA' \equiv BB'$ și $\hat{B} \equiv \hat{A}'$ căci cuprind între laturi același arc. Rezultă că sînt congruente (ULU), deci $AB \equiv A'B'$. În mod analog se demonstrează că $BC \equiv B'C'$ și $CA \equiv C'A'$.

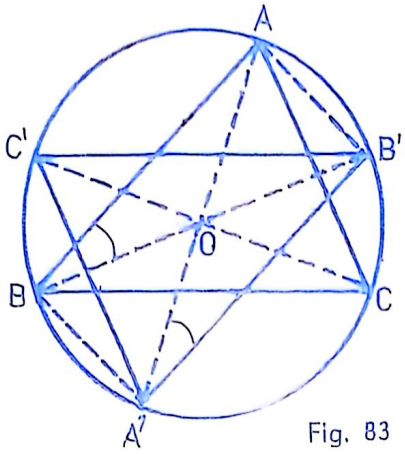


Fig. 83

Soluția II. Se examinează unghiurile patrulaterului $ABA'B'$. Cîte grade are arcul cuprins între laturile unghiului BAB'? Cîte grade are acest unghi? Aceleași întrebări cu privire la unghiurile B și C. Ce fel de patrulater este $ABA'B'$? Rezultă că $AB \equiv A'B'$. La fel se demonstrează că $BC \equiv B'C'$ și $CA \equiv C'A'$, deci...

Soluția III. $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ABA'} - \overset{\frown}{BA'} = 180° - \overset{\frown}{BA'}$ și $\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{BA'B'} - \overset{\frown}{BA'} = 180° - \overset{\frown}{BA'}$, deci $AB \equiv A'B'$, deci $AB \equiv A'B'$. La fel se arată că $BC \equiv B'C'$ și $CA \equiv C'A'$.

Soluția IV. Unghiul AOB este un unghi la centru, arcul cuprins între laturile sale este $\overset{\frown}{AB}$; unghiul $A'OB'$ este de asemenea un unghi la centru, arcul corespunzător este $\overset{\frown}{A'B'}$. Unghiurile fiind congruente (op. la vîrf), $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{A'B'}$, deci $AB \equiv A'B'$. La fel se arată că $BC \equiv B'C'$ și $CA \equiv C'A'$.

Soluția V. O rotație cu 180° în jurul centrului cercului duce punctul A în A', punctul B în B' și punctul C în C', deci face ca triunghiul ABC să coincidă cu triunghiul $A'B'C'$.

b) Considerăm, de exemplu, un pentagon oarecare $ABCDE$ înscris într-un cerc. Fie A', B', C', D' și E' respectiv punctele diametral opuse cu A, B, C, D și E. O rotație cu 180° duce punctul A în A', B în B' ș.a.m.d. Pentagonul $ABCDE$ devine $A'B'C'D'E'$, deci pentagoanele sînt congruente.

Observare. Oricare din cele cinci căi urmate în cazul triunghiului se pot urma și în cazul unui poligon cu un număr oarecare de laturi n. Dar cînd $n > 3$ lucrurile se complică, căci, pe de o parte, trebuie demonstrat că și unghiurile celor două poligoane sînt congruente și, pe de altă parte, raționamentul trebuie repetat pentru fiecare pereche de laturi și de unghiuri. În schimb, calea a cincea dă dintr-odată soluția, oricîte laturi ar avea poligonul. Avem aici un exemplu care arată superioritatea folosirii transformărilor (v. Observarea de la problema 7.19 și 14.1.11).

6.9.6. Se duce raza OC. Fie $\overset{\frown}{ADC} = u$. Ce fel de triunghi este CDO? Se calculează pe rînd unghiurile COD, OCB (exterior triunghiului CDO), OBC și AOB (exterior triunghiului DOB). Se obține $\overset{\frown}{AOB} = 3u$, deci... Figura 85 reprezintă cazul cînd $AOB > 135°$. Se calculează unghiul COD, apoi OCx (unghi exterior). Triunghiul OBC fiind isoscel, $\overset{\frown}{OCx} \equiv \overset{\frown}{OBD}$. Unghiul AOB este un unghi exterior al triunghiului OBD, deci $\overset{\frown}{AOB} = \hat{D} + \overset{\frown}{DBC} = u + 2u = 3u$. Cînd $\overset{\frown}{AOB} = 135°$, punctele B și C coincid, triunghiul OBD este dreptunghic și isoscel, deci $\hat{D} = 45° = 135° : 3$.

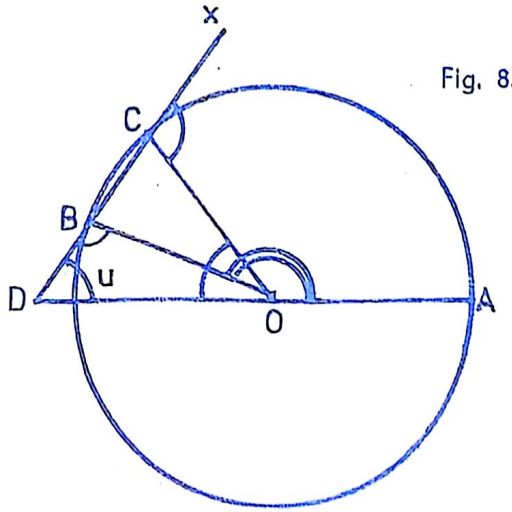


Fig. 85

Observare. Această figură dă un mijloc de a împărți un unghi în trei

părți congruente. Fie AOB un unghi ($<135°$). Se construiește un cerc cu centrul în O și latura AO se prelungește dincolo de O. Apoi se fac pe o fîșie de hîrtie cu marginea dreaptă două linioare M și N astfel încît segmentul MN să fie congruent cu raza cercului. Fîșia de hîrtie se așază astfel încît marginea ei să treacă prin punctul B, punctul M să cadă pe cerc și punctul N pe dreapta AO; fie C primul și D al doilea dintre aceste puncte. Atunci, conform cu ceea ce s-a demonstrat, unghiul D este o treime din unghiul AOB.

Problema de a împărți un unghi în trei părți congruente (trisecțiunea unghiului) este o problemă celebră din antichitate. Geometrii antici (greci) au depus eforturi mari și nu au reușit să o rezolve. Abia în secolul trecut s-a demonstrat că problema nu se poate rezolva printr-o construcție geometrică, adică folosind numai rigla și compasul. Lucrarea descrisă mai sus nu este o construcție geometrică deoarece s-a folosit o fîșie de hîrtie.

6.9.7. Ce fel de triunghi este OAB? Cele două unghiuri notate cu u sînt congruente. De asemenea cele notate cu v. Suma unghiurilor triunghiului ABC este de 180°, adică $u + u + v + v = 180°$, $2u + 2v = 180°$, $u + v = 90°$, Dar $u + v = \hat{A}$, deci...

Observări. 1) În expunerea obișnuită, teorema cu privire la unghiul înscris într-un semicerc este un caz particular al teoremei care spune că măsura unui unghi înscris este egal cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale. Se crede că demonstrația de mai sus este datorită lui Tales, care a trăit cu cca 300 ani înainte de Euclid și nu cunoștea teorema cu privire la unghiul înscris.

Ca urmare a acestui fapt s-a menținut pînă în ziua de azi o deosebire între enunțul teoremei cu privire la unghiul înscris într-un semicerc și un unghi înscris oarecare. În cazul general, se stabilește o relație între unghi și arcul cuprins între laturi, dar în cazul unghiului drept, legătura se face, nu cu semicercul cuprins între laturile unghiului, ci cu semicercul celălalt, în care „este înscris" unghiul.

2) Dăm și o altă demonstrație a acestei teoreme. Fie BAC un unghi înscris într-un semicerc (fig. 87). Ducem diametrul AD și unim punctul D cu punctele B și C. Diagonalele patrulaterului $ABDC$ sînt congruente și se împart în părți congruente, deci patrulaterul este dreptunghi, deci unghiul BAC este drept.

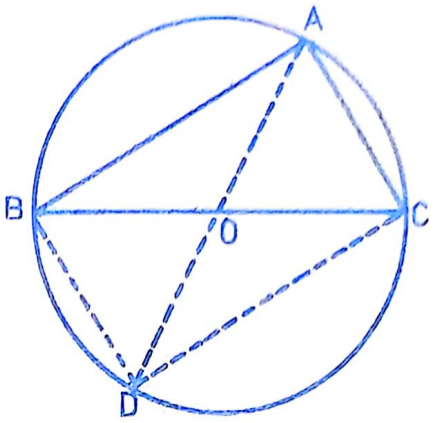


Fig. 87

6.9.8 (fig. 88). Presupunem că vîrful A alunecă pe dreapta Ox și B pe Oy. Considerăm patrulaterul $OAPB$. Unghiurile sale O și P sînt drepte, suma lor este de 180°, deci patrulaterul este inscriptibil. Rezultă că $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Dar

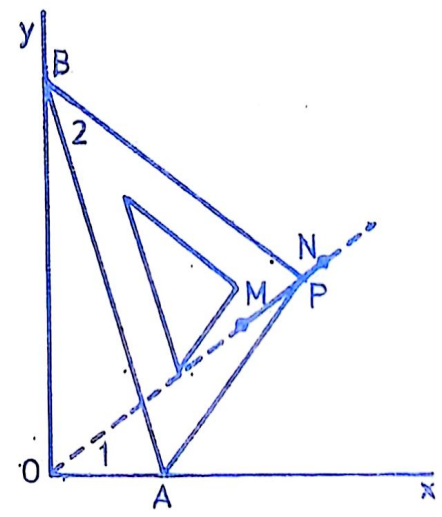


Fig. 88

unghiul 2 este constant, deci și unghiul 1 rămîne constant. Rezultă că punctul P se mișcă pe dreapta OP, care face cu Ox un unghi congruent cu unghiul B al echerului (și cu Oy un unghi congruent cu unghiul A). Dar punctul P nu poate descrie toată dreapta. El ocupă pozițiile extreme cînd ipotenuza se așterne pe dreapta Ox sau Oy. (Verificare cu ajutorul unui triunghi dreptunghic decupat din hîrtie.) Punctul P descrie un segment MN, unde $OM \equiv PA$, $ON \equiv PB$.

Cap. 7

7.1. a) 5 înțepături. b) Se așază vîrful de oțel al compasului într-un punct oarecare A al cercului și se marchează pe cerc două puncte B și F de o parte și de alta a punctului A, apoi se duc diametrii care trec prin A, B și F. Se face astfel o singură înțepătură.

7.2 (fig. 1). Se calculează unghiurile NAB, NBA și MAN cu ajutorul arcelor cuprinse între laturile lor, apoi unghiul ANM (exterior triunghiului ANB). Ce fel de triunghi este ANB? $AN \equiv NB$. Ce fel de triunghi este ANM? $AN \equiv NM$. Deci $NB \equiv NM$. La fel se arată că $FM \equiv NM$, deci $FM \equiv MN \equiv NB$ (v. și probl. 15.3.10).

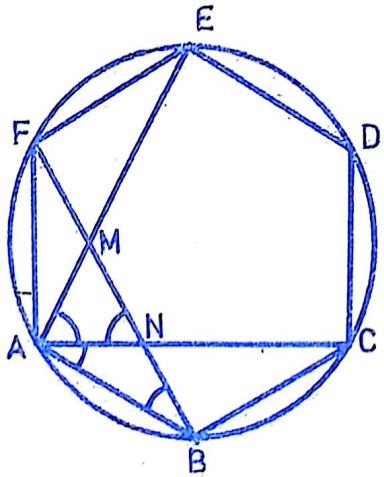


Fig. 1

7.3 (fig. 2). Fie O și P centrele celor două cercuri și A, B punctele lor de intersecție. Ce fel de triunghiuri sînt AOP și BOP? Cîte grade are unghiul AOB? A cîta parte din cerc este arcul APB? AB este latura triunghiului echilateral înscris în cerc.

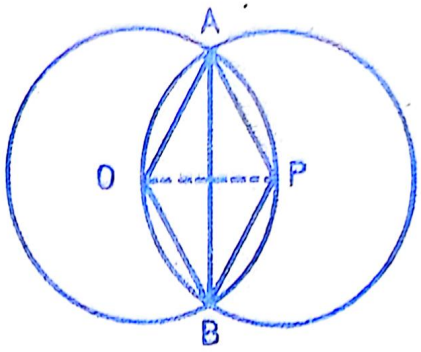


Fig. 2

7.4. Cîte grade are arcul BC? unghiurile CBD și BCD? Ce fel de triunghi este BCD? $ABDC$ este un romb.

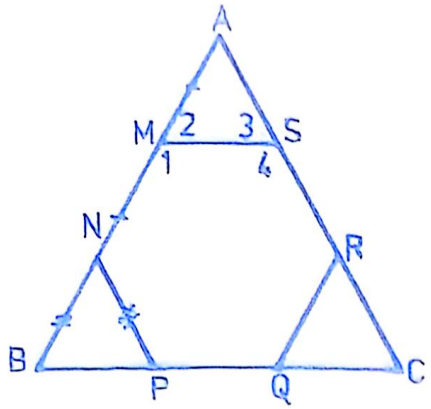
Altă soluție: Se calculează unghiul CBD și se compară cu unghiul ACB; $BD \parallel CA$. La fel, $CD \parallel AB$. Totodată $AB \equiv AC$.

7.5. Fie O centrul cercului, $ABCDEF$ hexagonul și ACE triunghiul. Se compară triunghiul ACO cu ACB, CEO cu CED, EAO cu EAF (LLL). Din cîte astfel de triunghiuri se compune triunghiul și din cîte hexagonul? Raportul este 1 : 2.

7.6. a) Cîte grade are arcul FDC? unghiul FAC? La fel se arată că unghiurile ACD și AFD sînt drepte. $ACDF$ este un dreptunghi. Altă soluție: Diagonalele AD și FC sînt congruente și se împart în părți congruente deci... b) Triunghiul ABG este jumătate din triunghiul echilateral OAB, a cărui latură este latura hexagonului. Din cîte triunghiuri congruente cu triunghiul ABG se compune hexagonul și din cîte dreptunghiul $ACDF$? Raportul ariilor este 2 : 3.

7.7. a) Laturile triunghiului se împart în cîte trei părți congruente (fig. 4). b) Dacă triunghiul nu este echilateral, el are cel puțin un unghi diferit de 60°, fie A acest unghi. Dacă luăm

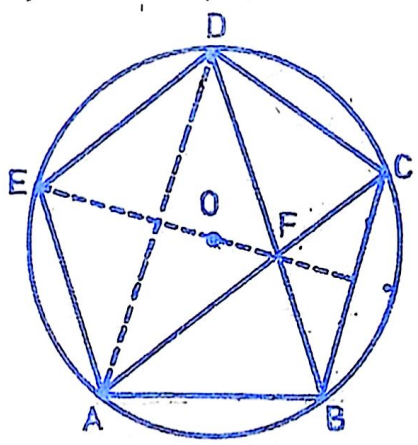
Fig. 4



punctele M și S astfel încît unghiul 2 să aibă 60°, unghiul 3 nu va avea 60°, deci unghiul 4 nu va avea 120° și nu vom obține un hexagon regulat. Problema nu are soluție.

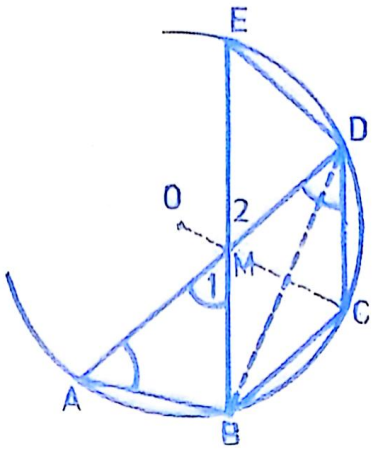
7.8 (fig. 5). a) Se calculează unghiurile triunghiului ținînd seama că unghiurile A și B sînt unghiuri înscrise și se știe cîte grade au arcele cuprinse între laturile lor; $AB \equiv AF$. b) Același procedeu; $DF \equiv DC$. c) Același procedeu; $FB \equiv FC$. d) Din răspunsurile la primele două întrebări rezultă că AF și DF sînt congruente cu latura pentagonului; $AFDE$ este un romb. e) Diagonala EF este mediatoarea diagonalei AD și $OA = OD$, deci $O \in EF$.

Fig. 5



7.9. *Soluția I.* Se calculează unghiurile triunghiului MAB (fig. 6). a) Fie a măsura arcului subîntins de o latură a poligonului. Atunci $\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BD}}{2} = 2a : 2 = a$. Unghiul 1 este un unghi exterior al triunghiului MBD, deci $\hat{1} = \overset{\frown}{EBD} + \overset{\frown}{ADB} = \frac{\overset{\frown}{ED}}{2} + \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$. Rezultă că $\hat{1} \equiv \hat{A}$,

Fig. 6



deci... b) $MD \parallel BC$ căci $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$ și $MB \parallel DC$ căci $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{DE}$, totodată $MB \equiv BC$, după cum s-a demonstrat, deci $MBCD$ este un romb. Rezultă că diagonala CM este mediatoarea diagonalei BD, care este o coardă, deci CM trece prin centrul cercului.

Soluția II. a) $CD \parallel BE$, căci $\overset{\frown}{BC} \equiv \overset{\frown}{DE}$, deci $\hat{1} \equiv \hat{D}$. Dar $\hat{D} \equiv \hat{A}$, căci fiecare din aceste unghiuri cuprinde între laturi două părți ale cercului circumscris, deci $\hat{M} \equiv \hat{A}$, deci...

7.10 (fig. 7). a) Se compară unghiurile triunghiului MAD comparînd arcele cuprinse între laturile lor; $MA \equiv MD$. Folosind triunghiul MBC, se găsește că $MB \equiv MC$. b) Procedeu analog. $NA \equiv NE$, $NB \equiv ND$. c) Oricare două diagonale care pornesc din două vîrfuri consecutive și subîntind același număr de părți ale cercului se împart în părți congruente două cîte două.

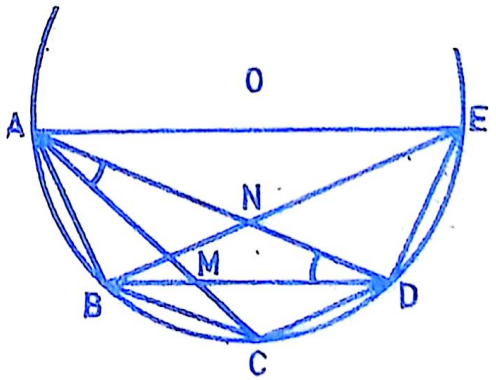


Fig. 7

7.11. a) Fie A și A' două vîrfuri ale poligonului astfel alese încît de o parte și de alta a diagonalei AA' să se găsească același număr de vîrfuri ale poligonului; AA' este un diametru al cercului circumscris poligonului. Fie B și B' alte două vîrfuri care au aceeași proprietate. Atunci $ABA'B'$ este un dreptunghi, căci diagonalele sale sînt congruente și se împart în părți congruente.

b) Considerăm cazul cînd n este impar (fig. 8). Dacă ar exista patru vîrfuri A, B, C, D ale poligonului care formează un dreptunghi, unghiul ABC ar fi drept, deci arcul ADC ar fi un semicerc, de asemenea și arcul ABC. Fiecare din aceste semicercuri fiind format din același număr de părți ale cercului, poligonul ar avea un număr par de laturi, ceea ce este în contradicție cu faptul că numărul n este impar.

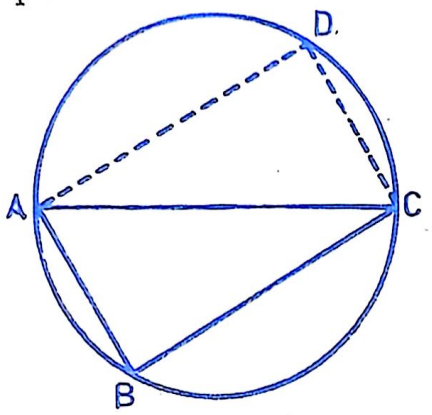


Fig. 8

7.12. Fie AMB (fig. 9) unul dintre triunghiurile isoscele. Vîrfurile poligonului inițial sînt și vîrfuri ale poligonului care se formează, deci cele două poligoane sînt înscrise în același cerc și punctul M este mijlocul arcului AB. Deoarece $\overset{\frown}{AB} = \frac{360^\circ}{n}$, $\overset{\frown}{MB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{180^\circ}{n}$ și unghiul MAB, ca unghi înscris, are $\frac{180^\circ}{n} : 2 = \frac{90^\circ}{n}$.

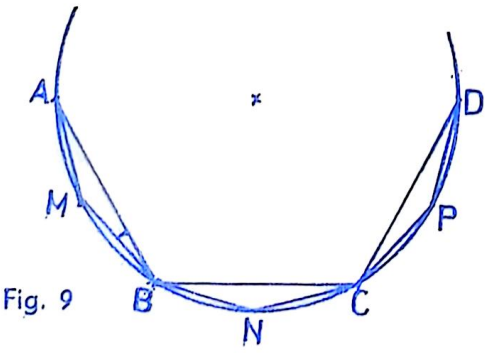


Fig. 9

7.13. a) Se compară arcele subîntinse de diagonale. Toate diagonalele sînt congruente. b) Pătratul și pentagonul regulat îndeplinesc condiția. Fie a arcul subîntins de o latură a unui poligon regulat. În cazul hexagonului, de exemplu, cîte arce congruente cu a poate subîntinde o diagonală? Deci există două diagonale de lungimi diferite. Situația este aceeași în orice poligon regulat care are mai mult decît 5 laturi. Pătratul și pentagonul regulat sînt singurele poligoane regulate în care toate diagonalele sînt congruente.

7.14. *Soluția I.* Luăm, pentru orientare, un dodecagon (fig. 10) și un poligon cu 9 laturi (fig. 11). În general, dacă n este un număr par, arcul subîntins de o coardă poate fi format din cel mult $\frac{n}{2}$ părți ale cercului. Coarda care subîntinde o singură parte este o latură a poligonului, deci numărul diagonalelor de lungimi diferite este $\frac{n}{2} - 1$, adică $\frac{n-2}{2}$. Dacă n este impar arcul subîntins de o coardă poate fi format din cel mult $\frac{n-1}{2}$ părți ale cercului. Una dintre coarde fiind o latură, numărul diagonalelor de lungimi diferite este $\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$.

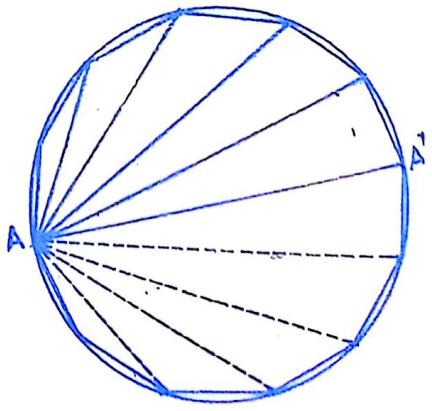


Fig. 10

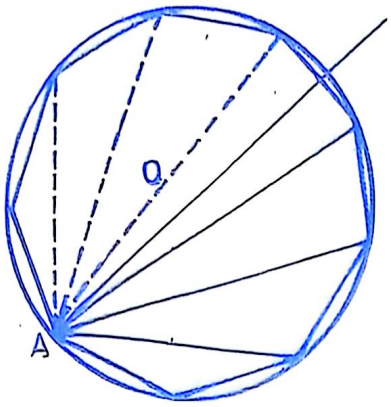


Fig. 11

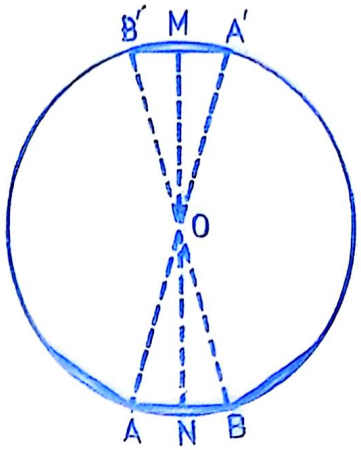


Fig. 12

Soluția II. Diagonalele care pornesc din două vîrfuri diferite sînt congruente două cîte două, deci este suficient să considerăm diagonalele care pornesc din același vîrf. În cazul dodecagonului (fig. 10), diametrul AA' este o axă de simetrie, de fiecare parte a lui se găsesc cîte 5 vîrfuri ($12 - 2 = 10$; $10 : 2 = 5$). Unind vîrful A cu aceste vîrfuri se obțin 5 coarde, din care una este o latură și numai 4 sînt diagonale. Adăugînd și diagonala, AA', rezultă că sînt 5 diagonale de lungimi diferite. În general, dacă n este un număr par, de fiecare parte a unui diametru se găsesc $\frac{n-2}{2}$ vîrfuri, care dau tot atîtea coarde. Se scade una care este o latură, în schimb se adaugă diametrul, deci numărul căutat este $\frac{n-2}{2}$. Dacă n este impar (fig. 11), orice diametru care trece printr-un vîrf este mediatoarea unei laturi și este o axă de simetrie a poligonului. De fiecare parte a diametrului se găsesc $\frac{n-1}{2}$ vîrfuri. Unindu-le cu vîrful A, se obțin tot atîtea coarde, dintre care una este o latură. Rămîn $\frac{n-1}{2} - 1 = \frac{n-3}{2}$ diagonale.

7.15. Fie n numărul laturilor poligonului. a) Presupunem că n este un număr par (fig. 12). Fie AB o latură a poligonului și A' punctul diametral opus cu A. Diametrul AA' împarte cercul în două părți congruente și fiecare din ele este formată din $\frac{n}{2}$ părți ale cercului, deci A' este de asemenea un vîrf al poligonului. La fel se vede că și punctul B' diametral opus cu B este un vîrf. Pe arcul $A'B'$ nu mai există nici un vîrf al poligonului, căci, dacă ar exista un vîrf M, punctul N diametral opus cu el ar fi de asemenea un vîrf și ar cădea între A și B; atunci A și B n-ar mai fi vîrfuri consecutive. Rezultă că $A'B'$ este de asemenea o latură a poligonului. Patrulaterul $ABA'B'$ este un dreptunghi, căci diagonalele sale sînt congruente și se împart în părți congruente, deci $A'B' \parallel AB$. Fiecare latură a poligonului este paralelă cu latura care are ca extremități vîrfurile diametral opuse. b) Considerăm cazul cînd n este impar. Dacă poligonul ar avea două laturi paralele, AB și $A'B'$ (fig. 12), arcul AB' ar fi congruent cu arcul BA'. Dacă unul din aceste arce ar fi format din p părți ale cercului, aceste două arce ar conține $2p$ părți ale cercului, adică un număr par de părți. Adăugînd arcele AB și $A'B'$, s-ar obține tot un număr par de părți, deci numărul părților în care este împărțit cercul ar fi par — ceea ce este în contradicție cu faptul că n este impar. Deci, dacă n este impar, poligonul nu are laturi paralele.

Observare. De aici rezultă că, dacă un poligon regulat are două laturi paralele, toate laturile lui sînt paralele două cîte două. În adevăr, dacă poligonul ar avea un număr impar de laturi, conform părții b), nu ar avea laturi paralele; deci numărul laturilor sale este par. Atunci din partea a) rezultă că...

7.16. Fie $ABCDE...$ un poligon regulat înscris în cerc și $A'B'C'D'E'...$ imaginea lui printr-o rotație în jurul centrului său cu un unghi congruent cu jumătatea unghiului AOB. Se compară arcele AA', $A'B$, BB', $B'C$ ș.a.m.d. Se obține un poligon regulat cu un număr dublu de laturi.

7.17. Rotația transformă AB în BC, BC în CD ș.a.m.d., deci $AB \equiv BC$, $BC \equiv CD$ ș.a.m.d. Aceeași rotație transformă unghiul A în unghiul B, unghiul B în unghiul C ș.a.m.d., deci $\hat{A} \equiv \hat{B}$, $\hat{B} \equiv \hat{C}$ ș.a.m.d. Răspuns: da.

7.18. *Soluția I* (fig. 13). $\triangle A'BB' \equiv \triangle B'CC' \equiv \triangle C'DD'$ (LUL), deci $A'B' \equiv B'C' \equiv C'D'$. Apoi

$$\hat{B}' = 180° - (\hat{1} + \hat{2}) \text{ și}$$

$$\hat{C}' = 180° - (\hat{3} + \hat{4}).$$

Datorită congruenței triunghiurilor, $\hat{1} \equiv \hat{3}$ și $\hat{2} \equiv \hat{4}$, deci $\hat{B}' \equiv \hat{C}'$. La fel se arată că $D'E' \equiv C'D'$ și $\hat{D}' \equiv \hat{C}'$ ș.a.m.d.

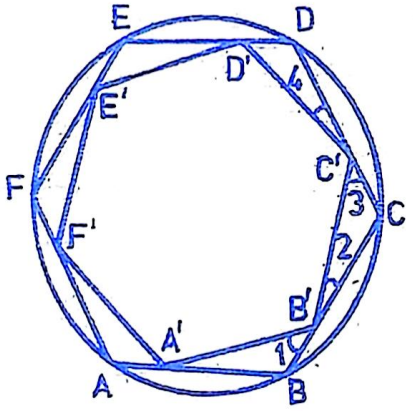


Fig. 13

Soluția II. Rotim figura în jurul centrului său cu 60°. Atunci A' trece în B', B' în C', ... F' în A', deci poligonul este regulat (v. probl. 7.18). În cazul unui poligon regulat cu n laturi, se face o rotație cu $\frac{360°}{n}$.

7.19. a) *Soluția I.* $\triangle MFA \equiv \triangle NAB \equiv \triangle PBC \equiv \triangle QCD \equiv ...$ (ULU), căci aceste triunghiuri au bazele și unghiurile de la bază congruente (40°), deci $AN \equiv NB \equiv BP \equiv PC \equiv CQ \equiv ...$ Apoi, $\triangle AMN \equiv \triangle BNP \equiv \triangle CPQ \equiv ...$ (LUL) deci $MN \equiv NP \equiv PQ \equiv QR$.

Laturile hexagonului sînt congruente. Apoi se calculează unghiurile marcate cu cîte un arc, suma lor se scade din 360 și se obține $\widehat{MNP} = 120°$; la fel se pot calcula celelalte unghiuri ale hexagonului $MNPQRS$, ele sînt congruente. În cazul pentagonului, punctele A, N și P, B, P și Q etc. sînt coliniare, căci $\widehat{ANB} + \widehat{BNP} = 180°$ ș.a.m.d.

Soluția II. Fie O centrul hexagonului; $\widehat{AOB} = 360° : 6 = 60°$. Rotim figura cu 60° în jurul punctului O. Atunci vîrful A trece în B, vîrful B în C ș.a.m.d. Deoarece $\hat{1} \equiv \hat{3}$, semidreapta AN devine BP; deoarece $\hat{2} \equiv \hat{4}$, semidreapta BN devine CP, deci punctul N trece în P. Tot așa se vede că punctul P trece în Q ș.a.m.d. Deci (v. probl. 7.17) hexagonul $MNPQRS$ este regulat. b) Același procedeu. La prima metodă trebuie calculat unghiul MNP (fig. 15). Fie u măsura unui unghi al poligonului inițial. Atunci

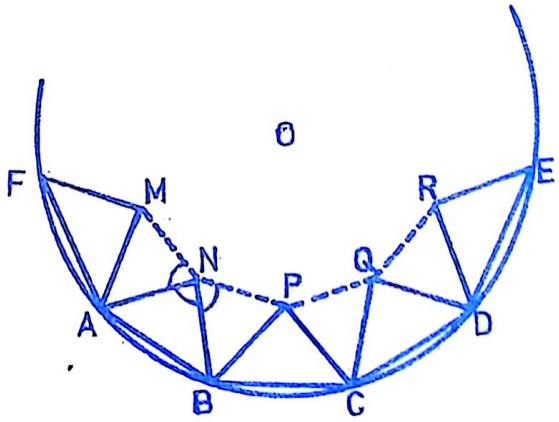


Fig. 15

$\widehat{MAN} = \frac{u}{3}$. Triunghiul isoscel AMN dă $\widehat{ANM} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{MAN}) =$

$$= \frac{1}{2}\left(180° - \frac{u}{3}\right).$$

Triunghiurile ANM și BPN fiind congruente, rezultă că $\widehat{BNP} \equiv \widehat{ANM}$. Unghiul ANB se află din triunghiul isoscel NAB:

$$\widehat{NAB} = \frac{u}{3}, \quad \widehat{ANB} = 180° - 2\widehat{NAB} =$$

$$= 180° - \frac{2u}{3}.$$

Suma acestor unghiuri este

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2}\left(180° - \frac{u}{3}\right) + 180° - \frac{2u}{3} =$$

$$= 360° - u.$$

Suma unghiurilor în jurul punctului N fiind de 360°, $\widehat{MNP} = 360° - S$, deci $\widehat{MNP} = 360° - (360° - u) = u$.

Observare. Soluția a doua este mai clară decît prima. În prima soluție, se examinează șiruri de triunghiuri și se afirmă că ceea ce este valabil pentru două din ele este valabil pentru alte perechi de triunghiuri analoage. În schimb, soluția a doua ne permite să cuprindem cu privirea toată figura. Avem aici încă un exemplu care arată superioritatea metodei de demonstrare pe baza transformărilor față de metoda triunghiurilor congruente (v. observația de la probl. 6.9.5 și 14.1.11). La aceasta se adaugă faptul că se folosește o proprietate caracteristică a poligonului regulat: el se transformă în el însuși printr-o rotație în jurul centrului său (v. probl. 7.17).

7.20. a) *Soluția I.* Analog cu problema precedentă.

Soluția II. Rotație cu $\frac{360°}{n}$ în jurul centrului. b) De asemenea. c) Dacă într-un poligon regulat se duc toate diagonalele congruente, punctele de intersecție a cîte două diagonale consecutive sînt vîrfurile unui poligon regulat.

7.21 (fig. 17). Fie P un punct din plan și u unghiul unui poligon regulat din cele cu care se face pavajul. În jurul punctului P se vor așeza mai multe poligoane și trebuie ca suma măsurilor unghiurilor lor să fie de 360°.

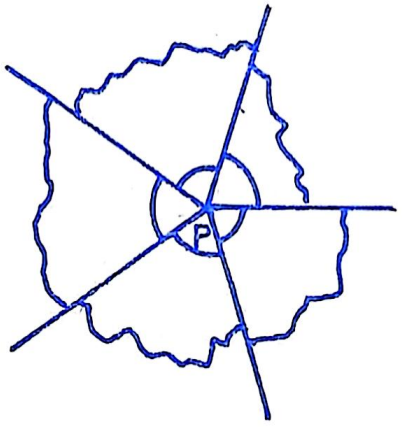


Fig. 17

Poligoanele fiind congruente, u trebuie să fie un divizor al lui 360. Tabelul de mai jos dă măsurile unghiurilor diferitelor poligoane regulate.

Nr. laturilor	3	4	5	6...
M. unghiului	60°	90°	108°	120°...

Numerele 60, 90 și 120 sînt divizori ai lui 360, deci cu triunghiuri, pătrate și hexagoane se pot face pavaje (fig. 18 și 19). Alte poligoane regulate care să îndeplinească condiția nu mai există. Căci, dacă un poligon are mai mult decît 6 laturi, unghiul lui are mai mult decît 120°. Dacă așezăm două

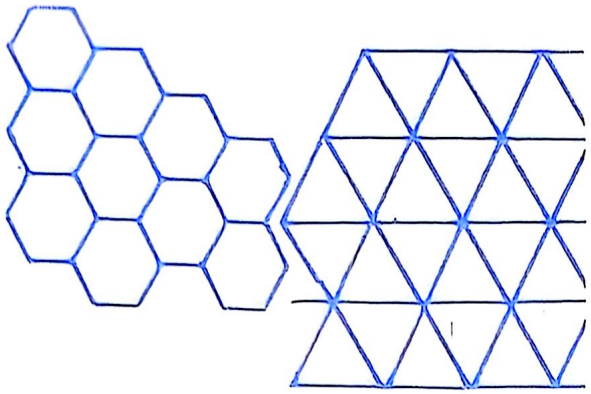


Fig. 18

Fig. 19

astfel de poligoane cu cîte un vîrf în punctul P și lipite unul de altul, partea care rămîne neacoperită are forma unui unghi mai mic decît 120°, așa că nu mai încape încă un poligon.

7.22. Cîte grade au unghiurile 1 și 2? unghiul 3? Partea haşurată este un pătrat.

Cap. 8

8.1.1. $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{3}$.

8.1.2. a) Segmentul se împarte în $(3 + 5 =)$ 8 părți congruente (fig. 2) și se ia $AM = 3$ părți, atunci $MB = 5$ părți. $\frac{MA}{AB} = \frac{3}{8}$; $\frac{MB}{AB} = \frac{5}{8}$.

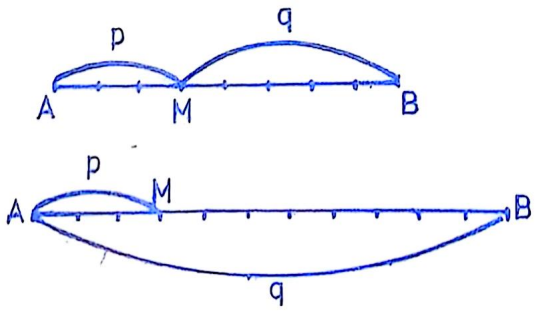


Fig. 2

b) $\frac{MA}{AB} = \frac{p}{p+q}$, $\frac{MB}{AB} = \frac{q}{p+q}$.

c) Segmentul se împarte în 11 părți și se ia $AB = 3$ părți, atunci $MB = 11 - 3 = 8$ părți. $\frac{MB}{AB} = \frac{8}{11}$, $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{8}$. d) $\frac{MB}{AB} = \frac{q-p}{q}$, $\frac{MA}{MB} = \frac{p}{q-p}$.

8.1.3. a) $\frac{3}{10}$. b) $\frac{10}{3}$.

c) $b = \frac{3}{10}$ din a. d) $a = \frac{10}{3}$ din b.

8.1.4. a) $\frac{a}{b} = \frac{5}{8}$. b) $b = \frac{8}{5}$ din a.

8.1.5. a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$, c) $\frac{AC}{BC} = \frac{1}{n-1}$.

8.1.6. a) $b = \frac{5a}{3} = 10$. b) $b = \frac{3a}{5} = 3{,}6$. c) $b = 6$.

8.1.7. a) Segmentul (fig. 3) se împarte în 8 $(= p + q)$ părticele congruente. Punctul trebuie luat astfel încît una dintre părțile în care împarte segmentul AB să fie formată din 3 $(= p)$ părți; atunci cealaltă va fi formată din 5 $(= q)$ părți. Există două puncte. b) Dacă $\frac{MA}{AB} = \frac{NB}{AB}$, $MA = NB$. c) Cînd $\frac{p}{q} = 1$ (mijlocul segmentului).

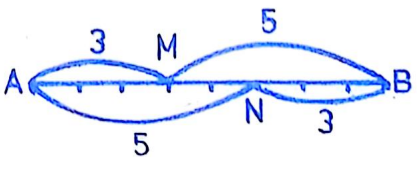


Fig. 3

8.1.8. b) Fie $AM = x$, $BM = y$. Condițiile sînt

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q}, \quad x + y = a.$$

Prima relație se pune sub forma

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q}$$

și se aplică proprietatea unui șir de rapoarte egale:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{x+y}{p+q};$$

$x + y$ se înlocuiește cu a:

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{a}{p+q}; \quad \frac{x}{p} = \frac{a}{p+q},$$

$$\frac{y}{q} = \frac{a}{p+q}$$

Din aceste proporții se scoate

$$x = \frac{pa}{p+q}, \quad y = \frac{qa}{p+q}.$$

Observări. 1) Dacă p și q sînt numere naturale, problema se poate rezolva în gînd. Luăm, de exemplu, $p = 5$, $q = 7$ (fig. 1). Trebuie să împărțim segmentul în $5 + 7 = 12$ părticele congruente; una dintre părți va fi formată din 5 părticele și cealaltă din 7. Lungimea unei părticele fiind $\frac{a}{12}$; lungimea unei părți va fi $\frac{a}{12} \cdot 5 = \frac{5a}{12}$ și a celeilalte $\frac{a}{12} \cdot 7 = \frac{7a}{12}$. În general, segmentul se împarte în $p + q$ părticele; lungimea fiecăreia este $\frac{a}{p+q}$; o parte este formată din p părticele, deci lungimea ei este $\frac{a}{p+q} \cdot p = \frac{ap}{p+q}$ și cealaltă parte este formată din q părticele, deci lungimea ei este $\frac{aq}{p+q}$.

2) Proporțiile:

$$\frac{x}{y} = \frac{p}{q} \text{ și } \frac{x}{p} = \frac{y}{q}$$

sînt echivalente. Proporția a doua arată că lungimile x și y sînt proporționale cu p și q. Deci, am rezolvat problema următoare: Să se împartă un segment de lungime a în părți proporționale cu numerele p și q.

8.1.9. b) Fie x, y, z, u,... lungimile părților. Condițiile sînt

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{u}{s} = \ldots;$$

$$x + y + z + u + \ldots = a.$$

Fiecare din aceste rapoarte este egal cu $\frac{x+y+z+u+\ldots}{p+q+r+s+\ldots}$.

Numărătorul acestui raport se înlocuiește cu a și se obține

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} = \frac{u}{s} = \ldots = \frac{a}{p+q+r+s+\ldots}$$

Din primul și ultimul raport se obține

$$x = \frac{ap}{p+q+r+\ldots};$$

din raportul al doilea și ultimul se obține

$$y = \frac{aq}{p+q+r+\ldots};$$

La fel se obține

$$z = \frac{ar}{p+q+r+\ldots};$$

$$u = \frac{as}{p+q+r+\ldots}; \ldots$$

Observare. Judecînd așa cum s-a arătat în prima observare de la problema precedentă aceste rezultate se obțin prin calcul mintal.

8.2.1. Liniile caietului formează un șir de paralele echidistante, iar marginea liniei gradate o transversală.

8.2.2. Se aplică reciproca teoremei lui Tales.

8.2.3. a) $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$. Dacă $AB = AC$, numitorii sînt egali, deci și numărătorii sînt egali, $AD = AE$. b) Se compară unghiul B cu D și C cu E. Dar $\hat{B} \equiv \hat{C}$, deci $\hat{D} \equiv \hat{E}$, deci...

8.2.4. a) $EC = 9{,}6$; $AC = 15{,}6$. b) $AB = 6{,}75$, $DB = 3{,}75$. c) $AB = 14{,}4$; $AD = 8{,}4$.

8.2.5. a) DB este triplul lui AD, deci EC va fi triplul lui AE; $EC = 21$. b) AE este dublul lui AD, deci EC va fi dublul lui DB; $EC = 18$. c) $AC = 3 \cdot AD = 6{,}3$. d) AD este jumătate din AE; $AB = 14$. e) EC este triplul lui DB, deci AC va fi triplul lui AB; $AC = 51$. f) EC este un sfert din AC; $EC = 9$.

8.2.6. $\frac{4}{14} = \frac{6}{21}$, deci $DE \parallel BC$.

8.2.7. Se aplică teorema lui Tales în triunghiul CAB și paralelei DF ($AC = 3 + 7 + 5 = 15$); $BF = 6$. Apoi în triunghiul CDF ($CD = 5 + 7 = 12$, $CF = 30 - 6 = 24$); $FG = 14$

8.2.8. a) Folosind faptul că $DE \parallel BC$ se află raportul $\frac{EA}{EC}$; apoi folosind faptul că $EF \parallel AB$ se află raportul $\frac{FC}{FB}\left(= \frac{7}{3}\right)$. $BF = 4{,}5$ cm, $FC = 10{,}5$ cm. b) Rapoartele sînt egale.

8.2.9. a) Se aplică teorema lui Tales în triunghiul $A'OB'$ și se află raportul $\frac{OB}{BB'}$; apoi, din triunghiul $OB'C'$ se află raportul $\frac{OC}{CC'} \cdot OC = 3{,}6$ cm. $CC' = 5{,}4$ cm (v. probl. 8.1.10). b) Din triunghiul $OA'B'$ se află $\frac{OB}{OB'}$ și se compară cu $\frac{OC}{OC'}$. Răspuns: da.

8.2.10. Se aplică teorema lui Tales în triunghiurile $OA'B'$, $OB'C'$, ș.a.m.d. Rapoartele sînt egale.

8.2.11 (fig. 10). După t minute, unul din punctele mobile ajunge în M și celălalt în N unde

$$OM = at,\ ON = bt.$$

După t' minute, $t' > t$, cele două puncte ajung în M' și N', unde $OM' = at'$, $ON' = bt'$. Atunci

$$\frac{OM}{OM'} = \frac{at}{at'} = \frac{t}{t'},\ \frac{ON}{ON'} = \frac{bt}{bt'} = \frac{t}{t'};$$

$$\text{deci } \frac{OM}{OM'} = \frac{ON}{ON'}.$$

Reciproca teoremei lui Tales arată că $M'N' \parallel MN$. După t'' minute, punctele ajung în M'' și N'', și se arată la fel că $M''N'' \parallel MN$ ș.a.m.d.

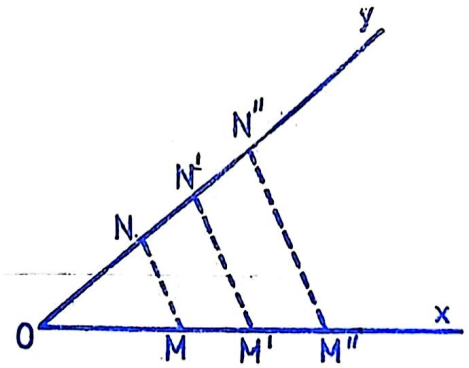
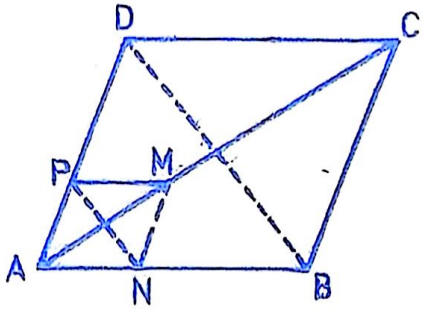


Fig. 10

8.2.12 (fig. 11). a) Teorema lui Tales aplicată în triunghiul ABC dă

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC};$$

Fig. 11



Aceeași teoremă, aplicată în triunghiul ADC, dă

$$\frac{AM}{AC} = \frac{AP}{AD}.$$

Aceste două proporții având un raport comun, rezultă că și celelalte rapoarte sînt egale,

$$\frac{AN}{AB} = \frac{AP}{AD}.$$

Reciproca teoremei lui Tales, aplicată în triunghiul ABD, arată că... . b) În cursul demonstrației nu s-a folosit nicăieri faptul că $ABCD$ este un paralelogram. Răspuns: da.

8.2.13. a) Teorema lui Tales aplicată pe rînd în triunghiurile ADC, DCB și CBA (fig. 12) dă:

$$\frac{DM}{DA} = \frac{DN}{DC}, \quad \frac{DN}{DC} = \frac{BP}{BC},$$

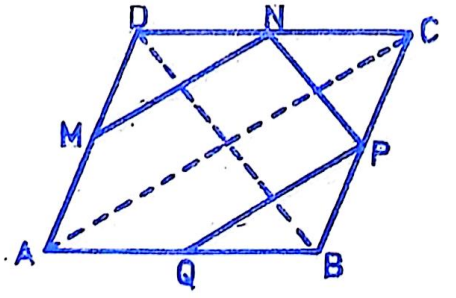
$$\frac{BP}{BC} = \frac{BQ}{BA}.$$

Rezultă că

$$\frac{DM}{DA} = \frac{BQ}{BA}.$$

Reciproca teoremei lui Tales aplicată în triunghiul ADB arată că $QM \parallel BD$.

Fig. 12



b) În raționamentele de mai sus nu a intervenit nicăieri faptul că $AB \parallel CD$ sau $AD \parallel BC$, deci răspunsul rămîne adevărat oricare ar fi patrulaterul $ABCD$.

8.3.1. a) Ca laturile lor să fie proporționale. b) Să aibă cîte un unghi congruent și laturile proporționale. c) Să aibă cîte un unghi congruent. d) Nici o condiție; oricare două pătrate sînt asemenea.

8.3.2. Laturile nu sînt proporționale, în raportul al doilea s-a inversat ordinea termenilor.

8.3.3. Se compară unghiurile celor două patrulatere. Răspuns: da.

8.3.4. Laturii AB a poligonului inițial îi corespunde tot latura AB a poligonului al doilea și raportul lor este 1. Laturii FE îi corespunde FM și raportul lor este $\frac{FM}{FE} \neq 1$, deci poligoanele nu sînt asemenea. Răspuns: nu.

8.3.5. *Soluția I.* Fie p și q perimetrele celor două poligoane; raportul lor este egal cu raportul de asemănare:

$$\frac{p}{q} = \frac{AM}{MB}.$$

Adăugînd numărătorii la numitori, se obține $\frac{p}{p+q} = \frac{AM}{AM + MB}$ sau, înlocuind $AM + MB$ prin AB și schimbînd mezii între ei,

$$(1) \qquad \frac{p}{AM} = \frac{p+q}{AB}.$$

Cînd punctul M se mută în M', se formează poligoanele punctate în figură; fie p' și q' perimetrele lor. Se obține la fel

$$(2) \qquad \frac{p'}{AM'} = \frac{p'+q'}{AB}.$$

Pe de altă parte, cele două poligoane din stînga sînt asemenea, deci

$$\frac{p}{p'} = \frac{AM}{AM'}$$

sau

$$\frac{p}{AM} = \frac{p'}{AM'}.$$

Această relaţie arată că partea stîngă din (1) este egală cu partea stîngă din (2), deci

$$\frac{p+q}{AB} = \frac{p'+q'}{AB}.$$

Numitorii fiind egali şi fracţiile fiind egale, $p + q = p' + q'$.

Soluţia II. Construim poligonul $AKLMB$ asemenea cu primele două; fie r perimetrul lui. Atunci

$$\frac{p}{r} = \frac{AM}{AB} \text{ şi } \frac{q}{r} = \frac{MB}{AB}.$$

Adunînd aceste relaţii, se obţine

$$\frac{p+q}{r} = \frac{AM+MB}{AB} = \frac{AB}{AB} = 1,$$

deci $p + q = r$. Aceasta înseamnă că, oricare ar fi poziţia punctului M, suma perimetrelor poligoanelor $ABCDM$ şi $MEFGB$ este aceeaşi, r.

Observări. 1) Dacă se scot segmentele AM şi MB, rămîne linia frîntă $ACDEMFGHB$, formată din două părţi asemenea, $ACDEM$ şi $MFGHB$. Cînd punctul M descrie segmentul AB, lungimea acestei linii frînte rămîne constantă.

2) Figura 15 este doar un exemplu. Cele ce preced sînt adevărate oricare ar fi poligoanele.

8.3.6. *Soluţia I.* Piesa are forma de hexagon, în care toate unghiurile sînt drepte, numai unghiul D are 270°. Pentru ca unghiurile poligonului rămas să fie congruente cu unghiurile poligonului dat, tăieturile trebuie să fie paralele cu marginile piesei. Facem o primă tăietură uu' paralelă cu AB şi luăm ca necunoscută x distanţa dintre aceste drepte. Prin aceasta, dimensiunea verticală s-a redus cu x. Deoarece ea trebuie să fie egală cu dimensiunea orizontală, trebuie să facem şi o tăietură vv' paralelă cu AF, distanţa dintre aceste drepte fiind de asemenea egală cu x. Piesa rămasă nu este asemenea cu cea dată, căci laturile AB şi AF au fost reduse, dar laturile DC şi DE au rămas neschimbate. Trebuie să facem alte două tăieturi rr' şi ss' unde $CC' = EE' = y$, y fiind necunoscut. Poligonul rămas este cel haşurat, $A'B'C'DE'F'$. Punem condiţia ca laturile celor două poligoane să fie proporţionale:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{C'D}{CD} = k,$$

$$\frac{b-x}{b} = \frac{a-b-y}{a-b} = k,$$

de unde

$$x = b(1-k), \quad y = (a-b)(1-k).$$

Verificare: Laturile piesei reduse sînt:

$$A'B' = GH = AB - AG - HB =$$

$$= a - x - y, \; B'C' = C'H - B'H =$$

$$= b - x.$$

Înlocuind aici x şi y prin valorile găsite, se obţine $A'B' = ak$, $B'C' = bk$, ceea ce înseamnă că $A'B'$ şi $B'C'$ sînt proporţionale cu a şi b.

Pentru $k = \frac{1}{2}$, se obţine $x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{a-b}{2}$. Rezultatul este evident. În adevăr, lăţimea BC trebuie redusă la jumătate, deci $x = \frac{b}{2}$. Latura DC trebuie de asemenea redusă la jumătate; dar $DC = a - b$, deci $y = \frac{a-b}{2}$.

Soluția II. Piesa se poate obține scoțind din pătratul $ABKF$ (fig. 17) cu latura a pătratul $DCKE$ cu latura $a - b$. Pentru a obține o piesă asemenea cu ea, raportul de asemănare fiind k, trebuie să pornim de la un pătrat $A'B'K'F'$ cu latura ka și să scoatem un pătrat $D'C'K'E'$ cu latura $k(a - b)$. Calculăm diferențele dintre dimensiunile celor două piese:

$$x = BC - B'C' = b - kb = b(1 - k),$$

$$y = DC - D'C' = (a - b) - k(a-b) =$$

$$= (a - b)(1 - k).$$

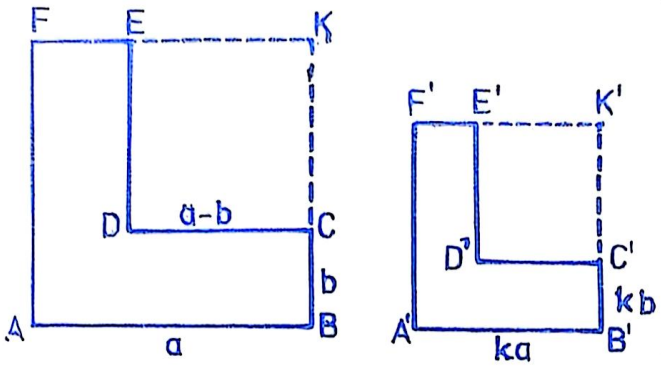


Fig. 17

8.3.7. a) Imposibil, căci toate laturile trebuie micșorate, dar latura CD nu poate fi micșorată. b) Imposibil, căci laturile KJ și DE nu pot fi micșorate.

8.3.8. Piesa are forma de octogon în care toate unghiurile sînt drepte afară de unghiurile D și G, care au cîte 270°. Pentru ca unghiurile poligonului obținut să fie congruente cu unghiurile poligonului dat, trebuie ca tăieturile să fie paralele cu marginile piesei. Facem o tăietură mm' paralelă cu AB și luăm ca necunoscută x distanța dintre aceste drepte.

$$x = AK,\ 0 < x < b.$$

Deoarece dimensiunea verticală a piesei s-a micșorat, trebuie să micșorăm și dimensiunea orizontală și, pentru ca piesa obținută să aibă axa de simetrie uu', ca și cea dată, trebuie să facem tăieturile nn' și pp'. Notăm cu y distanța dintre dreptele AH și nn' ca și distanța dintre pp' și BC. Această distanță trebuie să fie mai mică decît HG, care este egal cu DC; $GD = FE = b$, $HC = a$, deci $HG = \frac{a-b}{2}$. Așadar

$$y = HG = DC,\ 0 < y < \frac{a-b}{2}.$$

Dacă se cunosc valorile lui x și y problema este rezolvată. În adevăr, pentru ca dreptunghiul vertical să aibă aceeași lățime cu cel orizontal, trebuie s-o reducem tot cu x, deci să facem tăieturile qq' și rr' astfel ca distanța dintre dreptele GF și qq', ca și distanța dintre rr' și DE, să fie egală cu $\frac{x}{2}$,

$$GG' = D'D = \frac{x}{2}.$$

În sfîrșit, pentru ca dimensiunea verticală a piesei să fie egală cu cea orizontală, trebuie să facem o tăietură ss'. Deoarece dimensiunea orizontală s-a redus cu $2y$, cea verticală trebuie redusă tot cu $2y$; dar ea este redusă sus cu x, deci distanța dintre dreptele ss' și FE trebuie să fie

$$FF'' = EE'' = 2y - x.$$

Scriem că laturile dreptunghiului $A'B'C'H'$ sînt proporționale cu laturile dreptunghiului $ABCH$:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'H'}{AH} = k.$$

Avem:

$$A'B' = H'C' = HC - HH' - CC' =$$

$$= a - 2y,$$

$$A'H' = KH = AH - AK = b - x.$$

Cu aceste înlocuiri, relația de mai sus devine

$$\frac{a - 2y}{a} = \frac{b - x}{b} = k.$$

Rezolvînd aceste ecuații se obține

$$x = b(1 - k),\ y = \frac{a}{2}(1 - k).$$

Nu este necesar să punem condiția ca și celelalte laturi să fie proporționale; acest lucru rezultă din felul în care se fac celelalte tăieturi. Verificare:

$$H'G' = D'C' = HG + GG' - HH' =$$

$$= \frac{a-b}{2} + \frac{x}{2} - y = k\frac{a-b}{2} = kHG;$$

$$G'F' = D'E' = GF - F'F'' = a - b -$$

$$- (2y - x) = k(a - b) = kDE;$$

$$F'E' = FE - 2GG' = b - 2\frac{x}{2} =$$

$$= b - b(1 - k) = kb = kFE.$$

Lucrarea este posibilă numai dacă $y < DC$, adică

$$\frac{a}{2}(1 - k) < \frac{a-b}{2}.$$

Rezolvînd inecuația, se obține

$$k > \frac{b}{a}.$$

Acest rezultat are următoarea semnificație. Piesa nu poate fi redusă oricît de mult dorim. Putem reduce după voie toate laturile ei, afară de HG și DC, aceste laturi nu pot fi scurtate cu mai mult decît lungimile lor, de aceea numărul k nu poate fi oricît de mic vrem. Calculul precizează acest lucru: raportul k trebuie să fie mai mare decît $\frac{b}{a}$.

Legătura cu problema 8.3.6 se face observînd că partea situată la dreapta axei de simetrie, $MBCDEN$, are cam aceeași formă ca piesa din problema precedentă, deci se poate proceda ca acolo.

Lucrarea cere 8 tăieturi. Se obține o altă soluție deplasînd partea haşurată spre stînga cu $\frac{x}{2}$, ca dreapta $G'F'$ să coincidă cu GF. Tăieturile orizontale mm' și ss' rămîn aceleași, distanța dintre tăietura pp' și dreapta BC crește cu $\frac{x}{2}$, deci devine $y + \frac{x}{2} = \frac{a+b}{2}(1 - k)$, distanța dintre tăietura nn' și dreapta AH devine $y - \frac{x}{2} = \frac{a-b}{2}(1 - k)$ și distanța dintre tăietura rr' și dreapta DE devine $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x = b(1 - k)$; tăieturile qq' și GG' nu se mai fac.

8.4.1. Da.

8.4.2. a) Este suficient să aibă un unghi congruent, acel unghi fiind în ambele triunghiuri un unghi de la bază sau în ambele triunghiuri unghiul de la vîrf. b) Este suficient să aibă un unghi ascuțit congruent. c) Toate sînt asemenea. d) De asemenea.

8.4.3. a) Se aplică teorema fundamentală a asemănării în triunghiul ADE (fig. 21), în care $BC \parallel DE$. Răspuns: da. b) $\hat{D} \equiv \hat{B}$ și $\hat{E} \equiv \hat{C}$ (fig. 22), ca alterne interne, deci triunghiurile sînt asemenea.

Observare. Pe baza acestor rezultate, teorema fundamentală a asemănării se poate enunța astfel: O paralelă la o latură a unui triunghi formează cu celelalte laturi ale triunghiului sau cu prelungirile lor un triunghi asemenea cu primul.

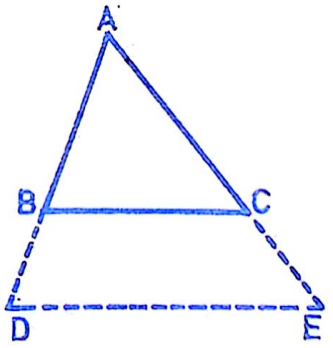


Fig. 21

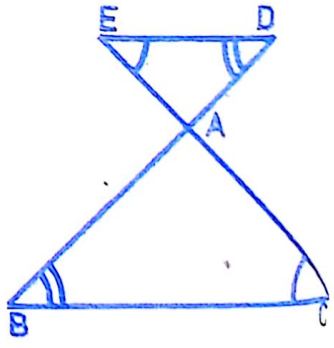


Fig. 22

8.4.4 (fig. 23). Conform ipotezei $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$. Se poartă pe AB un segment AM congruent cu $A'B'$ și prin M se duce paralela la BC. Atunci $\triangle AMN \sim \triangle ABC$. Rezultă că $\frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB}$; înlocuind AM cu $A'B'$, se obține $\frac{MN}{BC} = \frac{A'B'}{AB}$. Comparînd această proporție cu prima, se deduce că $\frac{MN}{BC} = \frac{B'C'}{BC}$, deci $MN \equiv B'C'$. Acum $\triangle AMN \equiv \triangle A'B'C'$ (IC). deci...

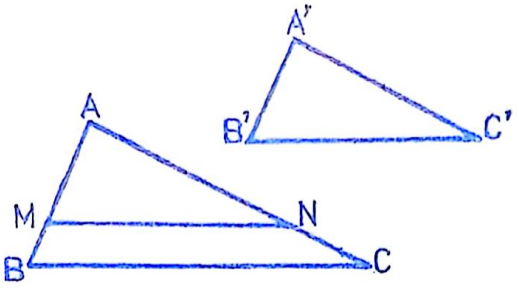


Fig. 23

8.4.5. $\frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB}$. Prin ipoteză, $AD < AB$, deci fracția a doua este subunitară, deci prima fracție este de asemenea subunitară, deci...

8.4.6 (fig. 24). Fie N' intersecția dreptelor MN și AC. Triunghiurile asemenea AMN' și ABC dau $\frac{MN'}{BC} = \frac{AM}{AB}$. Comparînd cu proporția dată, rezultă că $MN' = MN$, deci N' coincide cu N. Rezultă că $N \in AC$.

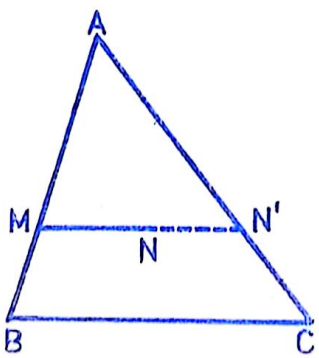


Fig. 24

8.4.7. Se calculează și celălalt unghi ascuțit. Răspuns: da.

8.4.8. MN poate fi paralel cu BC, dar este posibilă și situația din figura 25 în care $\hat{M} \equiv \hat{C}$. Răspuns: nu.

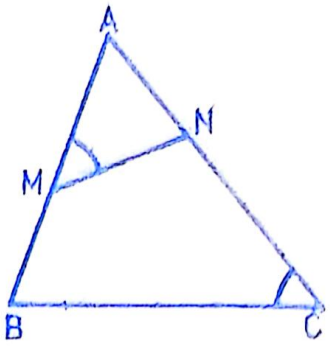


Fig. 25

8.4.9. $\triangle OAB \sim \triangle ODC$. a) $CD = 4{,}8$; $OD = 5{,}6$; b) $AB = 8{,}75$; $OD = 5\frac{5}{7}$.

8.4.10. $\triangle OAB \sim \triangle OCD$, căci unghiurile lor sînt congruente două cîte două. Se scrie că laturile sînt proporționale. $OD = 3$ cm.

8.4.11. a) Fie $ABCD$ trapezul, $AB \parallel CD$ și O intersecția diagonalelor AC și BD. $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ (v. probl. 8.4.3); deci $\frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{CD}{AB}$. b) Dacă $OC \equiv OA$ și $OB \equiv OD$, primele două rapoarte sînt egale cu 1, deci $\frac{CD}{AB} = 1$, $CD = AB$. Trapezul devine paralelogram.

8.4.12 (fig. 27). Fie M și N pozițiile punctelor mobile după t secunde, $AM = at$ și $BN = bt$. $\triangle MAC \sim \triangle NBC$, deci $\frac{AM}{BN} = \frac{CA}{CB}$. Înlocuind aici AM și BN prin valorile lor și simplificînd cu t, se obține

$$\frac{a}{b} = \frac{CA}{CB}.$$

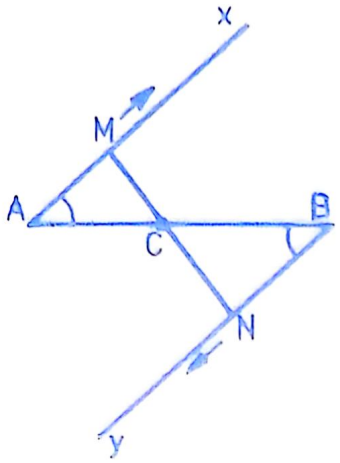


Fig. 27

Vitezele a și b trebuie să fie proporționale cu segmentele CA și CB. (Dacă punctul C este mai aproape de A, punctul M trebuie să meargă mai încet și N mai repede.) Dacă C este mijlocul segmentului AB, $\frac{CA}{CB} = 1$, deci $a = b$, cele două puncte trebuie să meargă cu aceeași viteză (v. probl. 5.2.43.)

8.4.13 (fig. 28). Fie ABC un triunghi oarecare și AD, BE două înălțimi. $\triangle EBC \sim \triangle DAC$, căci aceste triunghiuri sînt dreptunghice și au unghiul C comun. Rezultă că $\frac{AD}{BE} = \frac{AC}{BC}$.

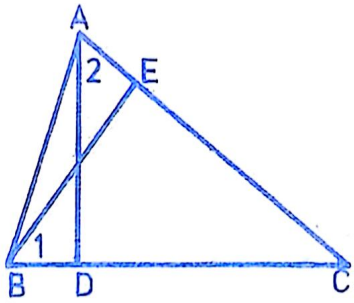


Fig. 28

8.4.14. $\triangle ABC \sim \triangle BDA$. Se scrie că laturile sînt proporționale.

8.4.15 (fig. 30). $\triangle ABD \sim \triangle BDC$, căci $\hat{1} \equiv \hat{2}$ și $\hat{3} \equiv \hat{4}$. Se scrie că laturile sînt proporționale.

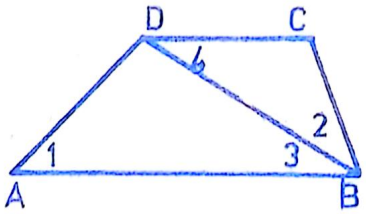


Fig. 30

8.4.16. Se compară unghiul 1 cu unghiul 2. $\triangle ABC \sim \triangle BCD$. Se scrie că laturile sînt proporționale.

8.4.17. a) $\triangle OBA \sim \triangle OAC$. Se scrie că laturile sînt proporționale. b) Da.

8.4.18 (fig. 33). $\triangle CEB \sim \triangle BDA$ (unghiurile ECB și DBA au același complement, E); $BE = \frac{b^2}{a}$. În cazul pătratului $b = a$, deci $BE = \frac{a^2}{a} = a$. Rezultatul este valabil, căci punctul E coincide cu A, deci $BE = BA = a$.

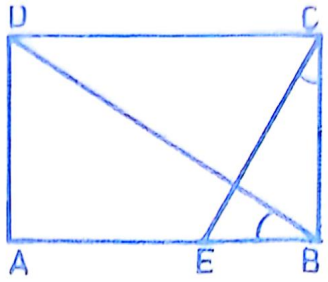


Fig. 33

8.4.19 (fig. 34). Ce fel de triunghi este TAC? $\hat{B} = \hat{1}\left(= \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}\right)$, deci $\triangle TAC \sim \triangle ABC$. Se scrie că laturile sînt proporționale.

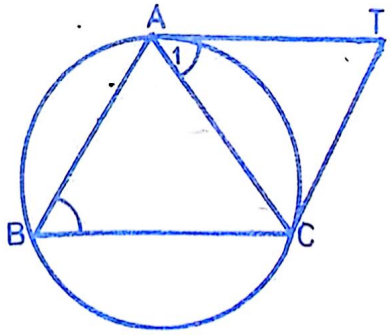


Fig. 34

8.4.20. a) Fie AD și $A'D'$ două înălțimi omoloage (fig. 35). $\triangle ABD \sim \triangle A'B'D'$, căci $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $\hat{D} \equiv \hat{D}'$, deci $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}$. b) Dacă AD și $A'D'$ sînt bisectoare, aceleași triunghiuri sînt asemenea, căci $\hat{B} \equiv \hat{B}'$ și $\hat{1} \equiv \hat{2}$,

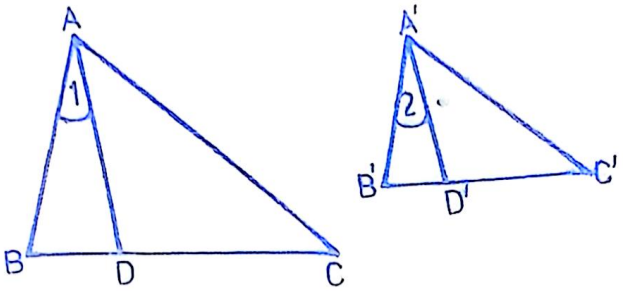


Fig. 35

deci $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}$. c) Dacă AD și $A'D'$ sînt mediane, $BD = \frac{BC}{2}$ și $B'D' = \frac{B'C'}{2}$, deci $\frac{BD}{B'D'} = \frac{BC}{B'C'}$. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ fiind asemenea, $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$. Ținînd seama de ultima proporție, se deduce că $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BD}{B'D'}$. Triunghiurile ABD și $A'B'D'$ sînt asemenea căci au două laturi proporționale și unghiul format de ele congruent, deci $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'}$.

8.4.21. Fie ABC și $A'B'C'$ cele două triunghiuri (fig. 36). Deoarece $\hat{A} \equiv \hat{A}'$, $\widehat{BC} \equiv \widehat{B'C'}$, deci $BC \equiv B'C'$. Triunghiurile sînt congruente (ULU).

Observare. Triunghiurile fiind asemenea, au aceeași formă; fiind înscrise în același cerc, au și „aceeași mărime", deci sînt congruente. În general, două poligoane asemenea înscrise în același cerc sînt congruente.

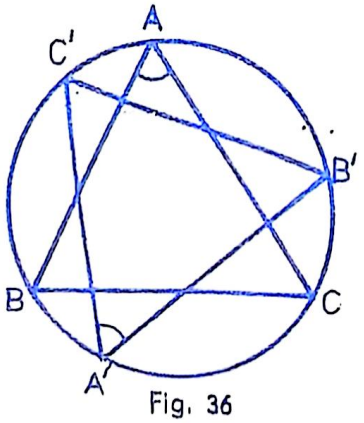


Fig. 36

8.4.22 (fig. 37). $\triangle OMN \sim \triangle OAB$, deci $\frac{MN}{AB} = \frac{ON}{OB}$;

$\triangle ONP \sim \triangle OBC$, deci $\frac{ON}{OB} = \frac{NP}{BC}$.

Din aceste două proporții rezultă proporția cerută.

Observare. Propoziția demonstrată se poate enunța astfel: Trei drepte concurente determină pe două drepte paralele segmente proporționale.

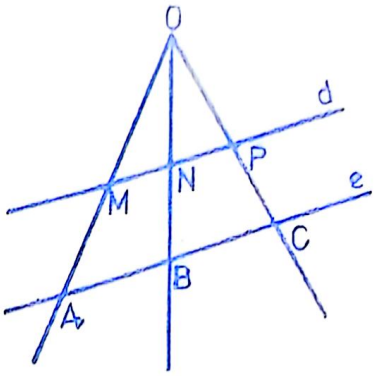


Fig. 37

8.4.23. Este un caz particular al problemei precedente. S-a obținut proporția

$$\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC}.$$

Dacă $AB \equiv BC$, numitorii sînt egali, deci numărătorii sînt de asemenea egali, $MN \equiv NP$.

Observare. Dacă ducem mai multe paralele la baza AC, mijloacele lor se înșiră pe mediana OB (fig. 38).

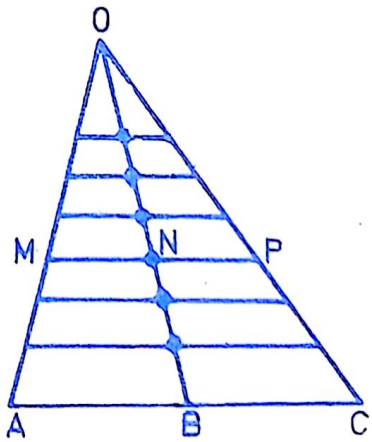


Fig. 38

8.4.24. Din triunghiul dreptunghic ABM rezultă că $\hat{1} + \hat{2} = 90°$, iar din triunghiul dreptunghic ABP rezultă că $\hat{P} + \hat{2} = 90°$, deci $\hat{1} \equiv \hat{P}$. Triunghiurile ABN și ABP fiind dreptunghice și având un unghi ascuțit congruent, sînt asemenea. Se scrie că laturile lor sînt proporționale.

8.4.25. Centrul cercului se unește cu punctele N și P. Din patrulaterul $ABPN$ rezultă că $\widehat{ANP} + \widehat{BPN} = 180°$, NO și PO sînt bisectoarele acestor unghiuri, deci unghiurile 1 și 2 sînt jumătățile acestor unghiuri, deci $\hat{1} + \hat{2} = 90°$. Pe de altă parte, din triunghiul OAN se vede că $\hat{1} + \hat{3} = 90°$; rezultă că $\hat{2} \equiv \hat{3}$. $\triangle OAN \sim \triangle PBO$, căci $\hat{2} \equiv \hat{3}$ și $\hat{A} \equiv \hat{B}$. Se scrie că laturile lor sînt proporționale.

8.4.26. a) $\triangle AMN \sim \triangle ADC$ (fig. 41), deci

$$\frac{MN}{DC} = \frac{AM}{AD}.$$

Teorema lui Tales, aplicată în triunghiul DAB, dă

$$\frac{AM}{AD} = \frac{BP}{BD}.$$

$\triangle BPQ \sim \triangle BDC$, deci

$$\frac{BP}{BD} = \frac{PQ}{DC}.$$

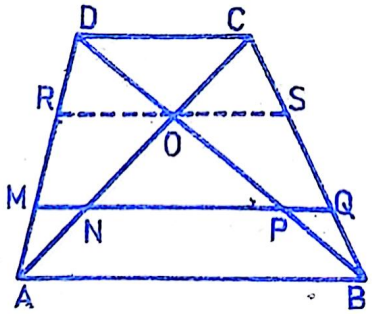


Fig. 41

Din aceste trei proporții rezultă că

$$\frac{MN}{DC} = \frac{PQ}{DC}.$$

Aceste două fracții sînt egale și au același numitor, deci... b) În acest caz, în locul segmentelor MN și PQ apar segmentele RO și OS, deci $RO \equiv OS$.

8.4.27. Demonstrația se poate repeta cuvînt cu cuvînt. Este firesc să fie așa, căci și paralelogramul are două laturi paralele, iar în demonstrație nu intervine faptul că celelalte laturi sînt paralele sau nu.

8.4.28 (fig. 42). Fie O intersecția diagonalelor. $\triangle DMO \sim \triangle DAB$, deci

$$(1) \qquad \frac{MO}{AB} = \frac{DO}{DB}.$$

$\triangle DOC \sim \triangle BOA$, deci $\frac{DO}{OB} = \frac{DC}{AB}$.

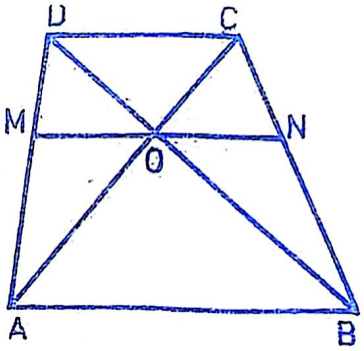


Fig. 42

Adăugînd numărătorii la numitori se obține

$$(2) \qquad \frac{DO}{DB} = \frac{DC}{DC + AB} = \frac{b}{a + b}.$$

Înlocuind în (1) raportul al doilea prin expresia sa dată de (2) și AB prin a, se obține

$$\frac{MO}{a} = \frac{b}{a + b}; \quad MO = \frac{ab}{a + b}.$$

La fel se obține pentru ON aceeași expresie; $MN = MO + ON = ...$

Observare. Dacă notăm MN cu x, relația dintre x, a și b se poate pune sub forma

$$\frac{1}{x} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2}$$

care arată că inversul lui x este media aritmetică a inverselor numerelor a și b. Numărul x se numește *media armonică* a numerelor a și b. Relația stabilită aici dă un mijloc de a afla pe cale grafică media armonică a două numere a și b: se construiește un trapez cu bazele de lungime a și b, și prin intersecția diagonalelor sale se duce paralela la baze. Segmentul MN al acestei paralele situat în interiorul trapezului are ca lungime numărul căutat. Figura arată că media armonică a două numere este cuprinsă între ele, $x > b$ și $x < a$.

8.4.29 (fig. 41). Se folosesc triunghiurile asemenea ADC și AMN, unde $\frac{AM}{AD} = \frac{p}{p+q}$; $MN = \frac{bp}{p+q}$. Triunghiurile asemenea BDC și BPQ dau $PQ = \frac{bp}{p+q}$ (se ține seamă că $\frac{QB}{QC} = \frac{p}{q}$). Triunghiurile asemenea DAB și DMP dau $MP = \frac{aq}{p+q}$; $NP = MP - MN = \frac{aq-bp}{p+q}$. În sfîrșit,

$$MQ = MP + PQ = \frac{aq+bp}{p+q}.$$

Observări. 1) Dacă $p > q$, se poate ca ordinea punctelor N și P să fie inversă, punctul P să fie între M și N, atunci

$$NP = MN - MP = \frac{bp-aq}{p+q}.$$

2) Din calcul a rezultat că $MN = PQ$ (v. probl. 8.4.28).

3) Toate calculele rămîn valabile dacă $ABCD$ este un paralelogram: se înlocuiește peste tot b cu a.

4) În toate calculele, lungimile laturilor neparalele nu intervin. Aceasta înseamnă că, dacă segmentul AB alunecă pe dreapta AB și segmentul CD alunecă pe dreapta CD, rezultatele rămîn valabile.

8.4.30. a) Relația dată se poate pune sub forma $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{AB}$. Înlocuind aici AC prin BM și AB prin BN se obține o proporție care arată că triunghiurile au două laturi proporționale. Deoarece unghiul B este comun, rezultă că... b) Două laturi și toate unghiurile, deci cinci elemente. Acesta este numărul maxim de elemente congruente pe care le pot avea două triunghiuri necongruente; dacă au șase elemente congruente, triunghiurile sînt congruente.

8.4.31. a) Luăm ca necunoscută și notăm cu x lungimea segmentului AM, $AM = x$ (fig. 43). $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, deci

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC};$$

$$\frac{x}{c} = \frac{MN}{a} = \frac{AN}{b}.$$

Exprimăm MN și AN în funcție de x:

$$MN = \frac{ax}{c}, \quad AN = \frac{bx}{c},$$

deci

$$NC = b - \frac{bx}{c}$$

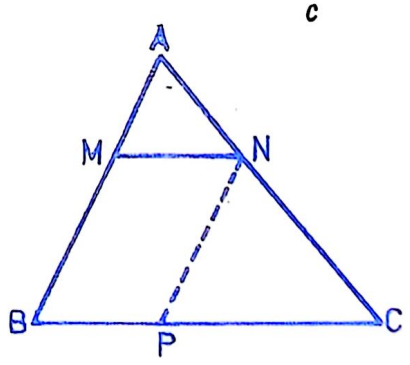


Fig. 43

Ecuația problemei este

$$a + (c - x) + \frac{ax}{c} + \left(b - \frac{bx}{c}\right) = p$$

și dă

$$x = \frac{c(a + b + c - p)}{b + c - a}.$$

b) Condiția ca valoarea găsită pentru x să fie o soluție a problemei este: $x \geqslant 0$ și $x \leqslant c$. Numitorul fracției este sigur pozitiv, căci în orice triunghi, $b + c > a$. Factorul c este de asemenea pozitiv. Deci condiția este $a + b + c - p \geqslant 0$, adică

$$p \leqslant a + b + c.$$

Condiția $x \leqslant c$ este

$$\frac{c(a + b + c - p)}{b + c - a} \leqslant c.$$

Eliminînd numitorul și simplificînd cu c, se obține $p \geqslant 2a$.

Observare. Amîndouă rezultatele au o semnificație geometrică, deci se puteau prevedea. Triunghiul și trapezul au în comun partea $MBCN$. Triunghiul are în plus linia frîntă MAN și trapezul segmentul MN. $MN < MA + MN$, deci trapezul are un perimetru mai mic decît triunghiul, deci în general trebuie să aibă loc relația $p < a + b + c$. Numai în cazul extrem cînd $x = c$, trapezul devine triunghiul ABC și $p = a + b + c$. Pe de altă parte $BM + MN + NC > BC = a$, deci perimetrul trapezului este mai mare decît $2a$, deci trapezul există numai dacă $p > 2a$. Numai în cazul extrem cînd $x = c$, trapezul se reduce la cele două baze și $p = 2a$, deci $p \geqslant 2a$.

8.4.32. Segmentul MN este comun triunghiului și trapezului, deci condiția este: $AM + AN = MB + BC + CN$. Punem $AM = x$. Ca în problema 8.4.31 se obține $AN = \frac{bx}{c}$, deci $MB = c - x$, $NC = b - \frac{bx}{c}$. Ecuația problemei este

$$x + \frac{bx}{c} = (c - x) + a + \left(b - \frac{bx}{c}\right).$$

Soluția este

$$x = \frac{c(a + b + c)}{2(b + c)}.$$

Dacă $a = b = c$, se obține $x = \frac{3a}{4}$ (fig. 44). Atunci $AM = AN = \frac{3a}{4}$, deci $AM + AN = \frac{3a}{2}$. Pe de altă parte $MB + BC + CN = \frac{a}{4} + a + \frac{a}{4} = \frac{3a}{2}$.

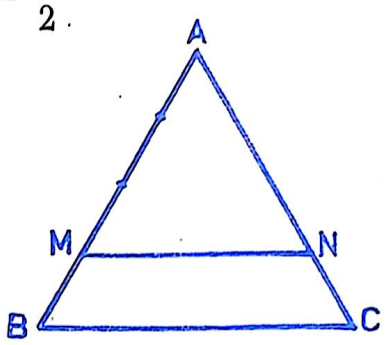


Fig. 44

8.4.33. Punem $DM = x$ (fig. 45). Pentru a calcula segmentul MN, ducem CQ paralel cu DA. Atunci

$$CP = x, \quad CQ = d, \quad AQ = b \text{ și}$$

$$QB = a - b.$$

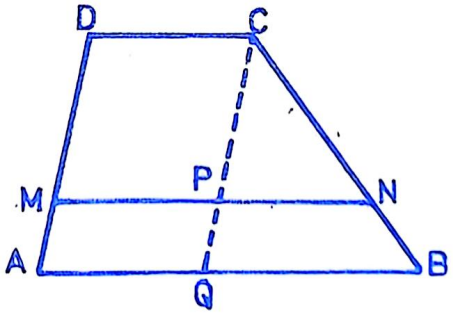


Fig. 45

$\triangle CPN \sim \triangle CQB$, deci $\frac{CP}{CQ} = \frac{PN}{QB}$;

$\frac{x}{d} = \frac{PN}{a-b}$; $PN = \frac{x(a-b)}{d}$;

$MN = MP + PN = b + \frac{x(a-b)}{d}$.

Ecuația este

$b + \frac{x(a-b)}{d} = s$; $x = \frac{d(s-b)}{a-b}$.

b) Condiția ca valoarea aflată pentru x să fie o soluție a problemei este $x \geqslant 0$ și $x \leqslant d$. Deoarece $a > b$, numitorul este pozitiv, d este de asemenea pozitiv, deci condiția $x \geqslant 0$ dă $s - b \geqslant 0$, adică $s \geqslant b$.

Condiția $x \leqslant d$ este

$$\frac{d(s-b)}{a-b} \leqslant d \text{ și dă } s \leqslant a.$$

Așadar s trebuie să fie cuprins între b și a — ceea ce este evident: $MN \geqslant CD$ și $MN \leqslant AB$. Numai în cazurile extreme, cînd $x = 0$ sau $x = d$, MN coincide cu CD sau AB.

8.4.34 (fig. 46). Fie AB linia funicularului și C cabana. Trebuie aflată lungimea segmentului EC.

$BD = 1\,250 - 890 = 360$ m,

$AB = 600$ m, $CB = 200$ m,

deci $AC = 400$ m.

$\triangle CAE \sim \triangle BAD$, deci $\frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB}$;

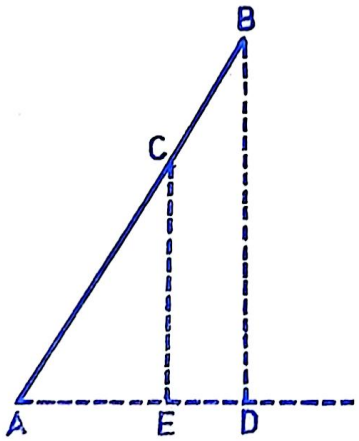


Fig. 46

$\frac{CE}{360} = \frac{400}{600}$; $CE = 240$ m.

Cabana se găsește la $890 + 240 = 1\,130$ m deasupra nivelului mării.

8.4.35. *Soluția I.* $CE = x$. $\triangle DCE \sim \triangle BAE$; $\frac{x}{10+x} = \frac{1,5}{8}$; $x = 2,30$ m.

Soluția II. Se duce DF paralel cu AE și se folosesc triunghiurile asemenea DCE și BFD.

8.4.36 (fig. 48). Fie AB clădirea, CD gardul și EF omul. Se duce FG paralel cu AE și se folosesc triunghiurile asemenea FHD și FGB. $CD = 1,60 + 1,80 = 3,40$ m.

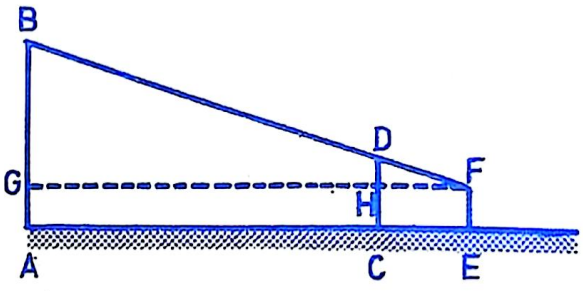


Fig. 48

8.5.1. Triunghiurile sînt de același fel.

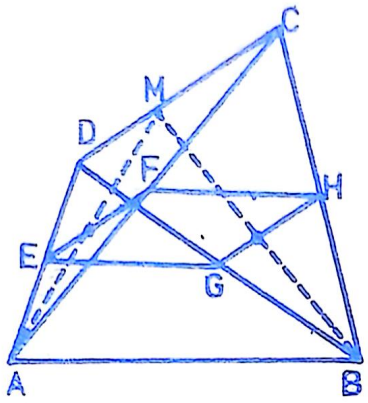
8.5.2. a) $DE = 2,5$; $EF = 4$; $FD = 5$. b) $DF = 6$; $AB = 10$; $BC = 14$. c) 13.

8.5.3. Fie FE linia mijlocie, $E \in AC$. $BC = 2 \cdot 5 = 10$ cm. $AC = 30 - (9 + 10) = 11$ cm.

8.5.4. Se află rapoartele $\frac{EA}{EC}$ și $\frac{FA}{FB}$. Ce linie importantă a triunghiului ABC este Fx? Răspuns: da.

8.5.5 (fig. 50). Fie E și F mijloacele segmentelor AD și AC; mijlocul segmentului AM descrie segmentul EF, care este linie mijlocie în triunghiul ACD. Fie G și H mijloacele segmentelor BD și BC; mijlocul segmentului BM descrie segmentul GH. Tot așa, mijlocul segmentului CN descrie segmentul FH și mijlocul segmentului DN descrie segmentul EG. Ca linii mijlocii, $EF \| DC$ și $GH \| DC$, deci $EF \| GH$; tot așa, $EG \| FH$; $EFGH$ este un paralelogram. Cînd $DC \| AB$, punctele E, F, G și H sînt coliniare, paralelogramul $EFGH$ se reduce la linia mijlocie a trapezului $ABCD$.

Fig. 50



8.5.6 (fig. 51). Se aplică teorema cu privire la diametrul perpendicular pe o coardă; E și F sînt mijloacele laturilor AB și BC, deci $EF = \frac{AC}{2}$ ș.a.m.d. Perimetrul patrulaterului $EFGH$ este egal cu suma diagonalelor patrulaterului $ABCD$.

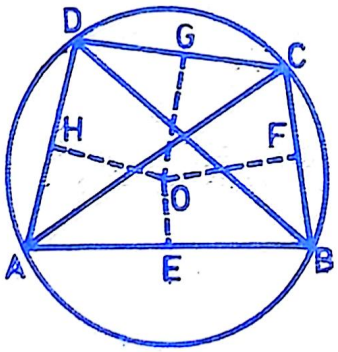
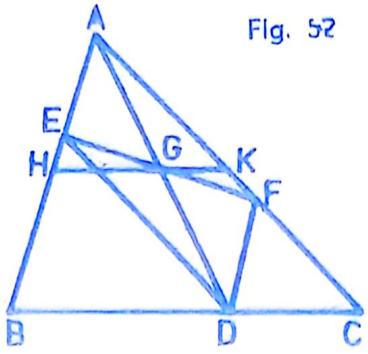


Fig. 51

8.5.7 (fig. 52). Ce fel de patrulater este $AEDF$? Fie $AD \cap EF = G$; punctul G este mijlocul segmentului AD.

Fig. 52



Dreapta HK fiind linie mijlocie în triunghiul ABC, $HK \| BC$. Dreapta HK trecînd prin mijlocul H al laturii AB și fiind paralelă cu BC, este linie mijlocie și în triunghiul ABD, deci trece prin mijlocul laturii AD, adică prin punctul G.

8.5.8 (fig. 53). Ce linie importantă în triunghiul MAB este PQ? $PQ = \frac{BC}{2}$ oricare ar fi poziția punctului M. Lungimea segmentului BC nu depinde de poziția punctului M, deci lungimea segmentului PQ rămîne aceeași oricare ar fi poziția punctului M. Nu există minim. În figura 53, toate segmentele notate cu PQ sînt congruente.

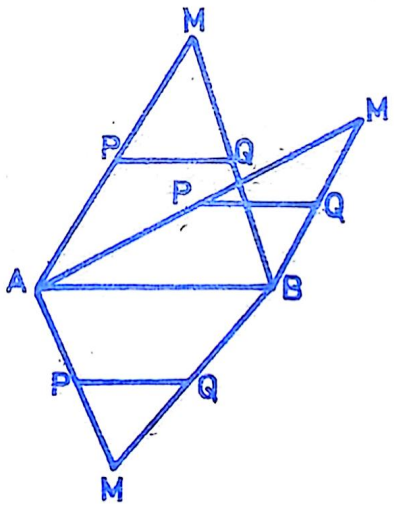


Fig. 53

8.5.9. a) Fie ABC un triunghi dreptunghic (fig. 54) și AD o mediană. Ducem DE paralel cu BA. Atunci $DE \perp AC$ și, DE fiind linie mijlocie, $EA \equiv EC$. Acum $\triangle DEA \equiv \triangle DEC$ (LUL), deci $AD \equiv DC$. b) Acum nu

știm dacă triunghiul ABC este dreptunghic, în schimb știm că $AD \equiv DC$. Fie E mijlocul laturii AC. Atunci, triunghiul ADC fiind isoscel, mediana DE este și înălțime, $DE \perp AC$. Totodată DE este linie mijlocie, deci $DE \parallel AB$. Rezultă că $BA \perp AC$. (v. probl. 5.3.17 și 6.5.12.)

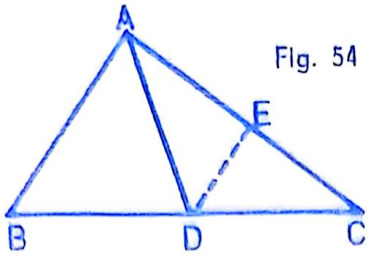


Fig. 54

8.5.10 (fig. 55). Dacă M, N și P sînt mijloacele laturilor, ele îndeplinesc condiția din problemă, căci MN este linie mijlocie, deci $MN \parallel BC$ ș.a.m.d. Dar trebuie văzut dacă nu există și un alt triunghi care îndeplinește condiția.

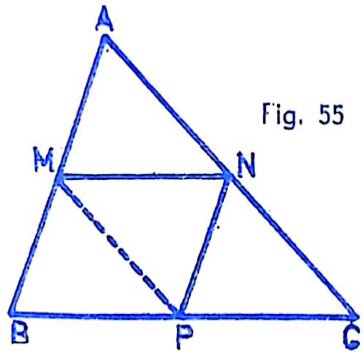


Fig. 55

Fie M un punct oarecare al laturii AB. Ducem MN paralel cu BC și NP paralel cu AB. Atunci $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, deci

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}.$$

Dacă $MP \parallel AC$, rezultă din teorema lui Tales că

$$\frac{MB}{AB} = \frac{BP}{BC}.$$

Dar $BP \equiv MN$ (paralele între paralele), deci raportul al doilea este același în ambele proporții, deci și primele rapoarte sînt egale, deci

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MB}{AB},$$

deci $AM = MB$. Aceasta înseamnă că M este mijlocul lui AB. Atunci MN este linie mijlocie, deci N este mijlocul lui AC și se vede la fel că P este mijlocul lui BC. Așadar, triunghiul MNP unde M, N, P sînt mijloacele laturilor triunghiului ABC este singurul triunghi care îndeplinește condiția din problemă.

8.5.11. (fig. 56). Se duce o diagonală a patrulaterului, de exemplu AC. Ce linie importantă în triunghiul CAB este EF? Deci $EF \parallel AC$ și $EF = \frac{AC}{2}$. La fel se arată că $HG \parallel AC$ și $HG = \frac{AC}{2}$. Rezultă că $HG \parallel EF$ și $HG \equiv EF$, deci

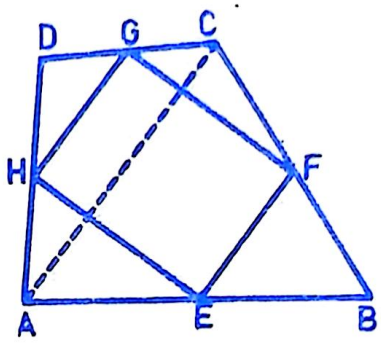


Fig. 56

8.5.12. *Soluția I* (fig. 57). Fie $EF \cap AD = M$. $FE \parallel BC$ și F este mijlocul laturii AB, deci FM este linie mijlocie în triunghiul ABD, deci $FM = \frac{BD}{2}$. La fel se arată că $ME = \frac{DC}{2}$. Dar $BD \equiv DC$, deci $FM \equiv ME$; DM este mediană în triunghiul DEF.

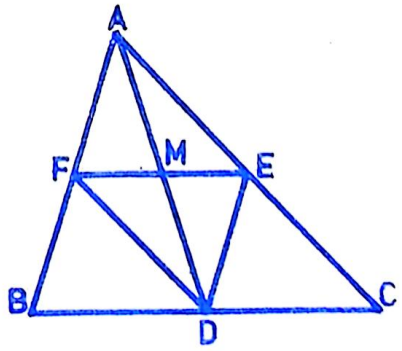
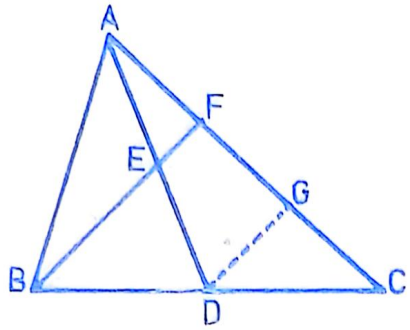


Fig. 57

Soluția II. Ce poziție are dreapta DE față de AB? dreapta DF față de AC? Ce fel de patrulater este $DEAF$? Diagonalele sale se împart în părți congruente, deci $FM \equiv ME$.

8.5.13 (fig. 58). Ce rol joacă linia EF în triunghiul ADG? $AF \equiv FG$. Ce rol joacă DG în triunghiul BFC? $FG \equiv GC$.

Fig. 58



8.6.1. a) Fie $MN \cap DB = P$ (fig. 59). În triunghiul DAB, MP este linie mijlocie, căci $MA \equiv MD$ și $MP \parallel AB$, deci punctul P este mijlocul laturii DB. În triunghiul BDC, PN este linie mijlocie, căci $PB \equiv PD$ și $PN \parallel DC$, deci... Altfel: teorema cu privire la un șir de drepte paralele tăiate de două secante dă $\frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC}$. Dar $\frac{AM}{MD} = 1$, deci $\frac{BN}{NC} = 1$, $BN \equiv NC$.

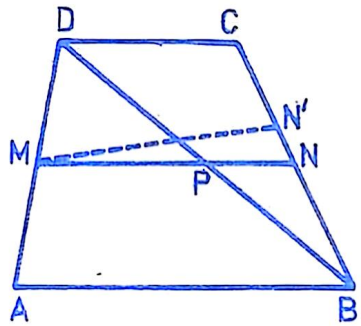


Fig. 59

b) Presupunem contrariul, adică MN nu este paralel cu AB. Atunci paralela la AB dusă prin punctul M (punctată) este deosebită de MN, deci taie latura BC într-un punct N' deosebit de N. Conform propoziției precedente, N' este mijlocul laturii CD. Ar însemna că există două puncte, N și N' care împart latura BC în părți congruente, ceea ce este imposibil. Deci, $MN \parallel AB$.

c) $MN = MP + PN$. Din triunghiul ABD se scoate $MP = \frac{AB}{2}$, și din triunghiul BCD, $PN = \frac{CD}{2}$. Rezultă că

$$MN = \frac{AB}{2} + \frac{CD}{2} = \frac{AB + CD}{2}.$$

Observări. 1) Ultimul rezultat se reține ușor dacă se fac considerațiile următoare (fig. 59). Când punctul M este aproape de A, segmentul MN diferă puțin de baza mare AB și mult de baza mică CD; când punctul M este aproape de vîrful D, situația este inversă. Când punctul M este mijlocul segmentului AD, diferența dintre baza mare și MN este egală cu diferența dintre MN și baza mică; MN este media bazelor.

2) Faptul că $MN = \frac{AB + CD}{2}$ se poate ilustra astfel: Construim (fig. 60) alături de trapezul dat $ABCD$ un trapez $BEFC$ congruent cu el și notăm cu P intersecția dreptei MN cu latura

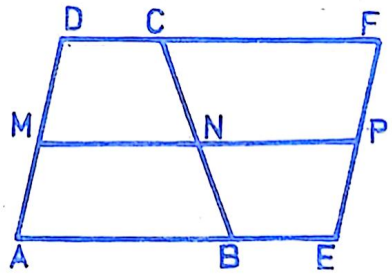


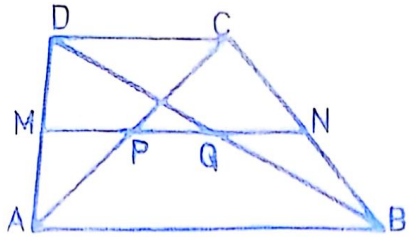
Fig. 60

EF. Atunci NP este linie mijlocie în trapezul al doilea. Trapezele fiind congruente, $NP \equiv MN$, deci $MN = \frac{MP}{2}$.

Din paralelogramul $AEFD$ rezultă că $MP = AE = AB + BE$ și $BE \equiv DC$, deci...

8.6.2 (fig. 61). Din triunghiul DAB se scoate $MQ = \frac{AB}{2}$ și din triunghiul ACD, $MP = \frac{CD}{2} \cdot PQ = MQ - MP = \frac{AB - CD}{2}$.

Fig. 61

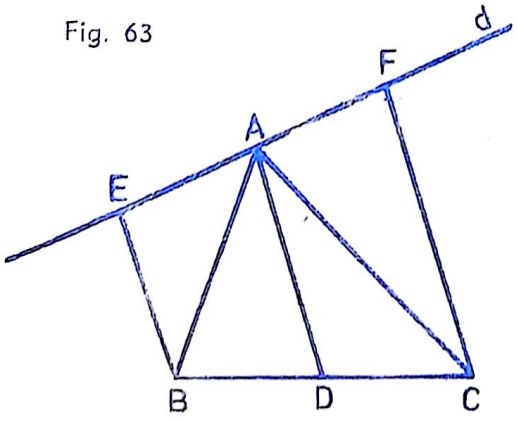


8.6.3. FK este linie mijlocie în trapezul $ABCD$, EH este linie mijlocie în trapezul $ABKF$ și GL în trapezul $FKCD$. $FK = \frac{a+b}{2} = 22$ cm, $EH = \frac{3a+b}{4} = 25$ cm, $GL = \frac{a+3b}{4} = 19$ cm. c) Se adună expresiile aflate pentru EH și GL. Altfel: FK este linie mijlocie în trapezul $ABCD$ și în trapezul $EHLG$, deci $FK = \frac{AB+CD}{2}$ și $FK = \frac{EH+GL}{2}$, deci...

8.6.4. Da. Demonstrația de la trapez se poate repeta cuvînt cu cuvînt, dar se poate face și pe baza proprietăților paralelogramului, fără a folosi asemănarea.

8.6.5 (fig. 63). Ce fel de patrulater este $BCFE$? DA este linie mijlocie, deci $BE + FC = 2AD$ și cînd d se rotește, AD nu se schimbă.

Fig. 63



8.6.6. (fig. 64). Se duce prin M paralela la bazele trapezului; fie N intersecția ei cu latura AD. MN este mediatoarea laturii AD.

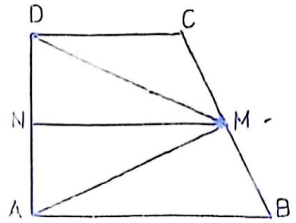


Fig. 64

8.6.7 (fig. 65). Fie AB pîrghia balanței și O punctul ei de sprijin. $ACDB$ este un trapez și MO este linia sa mijlocie, deci $OM = \frac{AC+BD}{2}$. Cînd pîrghia se rotește în jurul punctului O, segmentul OM rămîne neschimbat, deci și suma $AC + BD$ rămîne neschimbată, de asemenea și suma $CS + DT$, care se obține scăzînd segmentele constante AS și BT. Așadar, suma înălțimilor rămîne constantă; nu există nici maxim, nici minim.

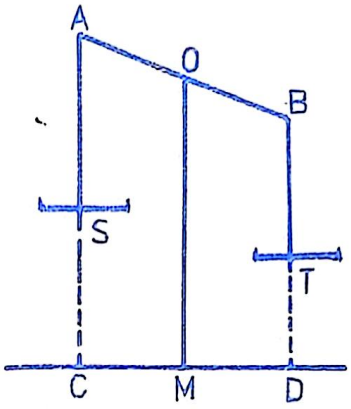


Fig. 65

8.6.8. Ce fel de patrulater este $ABN'M'$? Se compară PM' cu PA și QN' cu QB. $PQ \parallel AB$.

8.6.9. Ce fel de patrulater este $AECD$ (fig. 67)? Fie $AC \cap DE = F$. Se compară segmentul DF cu FE. Pe de altă parte, M este mijlocul laturii AD și $MN \parallel DC$, deci MN este linie mijlocie în triunghiul ACD, deci MN trece prin punctul F.

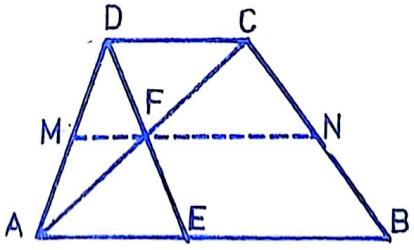


Fig. 67

8.6.10 (fig. 68). Ce linie importantă este MO în trapezul $AEFD$? Rezultă că $OE \equiv OF$. Segmentele MN și EF sînt diagonalele patrulaterului $MENF$ și ele se împart în părți congruente, deci $MENF$ este un paralelogram.

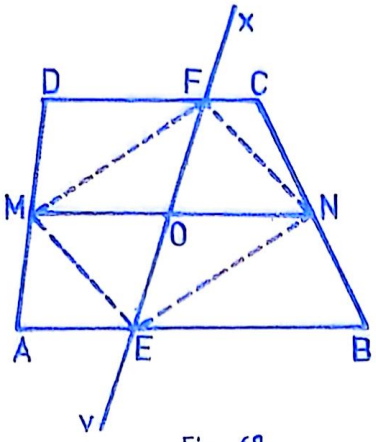


Fig. 68

8.7.1. *Soluția I.* Se aplică reciproca teoremei lui Tales în triunghiul CAB și dreptei GD; $GD \parallel AB$. Fie $GD \cap KF = L$. În triunghiul AKF, G este mijlocul laturii AF și $GL \parallel AK$, deci punctul L este mijlocul laturii KF. La fel se arată că HE trece prin mijlocul segmentului KF.

Soluția II. Reciproca teoremei lui Tales aplicată dreptei KD arată că $KD \parallel AC$, deci $\triangle BDK \sim \triangle BCA$, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{3}$, deci $KD = \frac{AC}{3} = GF$. Patrulaterul $KDFG$, avînd două laturi (KD și GF) paralele și congruente, este paralelogram, deci diagonala GD trece prin mijlocul L al diagonalei KF. La fel se arată că $EFHK$ este un paralelogram, deci și diagonala HE trece prin mijlocul L al diagonalei KF.

8.7.2. *Soluția I* (fig. 70). O fiind centrul cercului mare, unghiul TMO este înscris într-un semicerc, deci $OM \perp TM$, diametrul care trece prin M este perpendicular pe coarda TN, deci...

Soluția II. Fie O' centrul cercului mic. Unghiul $MO'O$ este dublul unghiului T, ca unghi exterior al triunghiului isoscel $MO'N$, de asemenea și unghiul NOA (A fiind celălalt capăt al diametrului care trece prin T), deci $O'M \parallel ON$, $O'M$ este linie mijlocie în triunghiul $MO'N$, deci...

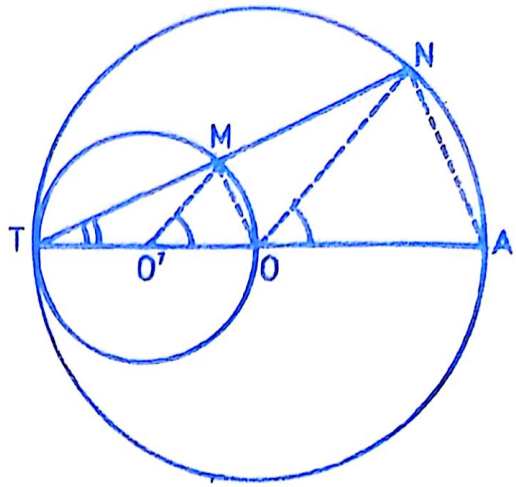


Fig. 70

8.7.3. *Soluția I.* Dînd punctelor M și N diferite poziții astfel ca lungimea liniei frînte $MABN$ (lungimea firului) să nu se schimbe, se vede că mijlocul P al segmentului MN rămîne fix. Demonstrație: $MABN$ este un trapez; fie O mijlocul laturii AB. OP este linia mijlocie a trapezului, deci

$$OP = \frac{MA + MB}{2}.$$

Lungimea liniei frînte $MABN$ și AB fiind constantă, suma $MA + MB$ este constantă, deci și lungimea OP este constantă. Punctul O fiind fix, punctul P este de asemenea fix.

Soluția II. Presupunem că la început firul are poziția $M'ABN'$ în care dreapta $M'N'$ este orizontală. Cînd punctul M' urcă pînă în M, punctul N' coboară pînă în N, dar $M'M = N'N$ și $M'M \parallel N'N$, deci $MM'NN'$ este un paralelogram, deci diagonala MN trece mereu prin mijlocul diagonalei $M'N'$, care este fix.

8.7.4. a) Fie $ABCD$ trapezul. $\triangle OAB \sim \triangle OCD$ (v. probl. 8.4.3), deci

$$(*) \qquad \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB} = \frac{DC}{AB}.$$

b) În această demonstrație s-a folosit numai faptul că $CD \parallel AB$, laturile AD și BC pot fi paralele sau nu, deci relațiile (*) rămîn adevărate și atunci cînd $ABCD$ este un paralelogram. Dar atunci $DC \equiv AB$, deci $\frac{DC}{AB} = 1$. Rezultă că $\frac{OC}{OA} = 1$ și $\frac{OD}{OB} = 1$, adică $OC \equiv OA$ și $OD \equiv OB$. Teorema cu privire la diagonalele paralelogramului este un caz particular al propoziției de la primul punct.

8.7.5. a) Unghiul MON fiind drept, suma unghiurilor formate în jurul punctului O arată că unghiul 2 este complementul unghiului 1; triunghiul MAO fiind dreptunghic, unghiul M este de asemenea complementul unghiului 1. Rezultă că $\hat{2} \equiv \hat{M}$. Triunghiurile dreptunghice AOM și BNO avînd un unghi ascuțit congruent, sînt asemenea, deci

$$\frac{OA}{BN} = \frac{AM}{OB};$$

$$(1) \qquad AM \cdot BN = OA \cdot OB.$$

Cînd unghiul uOv se rotește, segmentele OA și OB rămîn aceleași, deci produsul lor rămîne constant, deci...
b) Segmentul MN este minim cînd unghiul uOv ocupă poziția indicată în figură prin linii punctate, cînd $MN \parallel AB$, deci $AM \equiv BN$. Înlocuind în (1) BN cu AM, se obține

$$(2) \qquad OA \cdot OB = AM^2.$$

Reciproc, din relațiile (1) și (2) se deduce că $AM \cdot BN = AM^2$, deci $BN \equiv AM$, deci $MN \parallel AB$. Așadar, poziția unghiului trebuie să fie astfel încît să aibă loc relația (2), adică AM să fie medie proporțională între OA și OB.

8.7.6. Dacă se consideră numai partea din figură situată de aceeași parte a dreptei EF, apare situația din problema 8.7.5.

8.7.7. a) Triunghiurile asemenea DAB și DMO (fig. 73) dau

$$(1) \qquad \frac{MO}{AB} = \frac{DO}{DB}$$

și triunghiurile asemenea CAB și CON dau

$$(2) \qquad \frac{ON}{AB} = \frac{CO}{CA}.$$

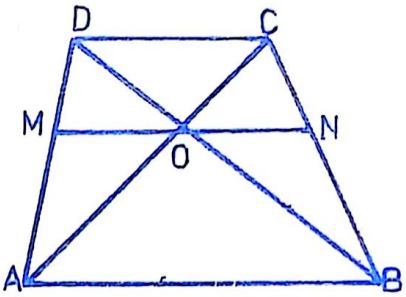


Fig. 73

Dacă $ABCD$ este un trapez, triunghiurile DOC și AOB sînt asemenea, căci unghiurile lor sînt congruente două cîte două (v. probl. 8.4.3), deci

$$\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA}.$$

Adăugînd numărătorii la numitori, se obține

$$\frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA}.$$

Această proporție arată că raportul al doilea din (1) este egal cu raportul al doilea din (2), deci

$$\frac{MO}{AB} = \frac{ON}{AB}.$$

Numitorii acestor fracții fiind egali, rezultă că...,
b) Presupunem că $OM \equiv ON$ și trebuie să decidem dacă $AB \parallel CD$. Proporțiile (1) și (2) sînt valabile în orice patrulater, în deducerea lor latura DC nu intervine. Dacă $MO \equiv ON$, primul

raport din (1) este egal cu primul raport din (2), deci $\frac{DO}{DB} = \frac{CO}{CA}$.

Soăzînd numărătorii din numitori, se obține

$$\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA}.$$

Această proporție arată că triunghiurile DOC și AOB au două laturi proporționale; unghiurile lor din O fiind congruente, triunghiurile sînt asemenea. Rezultă că $\widehat{DCA} \equiv \widehat{CAB}$, deci $DC \parallel AB$, patrulaterul $ABCD$ este trapez.

Observare. Prima parte a problemei se putea rezolva și astfel. Din triunghiurile asemenea DAB și DMO, CAB și CON se scoate

$$(3) \quad \frac{DM}{DA} = \frac{MO}{AB}, \quad \frac{CN}{CB} = \frac{ON}{AB}.$$

Teorema cu privire la un șir de drepte paralele tăiate de două secante arată că

$$\frac{DM}{DA} = \frac{CN}{CB},$$

deci primele rapoarte din proporțiile (3) sînt egale, deci $\frac{MO}{AB} = \frac{ON}{AB}$, deci $MO \equiv ON$ (v. și probl. 8.4.26). Această demonstrație este mai scurtă decît cea de mai sus, căci nu trebuie demonstrat că triunghiurile OAB și OCD sînt asemenea. Totuși, am preferat calea cealaltă, căci în felul acesta aceleași proporții se pot folosi și la partea a doua a problemei.

8.7.8. a) Fie ABC un triunghi oarecare și BE, CF două mediane (fig. 74). FE este o linie mijlocie a triunghiului, deci $FE \parallel BC$ și $FE = \frac{BC}{2}$. $\triangle GFE \sim$ $\sim \triangle GCB$, căci $FE \parallel BC$ (v. probl. 8.4.3). Raportul de asemănare este

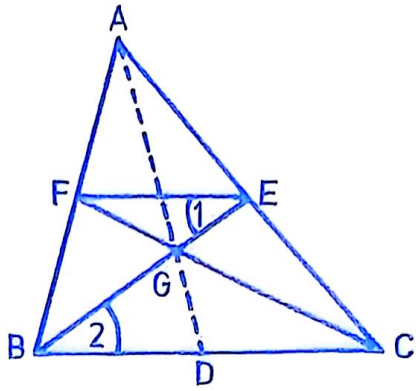


Fig. 74

$\frac{FE}{BC}$. Dar FE este jumătate din BC, deci raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$. Rezultă că

$$\frac{GF}{GC} = \frac{1}{2}, \quad \frac{GE}{GB} = \frac{1}{2}.$$

Aceasta înseamnă că medianele se împart în raportul $\frac{1}{2}$ (GF este $\frac{1}{3}$ și GC este $\frac{2}{3}$ din mediana CF ș.a.m.d.).

b) Considerăm la început o singură mediană, de exemplu CF, o împărțim în trei părți congruente și notăm cu G punctul de diviziune mai apropiat de F. S-a demonstrat că mediana BE trece prin punctul G. Fie AD mediana a treia. Se demonstrează ca mai sus că medianele CF și AD se împart în raportul $\frac{1}{2}$, deci și mediana AD trece prin punctul G. Punctul G prin care trec cele trei mediane se numește *centrul de greutate al triunghiului*.

8.7.9. Din $\frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC}$ rezultă că $\triangle EFG \sim \triangle BCG$, deci $\hat{1} \equiv \hat{2}$, deci $EF \parallel BC$. La fel, $FD \parallel CA$ și $DE \parallel AB$. Acum aplicăm de trei ori teorema lui Tales:

$$EF \parallel CB, \text{ deci } \frac{AE}{EC} = \frac{AF}{FB};$$

$FD \parallel AC$, deci $\frac{AF}{FB} = \frac{DC}{DB}$,

$DE \parallel BA$, deci $\frac{DC}{DB} = \frac{EC}{EA}$.

Din aceste proporţii rezultă că $\frac{AE}{EC} = \frac{EC}{AE}$, deci $AE^2 = EC^2$, $AE = EC$, BE este mediană. Apoi, deoarece punctul E este mijlocul laturii AC şi $EF \parallel CB$, F este mijlocul laturii AB, deci CF este mediană şi, la fel, AD este mediană.

Observări. 1) Se poate pune problema următoare. Într-un triunghi ABC să se ducă trei linii concurente AD, BE şi CF care să se împartă în acelaşi raport k, adică, G fiind punctul lor comun, să aibă loc relaţiile

$$\frac{GD}{GA} = \frac{GE}{GB} = \frac{GF}{GC} = k.$$

Rezultă că problema are o soluţie numai dacă $k = \frac{1}{2}$ şi, în acest caz, dreptele sînt mediane. Faptul de a fi concurente şi de a se împărţi în acelaşi raport este caracteristic pentru mediane.

2) Se poate demonstra că, dacă două linii ca BE şi CF (fig. 74) se împart în acelaşi raport $\frac{1}{2}$, ele sînt mediane (demonstraţia se face folosind triunghiurile asemenea GEF şi GBC). Propoziţia de mai sus, împreună cu aceasta, pune medianele unui triunghi într-o lumină deosebită. Dacă duci două linii BE şi CF care se împart în acelaşi raport, dar raportul este diferit de $\frac{1}{2}$, ele nu sînt mediane; ca să fie mediane, trebuie ca raportul să fie $\frac{1}{2}$. Dacă, însă, duci trei linii concurente care se împart în acelaşi raport, nu trebuie să mai ai grijă de raport, ele sînt mediane.

8.7.10 (fig. 75). a) $\triangle GEB \sim \triangle GCD$, căci $EB \parallel DC$ (v. probl. 8.4.3), deci $\frac{GB}{GD} = \frac{EB}{DC}$. Totodată $EB = \frac{1}{2} AB$, deci $EB = \frac{1}{2} DC$, deci raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$, $GB = \frac{1}{2} DG$, deci $GB = \frac{1}{3} DB$. La fel se arată că $DH = \frac{1}{3} DB$. Rezultă că şi $HG = \frac{1}{3} DB$.

b) Se consideră aceleaşi triunghiuri asemenea. Dacă $GB = \frac{1}{3} BD$, $GB = \frac{1}{2} DG$, $\frac{GB}{DG} = \frac{1}{2}$, deci raportul de asemănare este $\frac{1}{2}$. Rezultă că $EB = \frac{1}{2} DC$, deci $EB = \frac{1}{2} AB$, adică punctul E este mijlocul laturii AB. Folosind triunghiurile asemenea DHF şi BHA, se arată la fel că punctul F este mijlocul laturii DC.

Observare. Partea a doua a problemei se poate deduce din prima, demonstraţia făcîndu-se prin reducere la absurd, şi invers.

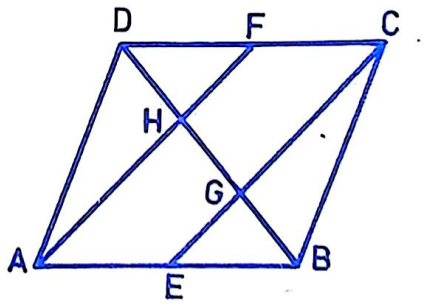


Fig. 75

8.7.11 (fig. 76). Luăm ca variabilă independentă lungimea segmentului DM, $DM = x$. Cînd punctul M coincide cu D, $x = 0$; cînd M coincide cu A, $x = 5$; cînd M descrie latura DA, x ia toate valorile de la 0 la 5, $x \in [0; 5]$.

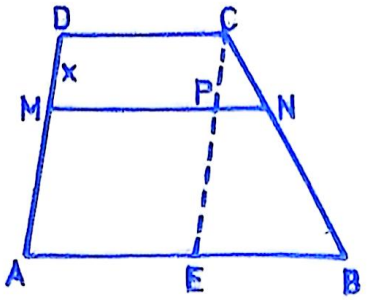


Fig. 76

Pentru a calcula segmentul MN, ducem CE paralel cu DA. Atunci

$$CE = 5, \quad CP = x$$

$$EB = AB - AE = 10 - 6 = 4.$$

$\triangle CPN \sim \triangle CEB$, deci $\frac{CP}{CE} = \frac{PN}{EB}$;

$$\frac{x}{5} = \frac{PN}{4}; \quad PN = \frac{4x}{5}.$$

$$MN = MP + PN = DC + PN =$$

$$= 6 + \frac{4x}{5}.$$

Trebuie să studiem variaţia funcţiei

$$f(x) = \frac{4}{5}x + 6 \quad x \cup [0; 5].$$

Coeficientul lui x este pozitiv, deci funcţia este crescătoare. Ea este minimă la începutul intervalului, $f(0)=6$, şi maximă la sfîrşitul lui, $f(5) = 10$.

Graficul funcţiei este dat de dreapta $y = \frac{4}{5}x + 6$. Pentru $x = 0$, $y = 6$ şi pentru $x = 5$, $y = 10$, deci dreapta trece prin punctele F (0, 6) şi G (5, 10). Marcăm aceste puncte (fig. 77) şi trasăm dreapta EF. Graficul funcţiei este segmentul FG.

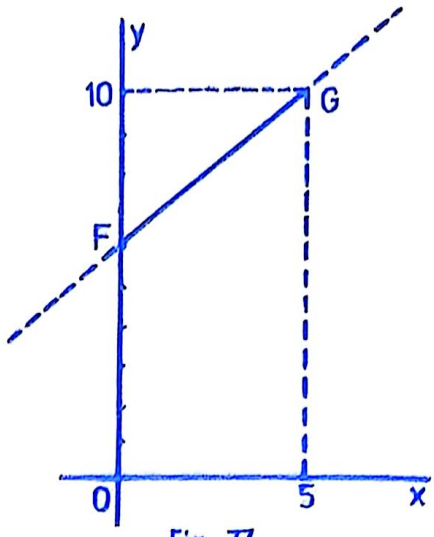


Fig. 77

8.7.12. Punem $AM = x$. a) $\triangle AMP \sim \triangle ADC$ (fig. 78), deci

$$\frac{AM}{AD} = \frac{MP}{DC}; \quad \frac{x}{3} = \frac{MP}{5};$$

$$M = \frac{5x}{3}.$$

Apoi, $\triangle DMQ \sim \triangle DAB$, deci

$$\frac{DM}{DA} = \frac{MQ}{AB}; \quad \frac{3-x}{3} = \frac{MQ}{5};$$

$$MQ = \frac{5(3-x)}{3}.$$

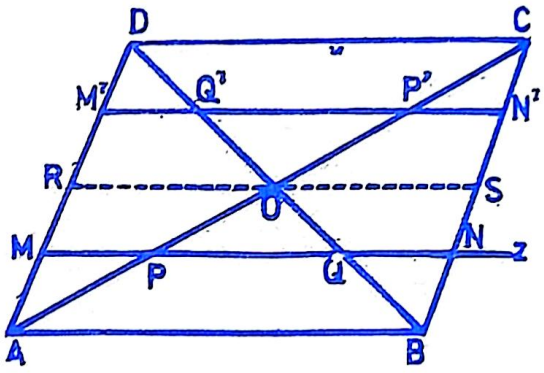


Fig. 78

Acum,

$$PQ = MQ - MP =$$

$$= \frac{5(3-x)}{3} - \frac{5x}{3} = -\frac{10}{3}x + 5.$$

Acest rezultat este valabil cîtă vreme punctul variabil M este mai aproape

de A decît de D sau cînd M este mijlocul laturii AD, adică $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$. Cînd punctul M este mai sus, în M', deci $x \geq \frac{3}{2}$, cele de pînă acum se pot repeta cuvînt cu cuvînt, punîndu-se M', Q' și P' în loc de M, Q și P. Numai la ultimul pas lucrurile se schimbă, acum

$$P'Q' = M'P' - M'Q'$$

(ordinea termenilor este schimbată). Se obține

$$P'Q' = \frac{10}{3}x - 5.$$

Așadar, lungimea segmentului PQ este dată de relația:

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{10}{3}x + 5 \text{ cînd } x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \\ \frac{10}{3}x - 5 \text{ cînd } x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right] \end{cases}$$

Mai scurt,

$$f(x) = \left| -\frac{10}{3}x + 5 \right|, \quad x \in [0, 3].$$

În prima expresie coeficientul lui x este negativ, deci funcția este descrescătoare, are maximul $f(0) = 5$ și minimul $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. În expresia a doua, coeficientul lui x este pozitiv, deci funcția crește de la $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$, care este minimul ei, pînă la $f(3) = 5$ care este maximul ei.

Pentru grafic (fig. 79), avem nevoie de dreptele $y = -\frac{10}{3}x + 5$ și $y = \frac{10}{3}x - 5$. Prima se construiește cu ajutorul punctelor $E(0, 5)$ și $F\left(\frac{3}{2}, 0\right)$,

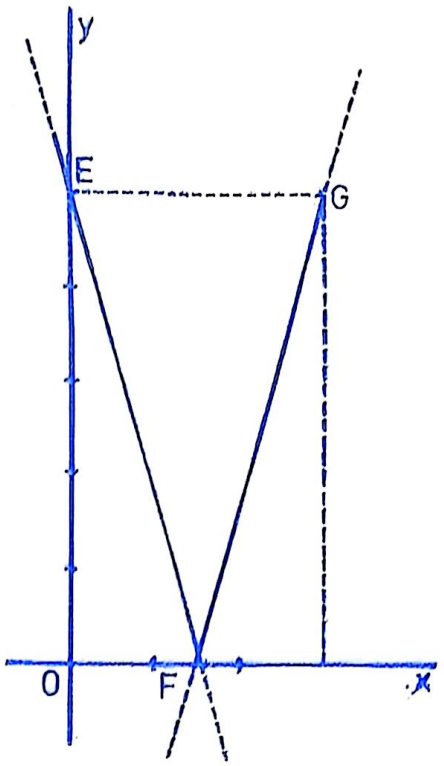


Fig. 79

iar a doua cu ajutorul punctelor F și G (3, 5). Din prima se reține segmentul EF și dintr-a doua segmentul FG. Graficul funcției este linia frîntă EFG.

Observare. Se vede ușor că rezultatele corespund realității. Cînd punctul M din figura 78 coincide cu A, segmentul cuprins între diagonale este latura AB. Cînd punctul M se mișcă de la A în sus segmentul PQ scade mereu și cînd punctul M ajunge în mijlocul R al laturii AD, segmentul PQ se reduce la punctul O. În continuare, se formează segmentul $Q'P'$ care crește mereu și cînd punctul M ajunge în D, segmentul este latura DC. (O altă problemă de acest tip este 15.3.20.)

Cap. 9

9.1.1. a) 6 și 6,5. b) 6 și 7,5. c) 12 și 12,2. Media geometrică este mai mică decît cea aritmetică.

9.1.2. Fie a și b două numere (pozitive)

$$a < b.$$

Înmulțind ambii membri cu b, se obține $ab < b^2$, deci $\sqrt{ab} < \sqrt{b^2}$, $\sqrt{ab} < b$. Înmulțind ambii membri cu a, se obține $a^2 < ab$, $\sqrt{a^2} < \sqrt{ab}$, $a < \sqrt{ab}$ sau $\sqrt{ab} > a$. Dacă $b = a$, media lor proporțională este $\sqrt{ab} = \sqrt{a^2} = a$, adică egală cu ele.

9.1.3. a) Teorema înălțimii dă $i = 12$; $a = 16 + 9 = 25$; teorema catetei dă $b = 20$, $c = 15$. b) Teorema catetei dă $m = 3{,}2$; $n = a - m = 1{,}8$; teorema catetei dă $b = 3$; teorema înălțimii dă $i = 2{,}4$. c) $n = 25 - 16 = 9$; teorema înălțimii dă $i = 12$; teorema catetei dă $b = 20$, $c = 15$. d) Teorema înălțimii dă $m = 28{,}8$; $a = 28{,}8 + 5 = 33{,}8$; teorema catetei dă $b = 31{,}2$; $c = 13$. e) Teorema catetei dă $a = 42{,}05$; $m = 42{,}05 - 20 = 22{,}05$; teorema catetei dă $b = 30{,}45$; teorema înălțimii dă $i = 21$.

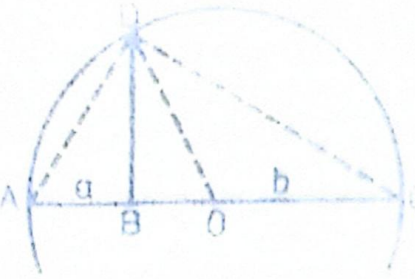
9.1.4. Se aplică teorema catetei de două ori, $b^2 = \ldots$ și $c^2 = \ldots$, se împart relațiile obținute și se simplifică cu a.

9.1.5 $\triangle ABD \sim \triangle CAD$, deci

$$\frac{BD}{AD} = \frac{DA}{DC} = \frac{AB}{AC}; \quad \frac{n}{i} = \frac{i}{m} = \frac{c}{b}.$$

Scriind că primul raport este egal cu al treilea, se obține prima relație. Scriind că raportul al doilea este egal cu al treilea, se obține relația a doua.

9.1.6. *Soluția I.* Fie a și b două numere pozitive. Media lor proporțională se poate reprezenta astfel. Pe o dreaptă (fig. 2) purtăm două segmente $AB = a$ și $BC = b$, construim cercul cu diametrul AC, ridicăm în B perpendiculara pe AC și notăm cu D



unul din punctele ei de intersecție cu cercul. Atunci triunghiul DAC este dreptunghic, deci, după teorema înălțimii, BD este medie geometrică între AB și BC, adică între a și b. Media aritmetică a acestor numere este $\frac{a+b}{2}$. Dar $a + b = AB + BC = AC$, deci $\frac{a+b}{2} = \frac{AC}{2}$, adică raza cercului, adică OD, O fiind centrul cercului. Triunghiul dreptunghic DBO arată că $DB < DO$, deci... Dacă $a = b$, apare situația din figura 3, unde punctul B coincide cu O. Atunci segmentul DO reprezintă ambele medii, deci ele sînt egale. Așadar:

$$(1) \qquad \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}.$$

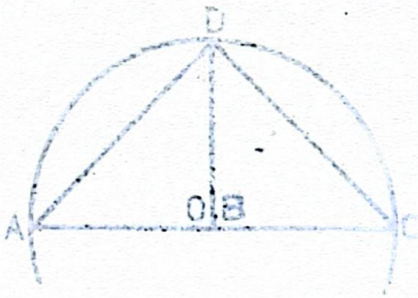


Fig. 3

Soluția II. Fie a și b două numere pozitive. Trebuie să demonstrăm relația (1). Presupunem că ea nu ar fi adevărată, adică

$$(2) \qquad \frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}.$$

Ridicăm la pătrat și scăpăm de numitori:

$$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} < ab;$$

$$a^2 + 2ab + b^2 < 4ab.$$

Trecem termenul $4ab$ în partea stîngă și reducem termenii asemenea:

$$a^2 - 2ab + b^2 < 0;\ (a - b)^2 < 0.$$

Diferența $a - b$ poate fi pozitivă, nulă sau negativă, dar pătratul ei nu poate fi negativ, deci această relație este imposibilă. Rezultă că presupunerea (2) este greșită, deci...

9.1.7. *Soluția I.* $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ (fig. 1), deci

$$\frac{n}{c} = \frac{i}{b} = \frac{c}{a}.$$

Reținem proporția formată din ultimele două rapoarte, care dă... (Se pot folosi și triunghiurile ABC și DAC.)

Soluția II. Teorema înălțimii dă

$$i^2 = mn.$$

Înălțimea se poate afla dacă se cunosc segmentele m și n. Teorema catetei dă:

$$m = \frac{b^2}{a},\ n = \frac{c^2}{a}.$$

Introducînd în relația de mai sus, se obține

$$i^2 = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{c^2}{a} = \frac{b^2c^2}{a^2};\ i = \frac{bc}{a}.$$

Soluția III. Dacă se ia ca bază ipotenuza, aria triunghiului este $\frac{ai}{2}$ dacă se ia ca bază o catetă, aria este $\frac{bc}{2}$. Cele două expresii trebuie să fie egale:

$$\frac{ai}{2} = \frac{bc}{2}.$$

De aici rezultă că $ai = bc$, $i = \ldots$.

Observări. 1) Demonstrația a doua folosește relațiile metrice, care, la rîndul lor, se demonstrează pe baza asemănării triunghiurilor. În demonstrația a treia se folosește faptul că, pentru a afla aria unui triunghi, orice latură a triunghiului se poate lua ca bază și acest fapt se demonstrează cu ajutorul asemănării. Rezultă că, din cele trei demonstrații date mai sus, cea mai bună este prima, căci ia lucrurile direct de la izvor.

2) Soluția este foarte simplă și naturală dacă se folosesc funcțiile trigonometrice. Din triunghiul ABD se scoate

$$\sin B = \frac{i}{c},\ \text{deci}\ i = c \sin B.$$

Din triunghiul ABC se scoate $\sin B = \frac{b}{a}$. Înlocuind $\sin B$ prin $\frac{b}{a}$, se obține...

9.1.8. $\triangle AED \sim \triangle CAB$, căci triunghiurile sînt dreptunghice și $\hat{1} \equiv \hat{C}$ (au același complement, $\hat{2}$). Rezultă că $\frac{AE}{AC} = \frac{ED}{AB}$. Dar $ED \equiv AF$ deci...

9.1.9. Ce fel de patrulater este $AEDF$? Diagonalele sînt congruente, deci $EF \equiv AD$. Teorema înălțimii dă $AD = \sqrt{mn}$, deci $EF = \sqrt{mn}$.

9.1.10. Triunghiul AED dă $\cos \hat{1} = \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{i}$, deci $AE = i \cos \hat{1}$. Dar $\hat{1} = \hat{C}$ (au același complement, unghiul 2), deci

$$AE = i \cos C.$$

Triunghiul ADC dă $i = b \sin C$, deci

$$AE = b \sin C \cos C.$$

Înlocuind $\sin C$ prin $\frac{c}{a}$ și $\cos C$ prin $\frac{b}{a}$, se obține $AE = \frac{b^2c}{a^2}$. Pornind de la triunghiul AFD se obține $AF = \frac{bc^2}{a^2}$.

Observare. Problema se poate rezolva folosind numai teorema catetei și teorema înălțimii, dar calculele sînt mai lungi.

9.1.11 (fig. 5). Teorema înălțimii dă

$$MN^2 = AN \cdot NB = 12 \cdot 3 = 36;$$

$$MN = 6 \text{ cm}.$$

Teorema catetei dă:

$$AM^2 = AB \cdot AN = 15 \cdot 12 = 180;$$

$$AM = 6\sqrt{5};$$

$$BM^2 = AB \cdot NB = 15 \cdot 3 = 45;$$

$$BM = 3\sqrt{5}.$$

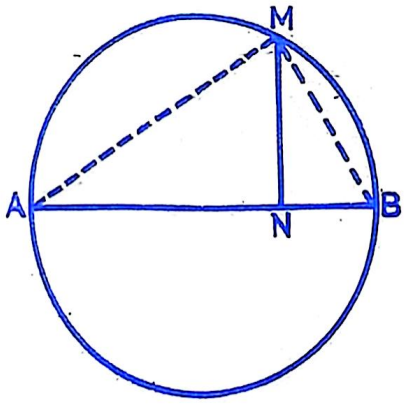


Fig. 5

9.1.12 (fig. 6). Teorema catetei, aplicată în triunghiul AOC, dă

$$OA^2 = OD \cdot OC;\ 36 = 4 \cdot OC;\ OC = 9 \text{ cm};\ DC = OC - OD = 5 \text{ cm}.$$

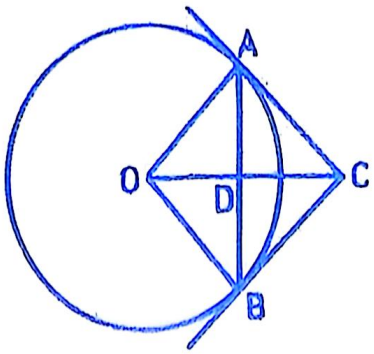


Fig. 6

Teorema înălțimii dă:

$$AD^2 = OD \cdot DC = 4 \cdot 5;\ OD = 2\sqrt{5}.$$

Teorema catetei dă:

$$AC^2 = OC \cdot DC = 9 \cdot 5;\ AC = 3\sqrt{5}.$$

9.1.13 (fig. 7). Ce fel de triunghi este CAD? $DC = 16$ cm, $DE = 8 - 7 = 1$ cm. Teorema catetei dă:

$$AC^2 = CD \cdot CE = 16 \cdot 15;$$

$$AC = 4\sqrt{15} \text{ cm}.$$

$$AD^2 = DC \cdot DE = 16 \cdot 1 = 16;$$

$$AD = 4 \text{ cm}.$$

În cazul general, $DC = 2R$, $DE = OD - OE = R - d$. Teorema catetei dă $AC = \sqrt{2R(R+d)}$, $AD = \sqrt{2R(R-d)}$.

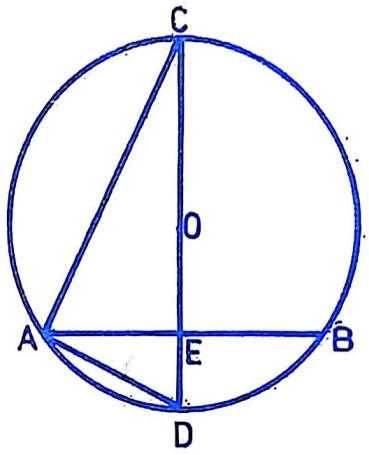


Fig. 7

9.1.14 (fig. 8). v. observarea de la problema 9.1.10. Unghiul ADE ≡ unghiul CAF, căci au același complement, unghiul DAE, deci le putem nota pe amîndouă cu u. Triunghiul ABC dă:

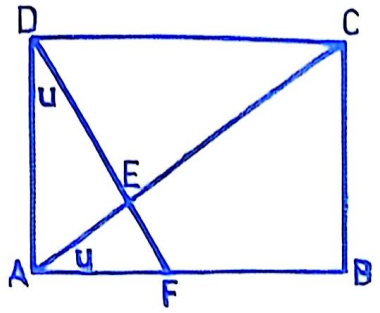


Fig. 8

$$\sin u = \frac{b}{d},\ \cos u = \frac{a}{d},\ \operatorname{tg} u = \frac{b}{a}.$$

Triunghiul DAF dă:

$$\operatorname{tg} u = \frac{AF}{AD};\ AF = AD \operatorname{tg} u = b \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

Același triunghi dă:

$$\cos u = \frac{AD}{DF};\ DF = AD : \cos u = b : \frac{a}{d} = \frac{bd}{a}.$$

Triunghiul DAE dă:

$$\sin u = \frac{AE}{AD};\ AE = AD \sin u = b \cdot \frac{b}{d} = \frac{b^2}{d}.$$

Din același triunghi se scoate

$$\cos u = \frac{DE}{DA};\ DE = DA \cos u = b \cdot \frac{a}{d} = \frac{ab}{d}.$$

În sfîrșit, triunghiul AFE dă:

$$\sin u = \frac{EF}{AF};\ EF = AF \sin u = \frac{b^2}{a} \cdot \frac{b}{d} = \frac{b^3}{ad}.$$

9.1.15 (fig. 9). $PM \cdot PN = OP^2$. Cînd unghiul se rotește se schimbă segmentul OP? Produsul $PM \cdot PN$ rămîne constant. Nu există maxim.

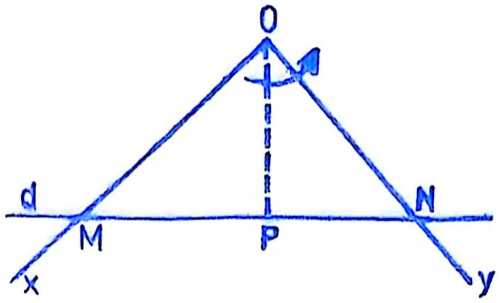


Fig. 9

9.1.16 (fig. 10). Ce fel de triunghi este OMT? Ce relație există între segmentele OM, ON și OT? Cînd punctul M se mișcă pe cerc, lungimea segmentului OM variază?

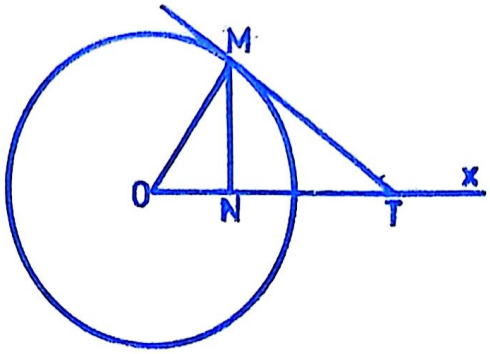


Fig. 10

9.1.17. a) Ce fel de triunghi este TCB (fig. 11)? Se calculează segmentele TA și AB, apoi se aplică teorema înălțimii în triunghiul CTB. $CD = 12$ cm.
b) $CD = 4\sqrt{r(R-r)}$.

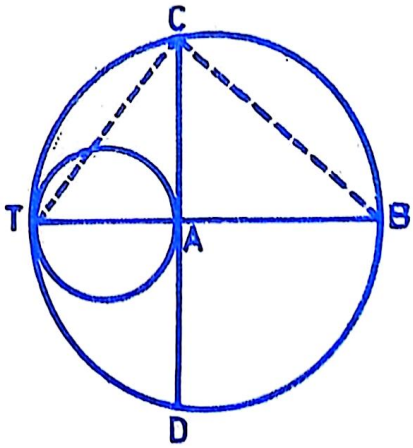


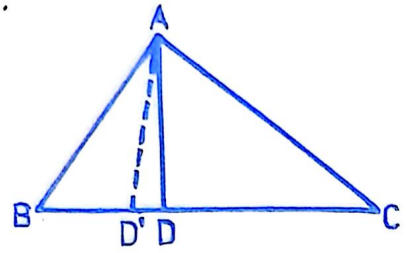
Fig. 11

9.1.18. a) *Soluția I* (fig. 12). Relația dată, pusă sub forma

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB},$$

arată că triunghiurile ABD și ABC au două laturi proporționale; unghiul B format de ele este comun, deci triunghiurile sînt asemenea. Rezultă că unghiurile lor sînt congruente două cîte două. Triunghiul ABC avînd un unghi drept, triunghiul ABD are de asemenea un unghi drept, deci $AD \perp BC$, AD este înălțime. Reciproca este adevărată.

Fig. 12



Soluția II. Presupunem că AD nu este înălțime. Atunci ducem înălțimea și notăm piciorul ei cu D', punctul D' fiind diferit de D, $D' \neq D$. Teorema catetei dă $AB^2 = BC \cdot BD'$. Comparînd această relație cu cea dată, rezultă că $BD = BD'$, ceea ce este posibil numai dacă D' coincide cu D, $D' = D$, ceea ce este în contradicție cu faptul că $D' \neq D$. Rezultă presupunerea că AD nu este înălțime este greșită; AD este înălțime.

b) Eforturile de a demonstra această propoziție sînt zadarnice, propoziția nu este adevărată. Dacă AD este mediană,

$$DB = DC = \frac{BC}{2}, \text{ deci}$$

$$DB \cdot DC = \frac{BC^2}{4}.$$

Pe de altă parte, într-un triunghi dreptunghic mediana este jumătate din ipotenuză (v. probl. 6.5.12), $AD = \frac{BC}{2}$, deci

$$AD^2 = \frac{BC^2}{4}.$$

Aceste două relații arată că $AD^2 = DB \cdot DC$, dar AD nu este înălțime. (Cu privire la alte reciproce ale acestor teoreme, v. problemele 15.2.11 și 15.2.12.)

9.2.1 (fig. 13). Fie $a, b, c, d, \ldots$ laturile pătratelor date. Se construiește un triunghi dreptunghic ABC cu catetele a și b; aria pătratului construit pe ipotenuza BC este egală cu suma ariilor primelor două pătrate, $BC^2 = a^2 + b^2$. Apoi se construiește un triunghi dreptunghic CBD în care cateta $BD = c$; deci $CD^2 = a^2 + b^2 + c^2$. Apoi triunghiul dreptunghic CDE în care cateta $DE = d$, ș.a.m.d.

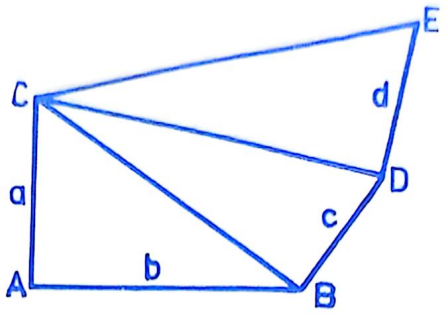


Fig. 13

9.2.2 (fig. 14). Teorema lui Pitagora dă $CB = 84$ km. Mașina a doua trebuie să parcurgă $135+84=219$ km. Timpul după care prima mașină ajunge în C este $\frac{159}{50}$. Viteza cu care trebuie să meargă mașina a doua este $219 : \frac{159}{50} \approx$ ≈ 69 km/oră.

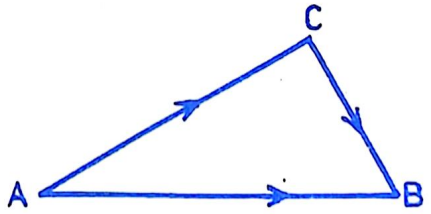


Fig. 14

9.2.3 (fig. 15). Se calculează distanțele de la centrul cercului la cele două coarde; se obține $OM = 33$, $ON = 52$ cm. Dacă centrul este între cele două coarde, distanța dintre coarde este de $52 + 33 = 85$ cm; în cazul contrar, distanța este de $52 - 33 = 19$ cm.

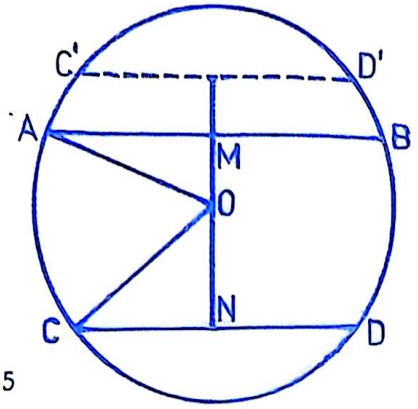


Fig. 15

9.2.4. Fie AB, CD cele două coarde (fig. 16), O centrul cercului și M, N picioarele perpendicularelor coborîte din O pe coarde. Se calculează raza cercului din triunghiurile AOM și CON și se egalează rezultatele.

Observare. Este interesant că în relația obținută nu figurează raza cercului. Aceasta înseamnă că, dacă în locul cercului din figura 16 luăm un cerc mai mare și ducem două coarde congruente cu AB și CD, distanțele OM și ON sînt mai mari, dar diferența $ON^2 - OM^2$ rămîne aceeași.

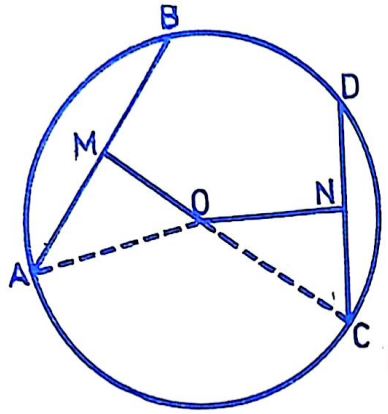


Fig. 16

9.2.5 (fig. 17). Fie R raza cercului. Triunghiul MAB este dreptunghic, deci

$$MA^2 + MB^2 = AB^2 = 4R^2.$$

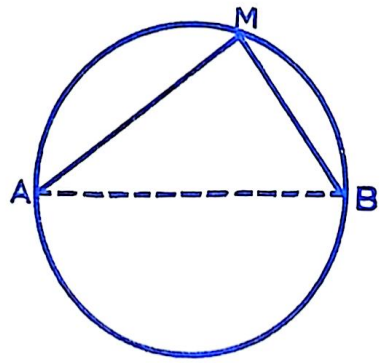


Fig. 17

Oriunde am lua punctul M pe cerc, suma $MA^2 + MB^2$ va fi aceeași, $4R^2$. Nu există maxim.

9.2.6. (fig. 18). Fie E și F mijloacele coardelor și M intersecția lor. Ce fel de patrulater este $OFME$? EF se află din triunghiul dreptunghic EOF. Din triunghiul dreptunghic AOE se află $OE = 33$ cm, deci $FM = OE = 33$ cm. Triunghiul OFD dă $OF = 16$ cm. Deci $EF^2 = 33^2 + 16^2 = 1345$; $EF = 36{,}6$ cm. $OM \equiv EF$.

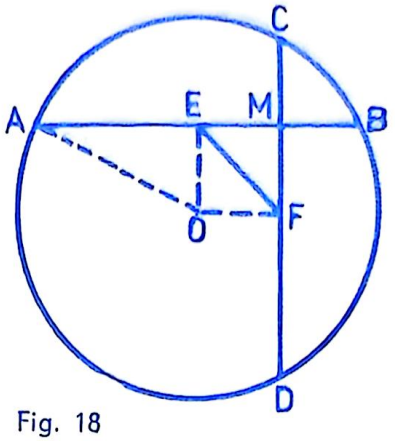


Fig. 18

9.2.7. a) Cîte grade are unghiul C? Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile ABD și DBC. $CD = 7$ cm.
b) $\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}$.

9.2.8 (fig. 19). Drumul cel mai scurt este AHC. În adevăr, să considerăm un alt drum, de exemplu AMC. Din cauza bazinului, punctul M trebuie să fie în interiorul patrulaterului $ADCH$. Trebuie să comparăm drumul AMC cu AHC. Fie $AH \cap MC = N$. Triunghiurile AMN și HNC dau:

$$AM + MN > AH + HN,$$
$$HN + NC > HC.$$

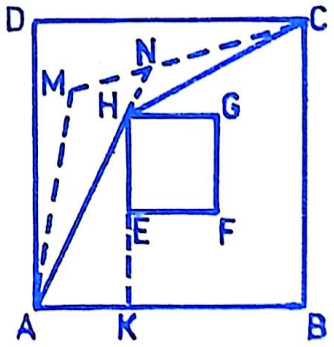


Fig. 19

Aceste neegalități se adună, $MN + NC$ se înlocuiește cu MC și se obține

$$(AM + MC) + HN > (AH + HC) + HN.$$

Aceasta înseamnă că, dacă la prima paranteză se adaugă HN, se obține mai mult decît dacă se adaugă HN la paranteza a doua, deci prima paranteză este mai mare, adică drumul $AM + MC$ este mai lung decît drumul $AH + HC$.

Urmează să calculăm lungimile AH și HC. $AK = a$, $KH = 2a$. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul AKH, dă $AH = a\sqrt{5}$. La fel, $HC = a\sqrt{5}$. Lungimea drumului minim este $2a\sqrt{5}$. Drumul AFC este de asemenea un drum minim.

9.2.9 (fig. 20). Se pune $AB = a$, $OA = x$, $OB = y$; atunci $x + y = a$. Se calculează segmentele din care se compune linia frîntă:

$$AB = a,\ BD = y\sqrt{2},$$

$$DC = y + x = a,\ CA = x\sqrt{2}.$$

Aceste lungimi se adună. Se ține seamă că $x\sqrt{2} + y\sqrt{2} = (x+y)\sqrt{2} = a\sqrt{2}$ și se află că lungimea liniei frînte este $a(2 + \sqrt{2})$.

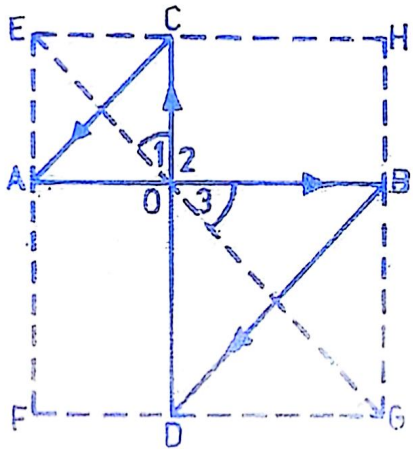


Fig. 20

În acest rezultat nu apare nici x, nici y, deci el rămîne același oricare ar fi x și y, adică oricare ar fi punctul O.

Observare. Rezultatul calculului este surprinzător. El devine aproape evident dacă se judecă astfel. Linia frîntă se compune din patru segmente: AB, DC, AC și BD. Primele două nu se schimbă cînd punctul O se mută căci $AB = DC = a$; numai segmentele oblice, AC și BD variază. Ca să vedem cum variază suma lor, construim pătratul $EFGH$. Se formează de la sine pătratele $AOCE$ și $ODGB$. Diagonalele pătratului fiind congruente, $AC \equiv EO$ și $BD \equiv OG$, deci

$$AC + BD = EO + OG.$$

Dar semidreptele EO și OG sînt în prelungire, căci $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 45° + 90° + 45° = 180°$, deci $EO + OG = EG$, deci

$$AC + BD = EG.$$

Cînd punctul O se mută pe AB, pătratul $EFGH$ rămîne același, deci lungimea EG nu se schimbă, deci... Mai mult, putem chiar afla lungimea liniei frînte: $AB = CD = a$, iar EG este diagonala unui pătrat cu latura a, $EG = a\sqrt{2}$, deci...

9.2.10 (fig. 21). Teorema lui Pitagora dă $AE^2 + AF^2 = EF^2$. Dar AD și EF sînt diagonalele unui dreptunghi, deci $EF \equiv AD$, deci...

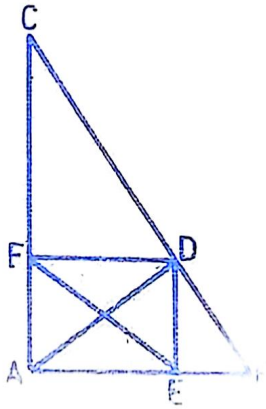


Fig. 21

9.2.11 (fig. 22). Fie $ABCD$ patrulaterul și O intersecția diagonalelor. Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile OAB și OCD, și se află suma $AB^2 + CD^2$. În mod analog se află suma $BC^2 + AD^2$. Rezultatele sînt egale.

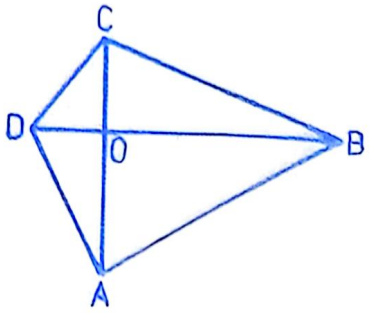


Fig. 22

9.2.12 (fig. 23). Pentru a construi figura, se duc două raze perpendiculare OA și OB, apoi se duc în punctele A și B tangentele la cerc. Unghiurile O, A și B fiind drepte și $OA \equiv OB$, $OAMB$ este un pătrat, deci unghiul M este drept. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul OAM, dă $OM = r\sqrt{2}$, r fiind raza cercului.

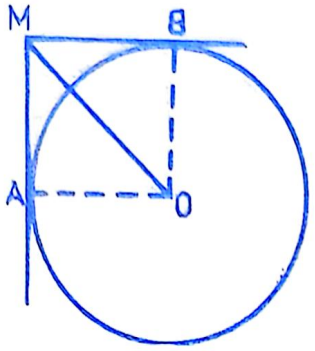


Fig. 23

9.2.13 (fig. 24). Luăm, de exemplu, prima sumă. Triunghiul MAB arată că $MA^2 + MB^2 = AB^2$. Dar AB este o coardă a cercului, deci cel mult egală cu diametrul, care este $2r$, $AB \leqslant 2r$, deci $AB^2 \leqslant 4r^2$. Rezultă că... Suma este maximă cînd AB este un diametru. Unghiul M fiind drept, este înscris într-un semicerc, deci punctul M este pe cerc.

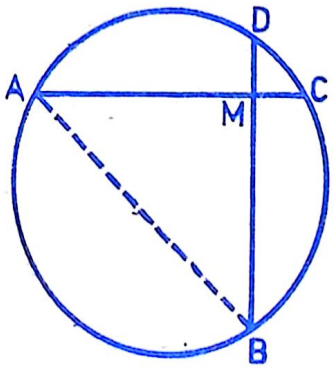


Fig. 24

9.2.14 (fig. 25). Fie O centrul cercului. Totul depinde de lungimea segmentului OM. Ducem din O perpendicularele pe cele două drepte. Atunci $OA = BM = a$ și $OB = b$. Triunghiul OBM dă $OM^2 = a^2 + b^2$. a) Condiția ca punctul M să fie în interiorul cercului este $OM < r$, deci $OM^2 < r^2$, deci $a^2 + b^2 < r^2$. b) $a^2 + b^2 = r^2$. c) $a^2 + b^2 > r^2$. Exemple: a) $a = 2$, $b = 1$, b) $a = 3$, $b = 4$. c) $a = 3$, $b = 5$.

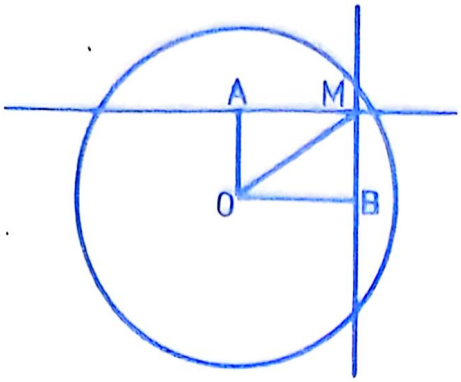


Fig. 25

9.2.15. $5^2 + 7^2 = 74$; $9^2 = 81$; $81 \neq 74$. Deci triunghiul nu este dreptunghic, căci, dacă ar fi dreptunghic, pătratul laturii celei mai mari ar fi 74.

9.2.16. a) Se calculează BD^2 din triunghiurile ABD și CBD (fig. 26) și se egalează rezultatele. b) Nu. Pentru a demonstra aceasta ajunge un exemplu. Luăm $AD = 4$, $AB = 5$, $BD = 6$. Deoarece $6 < 5 + 4$, triunghiul ADB există. $AB^2 + AD^2 = 41$, $BD^2 = 36$; $36 \neq 41$, deci triunghiul ABD nu este dreptunghic. Acum luăm pentru CD și CB două lungimi astfel ca $CD^2 + CB^2$ să fie 41, de exemplu $CD = \sqrt{5}$, $CB = 6$. Patrulaterul astfel obținut îndeplinește condiția, dar unghiul A nu este drept.

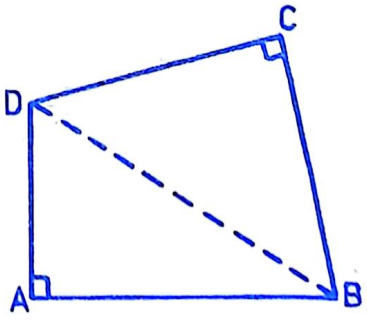


Fig. 26

9.2.17. Fie i latura perpendiculară pe baze. Teorema lui Pitagora dă:

$$i^2 = d^2 - b^2,\ i^2 = D^2 - B^2.$$

Se scrie că cele două expresii obținute pentru i^2 sînt egale și relația obținută se transformă.

9.2.18 (fig. 27). Cînd punctul M este centrul cercului (fig. 28), triunghiurile MAC și MBD dau $AC^2 = 2R^2$ și $BD^2 = 2R^2$, R fiind raza cercului, deci $AC^2 + BD^2 = 4R^2$. Dacă suma nu depinde de poziția punctului M, ea nu poate fi decît $4R^2$. Deci trebuie să demonstrăm că, oricînd,

$$AC^2 + BD^2 = 4R^2 = (2R)^2.$$

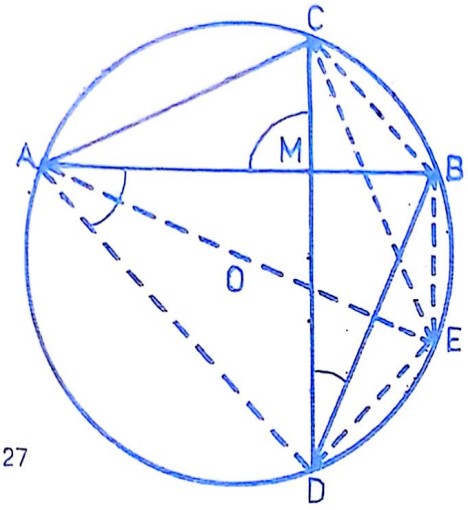


Fig. 27

Această relație ne face să ne gîndim la un triunghi dreptunghic în care AC și BD să fie catete, și ipotenuza să fie un diametru al cercului. Ducem diametrul AE și unim E cu C. Atunci triunghiul ACE este dreptunghic și dă $AC^2 + CE^2 = 4R^2$. Rămîne să demonstrăm că $CE \equiv BD$. Unghiul ABE este înscris într-un semicerc, deci este drept, deci $BE \perp AB$. Deoarece și $CD \perp AB$, $BE \parallel CD$, deci arcele cuprinse între aceste coarde sînt congruente, $\overset{\frown}{CB} \equiv \overset{\frown}{DE}$. Adăugînd la aceste arce arcul BE, se obține $\overset{\frown}{CE} \equiv \overset{\frown}{BD}$, deci $CE \equiv BD$.

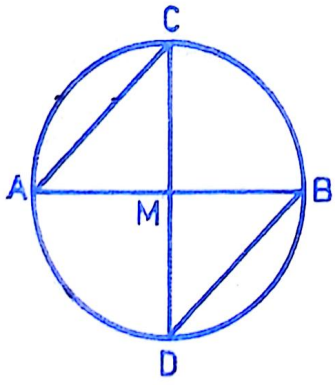


Fig. 28

Dacă extremitățile coardei a doua se notează invers, D sus și C jos, segmentele AC și BD sînt celelalte laturi opuse ale patrulaterului convex cu vîrfurile A, B, C și D, dar rezultatul este același (v. probl. 9.2.11). Cînd punctul M este în exteriorul cercului, totul rămîne valabil. Să se verifice acest lucru. Pentru cazul cînd punctul M este pe cerc, v. probl. 9.2.5.

9.2.19. a) Fie ABC (fig. 29) un triunghi în care $AB \equiv AC$ și AD înălțimea lui. Teorema lui Pitagora dă:

$$BD^2 = AB^2 - AD^2,$$
$$DC^2 = AC^2 - AD^2.$$

Deoarece $AB \equiv AC$, termenii acestor diferențe sînt aceiași, deci diferențele sînt egale, deci $BD^2 = DC^2$, $BD \equiv DC$, adică AD este mediană. b) Acum trebuie să comparăm AB cu AC știind că $BD \equiv DC$. Teorema lui Pitagora dă

$$AB^2 = AD^2 + BD^2,$$
$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Deoarece $BD \equiv DC$ termenii acestor sume sînt aceiași, deci...

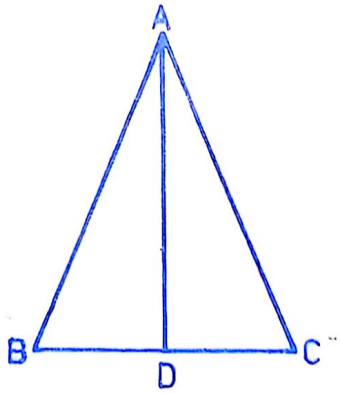


Fig. 29

9.2.20 (fig. 30). Fie d o dreaptă, O un punct oarecare, $O \notin d$, OA și OB două oblice, OP perpendiculara dusă din O pe d. PA este proiecția oblicei OA și PB a oblicei OB. a) Trebuie să comparăm proiecțiile; pentru aceasta le calculăm. Teorema lui Pitagora dă

$$PA^2 = OA^2 - OP^2,$$

$$PB^2 = OB^2 - OP^2.$$

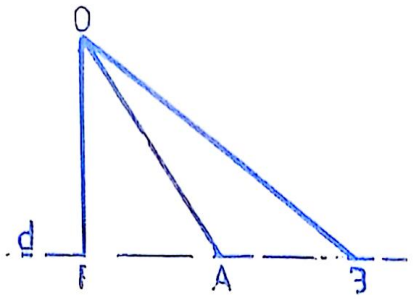


Fig. 30

În aceste diferențe, scăzătorul OP^2 este același. Dacă $OB > OA$, $OB^2 > OA^2$, deci diferența a doua este mai mare, $PB^2 > PA^2$, deci $PB > PA$.

b) Acum trebuie să comparăm oblicele OA și OB.

$$OA^2 = OP^2 + PA^2,$$

$$OB^2 = OP^2 + PB^2.$$

În aceste sume, primul termen, OP^2, este același. Dacă $PB > PA$, $PB^2 > PA^2$, deci suma a doua este mai mare, deci...

9.2.21 (fig. 31). Fie AB și CD două coarde și O centrul cercului. Ca să putem compara distanțele lor de la centru, le calculăm. Ducem din centru perpendicularele OE și OF pe coarde; atunci segmentele OE și OF reprezintă distanțele de la centru la coarde, $AE = \frac{AB}{2}$, $CF = \frac{CD}{2}$ și $OA = OB = r$, r fiind raza cercului.

Triunghiurile OAE și OCF dau

$$OE^2 = r^2 - AE^2, \quad OF^2 = r^2 - CF^2.$$

a) Trebuie să comparăm aceste diferențe. În amîndouă, descăzutul este

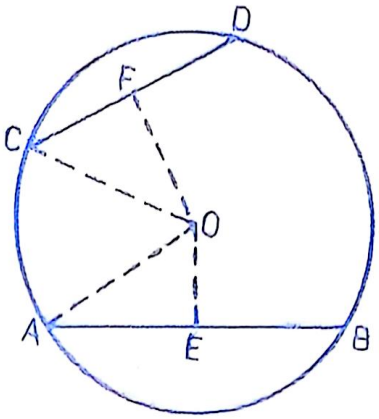


Fig. 31

același (r^2). Dacă $AB > CD$, $\frac{AB}{2} > \frac{CD}{2}$, adică $AE > CF$. Rezultă că prima diferență este mai mică, deci $OE^2 < OF^2$, deci $OE < OF$, adică coardei mai mari îi corespunde o distanță mai mică. b) Relațiile de mai sus se pun sub forma

$$AE^2 = r^2 - OE^2, \quad CF^2 = r^2 - OF^2.$$

Judecînd ca în cazul precedent, se vede că, dacă $OE < OF$, $AB > CD$, adică unei distanțe mai mici îi corespunde o coardă mai mare.

9.2.22. Fie a, b și x laturile unuia din triunghiuri și a, b și y laturile celuilalt triunghi (fig. 32), unde am notat laturile congruente cu aceeași literă. Teorema lui Pitagora, aplicată în cele două triunghiuri, dă:

$$x^2 = a^2 - b^2 \text{ și } y^2 = a^2 - b^2,$$

deci $x^2 = y^2$, deci $x = y$. Triunghiurile sînt congruente după cazul III de congruență (LLL).

Observare. Datorită acestei teoreme, cazul de congruență IC devine de prisos.

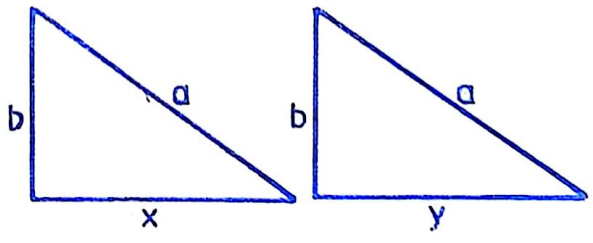


Fig. 32

9.2.23 (fig. 33). Coborîm din vîrfurile C și D perpendicularele pe bază și calculăm diagonalele din triunghiurile care se formează.

$$AC^2 = AE^2 + CE^2;$$
$$BD^2 = BF^2 + DF^2.$$

Dar $CE = DF$ și $AE > BF$, deci...

Observare. Am admis pe baza figurii, fără demonstrație, că $AE > BF$, adică, într-un triunghi obtuzunghic, o înălțime cade pe prelungirea bazei (v. (probl. 15.2.9).

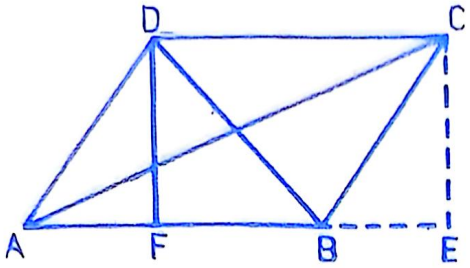


Fig. 33

9.3.1. (fig. 34). Se știe că $OA \perp AC$ și $OC \perp AB$. Teorema catetei aplicată în triunghiul OAC dă $OC = 33{,}8$. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul OAC dă $AC = 31{,}2$.

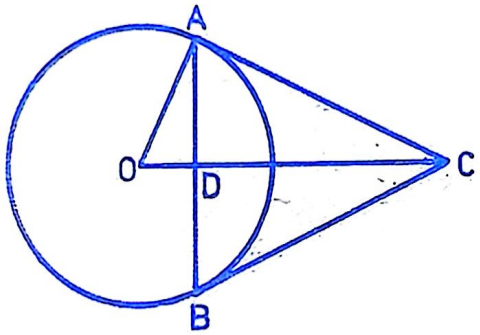


Fig. 34

9.3.2. Se știe că (fig. 34) $CB \equiv AC$, $OC \perp AB$, deci $DA \equiv DB$. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul OAC, dă $AC = 35$ cm. În triunghiul AOC se cunosc toate laturile, deci se poate afla înălțimea AD (v. probl. 9.1.7), $AD = \frac{12 \cdot 35}{37}$, deci $AB = 2AD = \frac{840}{37}$.

9.3.3 (fig. 35). Triunghiul AOC dă $OC = 24$ cm. Se știe că $AD \perp OC$. Teorema catetei, aplicată în triunghiul AOC, dă $OE = \frac{49}{24}$. În triunghiul ABD, OE este linie mijlocie, deci $BD = 2OE = \frac{49}{12}$.

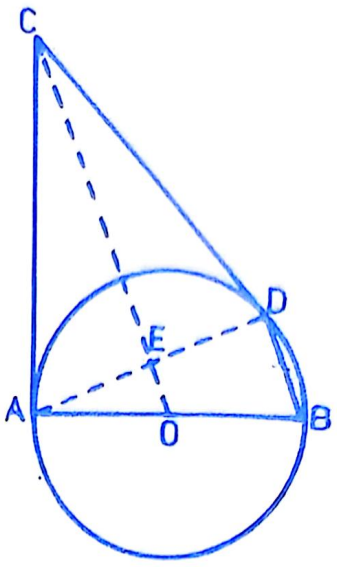


Fig. 35

9.3.4 (fig. 36). Deoarece $AB \equiv AC$, $\overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{AC}$. Scăzînd din semicercurile ABD și ACD arcele congruente AB și AC, arcele rămase sînt congruente, $\overset{\frown}{BD} \equiv \overset{\frown}{CD}$. Unghiurile 1 și 2 sînt înscrise în cerc și cuprind între laturi arce congruente, deci $\hat{1} \equiv \hat{2}$, AE este bisectoare în triunghiul isoscel ABC, deci este și mediană și înălțime, $BE \equiv EC$ și $AE \perp BC$. Unim B cu D. Unghiul ABD fiind înscris într-un

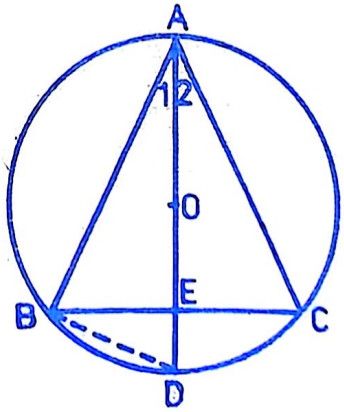


Fig. 36

semicerc, este drept, deci triunghiul ABD este dreptunghic. Teorema înălțimii dă $BE^2 = EA \cdot ED$. Dar $BE = \frac{BC}{2}$, deci $BE^2 = \frac{BC^2}{4}$. Înlocuind BE^2 cu această expresie, se obține...

9.3.5 (fig. 37). Fie AD o înălțime. Punem $BD = x$, atunci $DC = 21 - x$. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiurile ADB și ADC, dă:

$$AD^2 = 13^2 - x^2 = 169 - x^2;$$
$$AD^2 = 20^2 - (21 - x)^2 = -41 + 42x - x^2.$$

Egalînd cele două expresii obținute pentru AD^2, se obține ecuația

$$169 - x^2 = -41 + 42x - x^2,$$

care dă $x = 5$. Acum se cunosc în triunghiul ABD ipotenuza AB și cateta BD. Teorema lui Pitagora dă $AD = 12$.

Pe aceeași cale se află că lungimile celorlalte înălțimi sînt

$$BE = \frac{63}{5}; \quad CF = \frac{252}{13}.$$

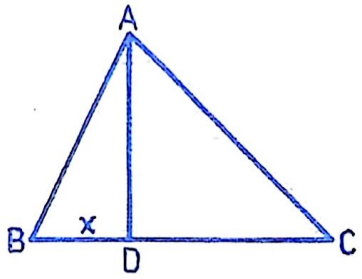


Fig. 37

9.3.6. a) Lungimea maximă este CB (fig. 39[1]), $AB = \sqrt{a^2+b^2}$, $OB = \frac{AB}{2}$,

$$CB = OB - OC = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2} - R.$$

Lungimea minimă este $DE = OE - OD = \frac{b}{2} - R$. b) $CB = \frac{150\sqrt{2}}{2} - 30 = 75{,}75$ cm; $DE = 45$ cm. c) Notăm cu x latura feței de masă. Atunci $CB = \frac{x\sqrt{2}}{2} - 30$. Condiția este

$$\frac{x\sqrt{2}}{2} - 30 < 50$$

și dă $x < 112{,}8$ cm.

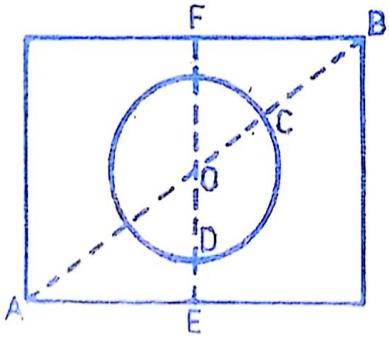


Fig. 39

9.3.7 (fig. 40). Fie $ABCD$ masa și $EFGH$ fața de masă[1]. Lungimea maximă a părții din fața de masă care atîrnă în jos este CG. Teorema lui Pitagora dă: $AC = b\sqrt{2}$, deci $OC = \frac{b\sqrt{2}}{2}$; tot așa, $OG = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. $CG = OG - OC$, deci

$$CG = \frac{b\sqrt{2} - a\sqrt{2}}{2}.$$

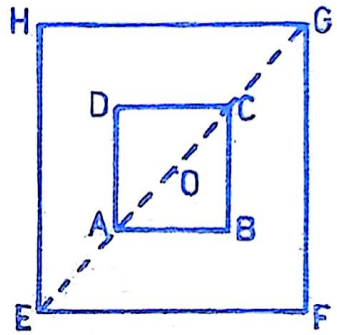


Fig. 40

În poziția a doua, lungimea maximă este KF (fig. 41). $OF = \frac{b\sqrt{2}}{2}$, $OK = \frac{a}{2}$, $KF = OF - OK$, deci

$$KF = \frac{b\sqrt{2} - a}{2};$$

$$KF - CG = \frac{a(\sqrt{2} - 1)}{2} > 0,$$

deci $KF > CG$. Propunerea nu este bună.

[1] Se presupune că fața de masă este menținută întinsă.

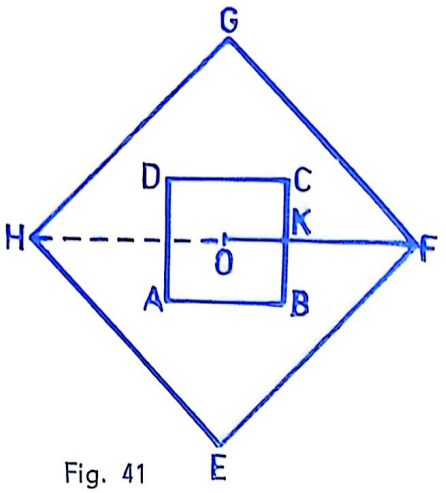


Fig. 41

9.3.8. a) Fie C punctul în care barca a doua prinde prima (fig. 42). Drumurile pe care le parcurg cele două bărci sînt BC și AC. Triunghiul CBA fiind dreptunghic, $BC > AC$, barca a doua trebuie să parcurgă un drum mai lung, deci $b > a$. b) Direcția în care trebuie să meargă barca B este dată de unghiul B. Presupunem că bărcile se întîlnesc după t minute.

$$AC = at, \quad BC = bt.$$

Din triunghiul ABC se obține

$$\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{at}{bt} = \frac{a}{b}.$$

c) Teorema lui Pitagora dă

$$BC^2 - AC^2 = AB^2;\ b^2t^2 - a^2t^2 = d^2;$$

$$t^2(b^2 - a^2) = d^2;\ t^2 = \frac{d^2}{b^2 - a^2};$$

$$t = \frac{d}{\sqrt{b^2 - a^2}}.$$

Numeric: $\sin B = \frac{4}{5}$; $\hat{B} = 53°30'$;

$t = 4$ minute.

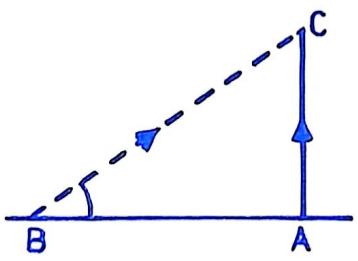


Fig. 42

9.3.9. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul OTC (fig. 43), dă $TC = R\sqrt{3}$. Apoi $\sin \hat{C} = \frac{1}{2}$, $\hat{C} = 30°$, deci $\widehat{TOC} = 60°$. Acest unghi este unghi exterior al triunghiului isoscel AOT, deci $\hat{A} + \hat{T} = 60°$, $\hat{A} = 30°$. Rezultă $\hat{A} \equiv \hat{C}$, deci $TA = TC = R\sqrt{3}$.

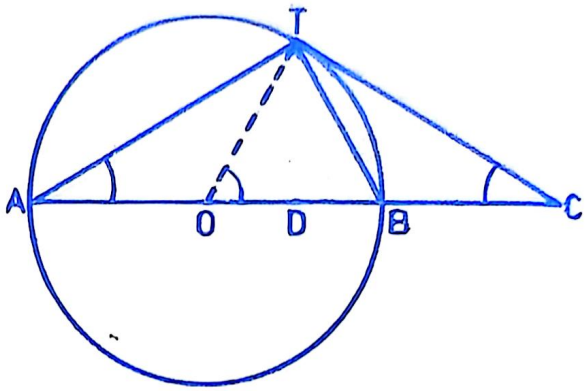


Fig. 43

Cap. 10

10.1.1. a) $\mathcal{A} = \frac{bi}{2}$. b) $i = \frac{2\mathcal{A}}{b}$.

c) $b = \frac{2\mathcal{A}}{i}$.

10.1.2. Se află întîi aria triunghiului. $CE = 6{,}4$ cm.

10.1.3. (fig. 1). Considerăm cazul cînd unghiul C este ascuțit. deci unghiul F este obtuz. Fie AG și DH înălțimile celor două triunghiuri. $\triangle AGC \equiv \triangle DHF$ (ULU), deci $AG \equiv DH$. Înălțimile triunghiurilor date sînt congruente; bazele lor fiind de asemenea congruente, ele au aceeași arie.

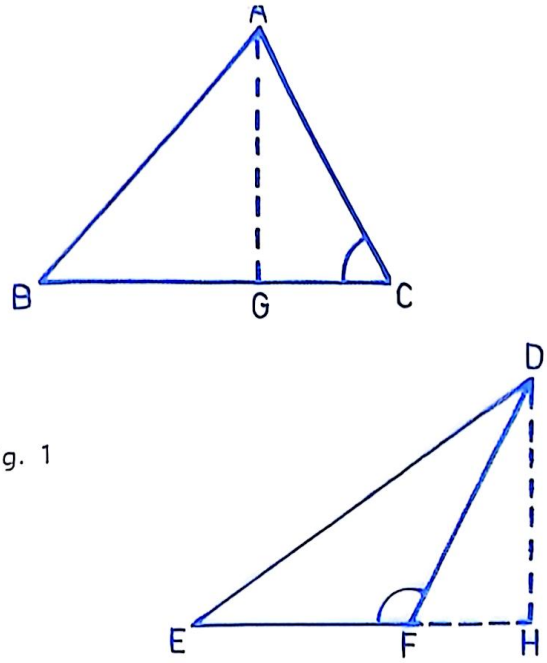


Fig. 1

10.1.4. Prin teorema lui Pitagora se află că cealaltă latură este de 33 m. Aria = 1848 m².

10.1.5. Cealaltă latură este de 3120 : : 80 = 39 m. Prin teorema lui Pitagora se află că diagonala este de 89 m.

10.1.6. Cealaltă catetă este 2 · 924 : : 33 = 56 m. Prin teorema lui Pitagora se află că ipotenuza este de 65 m.

10.1.7. Prin teorema lui Pitagora se află că cealaltă catetă este de 28 m. Aria = 630 m².

10.1.8 (fig. 2). Înălțimea triunghiului se află prin teorema lui Pitagore, $AD = 56$ cm. Aria = 1848 cm².

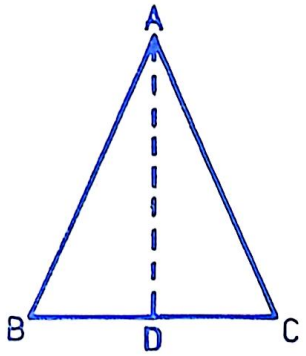


Fig. 2

10.1.9. (fig. 2). Se află întîi că $BC =$ = 78 cm. Latura AB se află din triunghiul ABD, $AB = 89$ cm.

10.1.10. Se adună ariile triunghiurilor ABD și CBD. Prima este de 150 m². Fie $AC \cap BD = O$. Pentru aria a doua se calculează BD și OD din triunghiul ABD, apoi OC din triunghiul COD; $DB = 25$ m, $OD = 9$ m, $OC = 40$ m, $\mathcal{A} = 650$ m².

10.1.11. Ce fel de triunghiuri sînt BAD și CBD? Fie E picioarul perpendicularei coborîte din B pe AD; înălțimea triunghiului BAD se află din triunghiul ABE; $BE = 90$. La fel se află că înălțimea triunghiului CDB este $CF = 68$. Aria = 7788 m².

10.1.12. a) Ce fel de patrulater este $MRSQ$? Fie B, b și i bazele și înălțimea trapezului; se află aria acestui paralelogram și se împarte la 2. b) $\triangle EBF = \triangle ECD$ (ULU), deci aria trapezului este egală cu aria triunghiului ADF.

10.1.13. Fie B, b și i bazele și înălțimea trapezului. Ariile celor două triunghiuri sînt $\frac{Bi}{2}$ și $\frac{bi}{2}$; aria trapezului este suma lor.

10.1.14. $c = \frac{a+b}{2}$.

10.1.15. Din formula pentru aria trapezului, se scoate că suma bazelor este $B + b = 48$ cm. Linia mijlocie este de $\frac{B+b}{2} = 24$ cm (v. probl. 8.6.1).

10.1.16. $\mathcal{A} = \frac{(a+b)i}{2}$; $i = \frac{2\mathcal{A}}{a+b}$; $a = \frac{2\mathcal{A}}{i} - b$; $b = \frac{2\mathcal{A}}{i} - a$.

10.1.17 (fig. 4). Pentru a afla baza mare, se duce CE perpendicular pe AB. Ce fel de triunghi este CEB? $EB =$ = $CE = 7$ cm, deci $AB = 8 + 7 =$ = 15 cm. Aria = 80,50 cm².

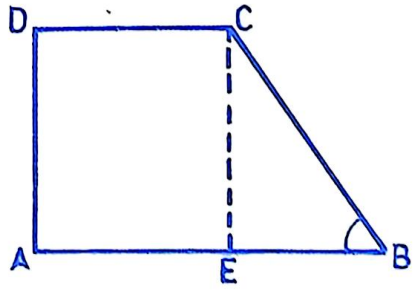


Fig. 4

10.1.18 (fig. 4). Fie CE înălțimea trapezului. Ce fel de triunghi este CEB? Aria $= 40$ cm^2.

10.1.19 (fig. 5). Pentru a afla înălțimea CF, se duce CE paralel cu AD și se calculează EB. Ce fel de triunghi este CEB? CF fiind înălțimea lui, este și mediană, deci $FB = \frac{EB}{2} = 5$ m. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul CFB, dă $CF = 12$ m. Aria $=$ $= 156$ m^2.

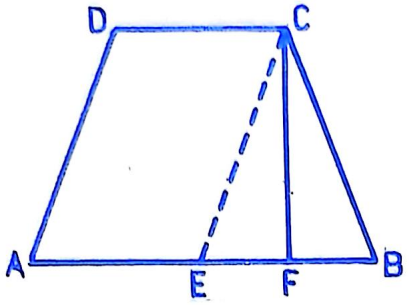


Fig. 5

10.1.20 (fig. 6). Ducem CE paralel cu DA. Ce fel de triunghi este CEB? $CE = CB = EB = a$. Ce fel de triunghiuri sînt ADE și EDC?

$$\mathcal{A} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}.$$

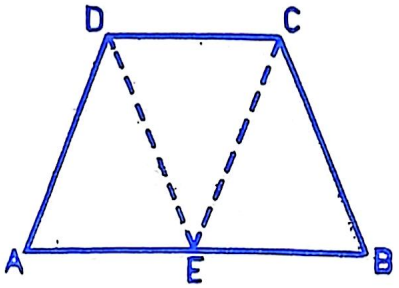


Fig. 6

10.1.21. *Soluția I* (fig. 7). Ducem CE paralel cu DA. Triunghiul CEB este echilateral; aria lui este $a^2\sqrt{3}$. Paralelogramul $AECD$ are aceeași înălțime cu triunghiul CEB și baza lui este jumătate din latura triunghiului, deci el este echivalent cu triunghiul. Aria trapezului este $2a^2\sqrt{3}$.

Soluția II. Fie G intersecția laturilor neparalele ale trapezului. Se calculează unghiurile triunghiului GAB. Ce fel de triunghi este GAB? GDC? În triunghiul GDC se cunoaște o latură, $DC = a$, deci $GD = a$, $GA = 3a$, $AB = 3a$. Se calculează ariile triunghiurilor echilaterale GAB și GDC și diferența lor.

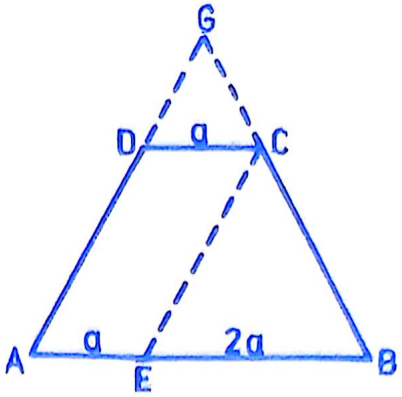


Fig. 7

10.1.22 (fig. 8). Semidreapta poate să taie latura BC sau CD. În primul caz partea din trapez care interesează este triunghiul ABM, iar în cazul al doilea, trapezul $ABCN$. Pentru a ști în ce caz ne găsim, calculăm aria triunghiului ABC; ea este de 60 cm^2. a) $\mathcal{A} = 45$; $45 < 60$, deci semidreapta trebuie să fie AM. În triunghiul ABM se cunoaște baza $AB = 15$ și aria $= 45$. Înălțimea sa este de 6 cm. Deci se duce o paralelă la AB situată la 6 cm de ea; fie M intersecția ei cu latura BC. Semidreapta este AM. b) $80 > 60$, deci semidreapta trebuie să taie latura CD, într-un punct N. Aria trapezului întreg este 100. Dacă aria părții situate sub dreaptă este 80, aria triunghiului AND este $100 - 80 = 20$; înălțimea lui este 8, deci $DN = 5$ cm.

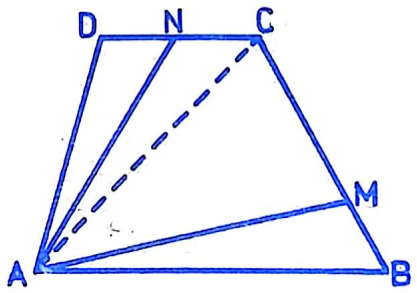


Fig. 8

10.1.23. *Soluția I.* Fie x și y lungimile bazelor. Formula pentru aria trapezului dă

$$84 = \frac{(x+y)\cdot 7}{2}; \quad x + y = 24.$$

Pe de altă parte se dă $x - y = 6$. Acest sistem de două ecuații dă

$$x = 15,\ y = 9.$$

Soluția II (fig. 9). Pentru a putea folosi faptul că se cunoaște diferența bazelor, ducem prin C paralela la AD. Atunci $AE \equiv CD$, deci EB este diferența bazelor, $EB = 6$. Acum putem afla aria triunghiului CEB, ea este de $\frac{6 \cdot 7}{2} = 21$ cm^2. Rezultă că aria paralelogramului $AECD$ este de $84 - 21 = 63$ cm^2. Înălțimea lui este dată, 7 cm, deci $AE = 63 : 7 = 9$ cm, deci $DC = 9$ cm. Diferența bazelor fiind de 6 cm, rezultă că $AB = 9 + 6 = 15$ cm.

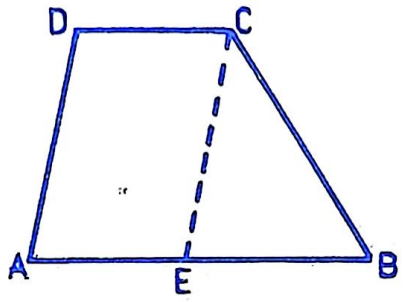


Fig. 9

10.1.24 (fig. 10). Ariile triunghiurilor BAC și DAC sînt

$$\frac{d_1 \cdot OB}{2} \text{ și } \frac{d_1 \cdot OD}{2}.$$

Aria cerută este suma lor:

$$\frac{d_1 \cdot OB}{2} + \frac{d_1 \cdot OD}{2} =$$

$$= \frac{d_1 \cdot (OB + OD)}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}.$$

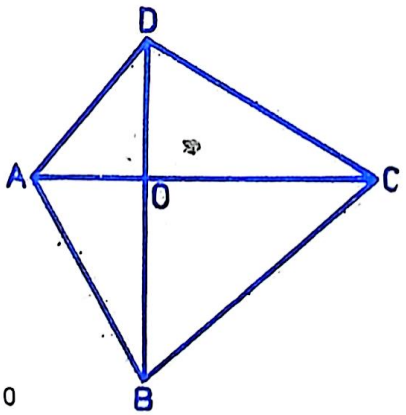


Fig. 10

10.1.25. Poligonul se compune din triunghiul ABC, cele trei pătrate și triunghiurile AGH, EFC și DBK. $\triangle AGH \equiv \triangle ABC$ (LUL). În triunghiul EFC se ia ca bază latura FC, atunci înălțimea este EL. $\triangle ECL \equiv \triangle BCA$, căci triunghiurile au ipotenuzele congruente și $\hat{1} \equiv \hat{2}$, deoarece au același complement BCL, deci $EL = AB = c$. Rezultă că aria $EFC = \frac{bc}{2}$. În triunghiul DBK, se ia ca bază latura BK și se află în mod analog că aria sa este $\frac{bc}{2}$. Aria hexagonului este $a^2 + b^2 + c^2 + 2bc$ sau

$$2(b^2 + c^2 + bc).$$

10.1.26 (fig. 12). Există mai multe posibilități: se descompune polígonul în părți, se află ariile părților și se face suma lor. O cale simplă este de a adăuga triunghiurile punctate. Aria fiecăruia din aceste triunghiuri este $\frac{(a-b)^2}{8}$. Aria cerută este

$$a^2 - 4\frac{(a-b)^2}{8} = \frac{a^2 + 2ab - b^2}{2}.$$

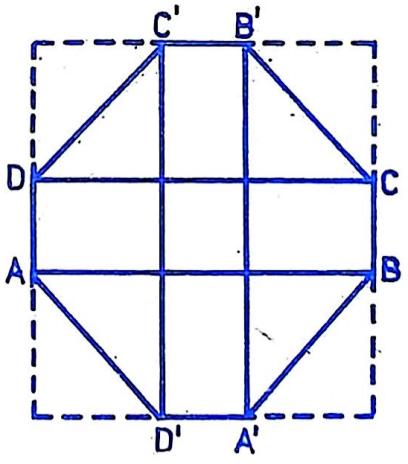


Fig. 12

10.1.27. a) Fie R raza cercului (fig. 13). $\triangle ABC \equiv \triangle AFE$ (LUL) și $\triangle AED \equiv \triangle ACD$ (LLL). Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul ACD dă, $AC = R\sqrt{3}$; $BG = \frac{R}{2}$.

$\mathcal{A}_1 = \text{aria } ACD = \frac{AC \cdot CD}{2} =$

$= \frac{R\sqrt{3} \cdot R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{2};$

$\mathcal{A}_2 = \text{aria } ABC = \frac{AC \cdot BG}{2} =$

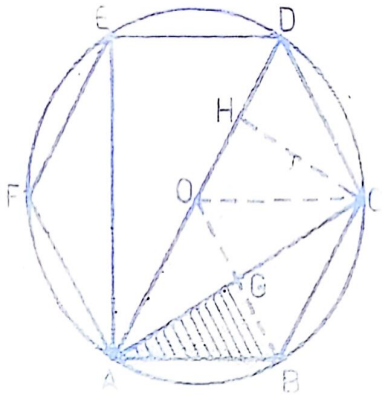
$= \frac{R^2\sqrt{3}}{2};$

$\mathcal{A} = \text{aria hexagonului} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4};$

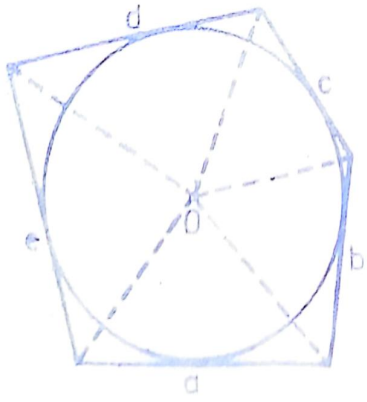
$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}} = \frac{1}{6}.$$

b) Ducem CH perpendicular pe AD. Triunghiul ABC se compune din două triunghiuri congruente cu ABG, triunghiul ACD din 4 și hexagonul din 12 triunghiuri congruente cu ABG, deci

$$\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}, \quad \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$$



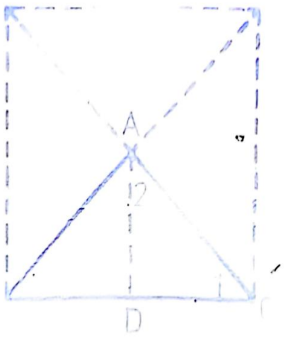
10.1.28. (fig. 14). Fie O centrul cercului. Poligonul se descompune în triunghiuri așa cum arată figura. Care sînt înălțimile acestor triunghiuri? Dacă notăm cu a, b, c... laturile poligonului, aria lui este



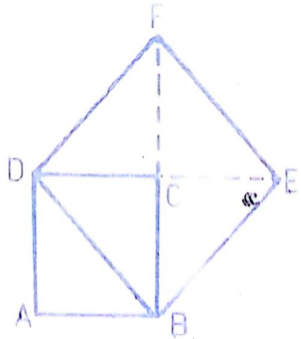
$$\mathcal{A} = \frac{aR}{2} + \frac{bR}{2} + \frac{cR}{2} + \ldots =$$

$$= \frac{(a + b + c + \ldots)R}{2} = \frac{pR}{2}.$$

10.1.29 (fig. 15). Fie AD înălțimea triunghiului. $DC = \frac{a}{2}$. Cîte grade are unghiul 1? unghiul 2? Deoarece $\hat{1} \equiv \hat{2}$, triunghiul ABC este isoscel, deci $AD = \frac{a}{2}$. Aria $= \frac{a^2}{4}$. Geometric: Triunghiul ABC este un sfert din pătratul cu latura a.



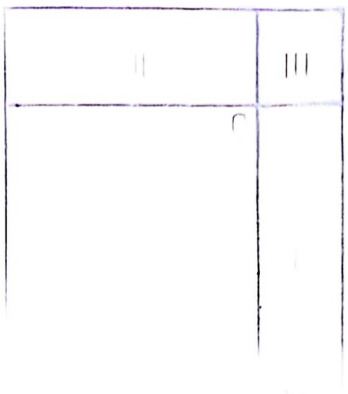
10.1.30 (fig. 16). Fie $ABCD$ un pătrat și a lungimea laturii sale. Aria lui este a^2. Pătratul al doilea este $DBEF$, aria sa este DB^2. Teorema lui Pitagora dă $DB^2 = 2a^2$. Raportul este 2. Geometric: Primul pătrat este format din două triunghiuri congruente cu BCD și al doilea din patru, deci...



Observare. Figura 16 este dată uneori ca o demonstrație a teoremei lui Pitagora pentru un triunghi dreptunghic

și isoscel. Se pornește de la triunghiul dreptunghic și isoscel ABD. Pătratul construit pe cateta AB este $ABCD$, care este totodată pătratul construit pe cateta AD, iar pătratul mare este construit pe ipotenuză. S-a demonstrat că aria pătratului mare este dublul ariei pătratului mic, adică suma ariilor pătratelor construite pe catete.

10.1.31. a) Fie x latura pătratului $(x+3)^2 = x^2 + 51$; $x = 7$. Geometric: Fie $ABCD$ pătratul (fig. 17). Dacă latura lui se mărește cu segmentul BE, se adaugă dreptunghiurile I și II, care sînt congruente, și pătratul III. Aria acestui pătrat este de 9 m^2, deci suma ariilor I și II este $51-9 = 42$ m^2, fiecare din ele este de 21 m^2, $BE = 3$ m, deci... b) $(x-4)^2 = x^2 - 88$; $x = 13$ m.



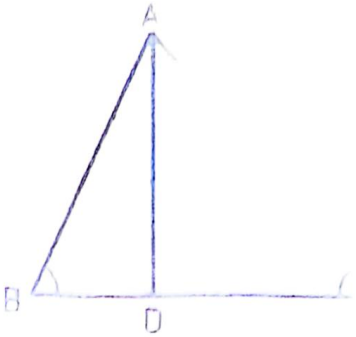
10.1.32 (fig. 18). Aria tabloului împreună cu rama este $2a^2$, deci latura exterioară a ramei este $\sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$. Lățimea ramei este

$$\frac{a\cdot\sqrt{2}-a}{2} = \frac{a(\sqrt{2}-1)}{2} = 0{,}2a.$$

10.1.33. Fie AD o înălțime a triunghiului (fig. 19). Din triunghiul ADC se scoate $AD = b \sin C$. Aria triunghiului este

$$\mathcal{A} = \frac{BC\cdot AD}{2}.$$

Se înlocuiește BC prin a și AD prin $b \sin C$. Folosind alte înălțimi se obțin celelalte formule.



10.1.34 (fig. 19). Se află întîi înălțimea, $AD = 12$ m. Din triunghiul ADC se scoate $\sin C = \frac{12}{15}$; $\hat{C} = 53°$. Pentru a afla unghiul B, se calculează DC apoi BD. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul ABD, dă $DC = 9$, deci $BD = 7$; Triunghiul ABD dă $\operatorname{ctg} B = \frac{7}{12}$; $\hat{B} = 60°$.

10.1.35. a) Se află înălțimea AD cunoscînd aria și baza BC, apoi latura AC și segmentul DC din triunghiul ADC, apoi $BD = BC - DC$, apoi unghiul B și latura AB din triunghiul ABD. Sau: Se află înălțimea BE și segmentul EC din triunghiul BCE, apoi latura AC cunoscînd aria și înălțimea BE; apoi $AE = AC - EC$, apoi unghiul A și latura AB din triunghiul ABE. b) Cunoscînd aria și înălțimea, se află baza BC, apoi se află din triunghiul ADC latura AC și segmentul DC, apoi $BD = BC - DC$, apoi se află din triunghiul ABD latura AB și unghiul B. c) Cunoscînd aria și înălțimea AD se află latura BC; la fel se află latura AC. Din triunghiul ADC se află unghiul C și segmentul DC; apoi $BD = BC - DC$ și din tri-

unghiul ABD se află unghiul B și latura AB.

10.1.36. (fig. 20). Înălțimea este $DE = 240 : 20 = 12$ cm. Din triunghiul DAE se scoate $\sin A = \frac{12}{15} = 0{,}800$; $\hat{A} = 53°$.

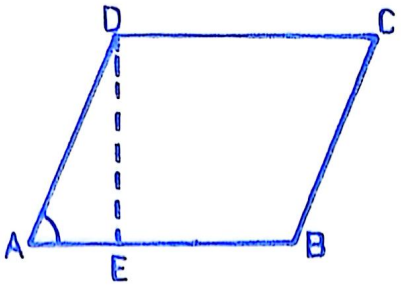


Fig. 20

10.1.37 (fig. 21). Trebuie calculate laturile dreptunghiului. Ducem OE perpendicular pe AB. În triunghiul OAB, $OA = 20 : 2 = 10$ m și $\hat{1} = 130° : 2 = 65°$. Din triunghiul OAE scoatem

$$AE = 10 \sin 65° = 9{,}06 \text{ m},$$

$$OE = 10 \cos 65° = 4{,}23 \text{ m}.$$

$AB = 2 \cdot AE$; în triunghiul DAB, OE este linie mijlocie, deci $AD = 2OE$. Aria dreptunghiului este 153,2952 m².

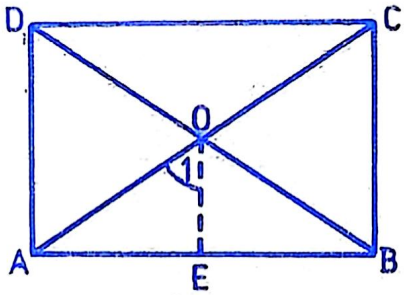


Fig. 21

10.1.38 (fig. 22). În triunghiul AOD se cunosc $OA = 12$ cm, $OD = 7$ cm și $\hat{O} = 50°$. Fie DE înălțimea lui. Din triunghiul ODE se scoate $DE = OD \sin \hat{O} = 5{,}362$ cm. Aria triunghiului este de 32,172 cm². Cele patru triunghiuri în care diagonalele împart paralelogramul sînt echivalente, deci aria paralelogramului este de 1286,88 cm².

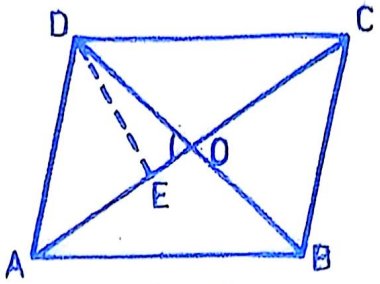


Fig. 22

10.1.39. Fie r raza cercului celui mai mic, și x, y, z, ... razele cercurilor consecutive. $\pi x^2 = 2\pi r^2$, deci $x = r\sqrt{2}$; $\pi y^2 = 3\pi r^2$, deci $y = r\sqrt{3}$ ș.a.m.d. Rezultă că

$$\frac{r}{1} = \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{3}} = \ldots$$

10.1.40. Fie a, b și c laturile triunghiului, L_1 și L_2 ariile celor două lunule, iar I și II ariile segmentelor semicercului mare situate în exteriorul triunghiului.

$$L_1 = \frac{\pi b^2}{4} - \text{I}, \quad L_2 = \frac{\pi c^2}{4} - \text{II}, \text{ deci}$$

$$L_1 + L_2 = \frac{\pi(b^2+c^2)}{4} - \text{I} - \text{II}.$$

Înlocuind $b^2 + c^2$ prin a^2, se obține

$$L_1 + L_2 = \frac{\pi a^2}{4} - \text{I} - \text{II}.$$

$\frac{\pi a^2}{4}$ este aria semicercului mare. Dacă din ea se scad segmentele I și II, rămîne aria triunghiului, deci...

Observare. Cele două lunule notate cu L_1 și L_2 se numesc lunulele lui Hipocrate, după numele matematicianului din Grecia antică care a descoperit relația de mai sus. Această relație era la timpul său foarte importantă din motivul următor. Una din problemele mari ale geometriei antice era cuadratura cercului (v. observarea de la probl. 15.3.13), adică găsirea unui pătrat echivalent cu un cerc dat; mai general, de a găsi o relație între aria

unei figuri mărginile, în întregime sau în parte, de arce de cerc și un poligon. Prin propoziția de față se stabilește o astfel de relație.

10.2.1. a) Fie b baza comună, iar i și i' înălțimile dreptunghiurilor. Ariile lor sînt

$$\mathcal{A} = bi.\ \mathcal{A}' = bi',\ \text{deci}\ \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = \frac{bi}{bi'} = \frac{i}{i'}.$$

b) Analog cu a). c) 5035,19 m². d) 3.33440 m². e) Cu 15. f) $\frac{5}{8}$.

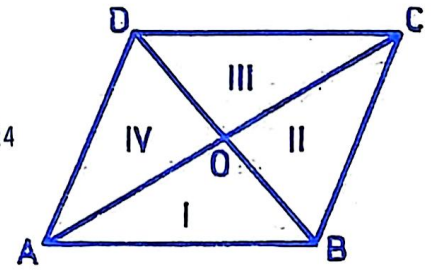
Observare. Dacă în locul dreptunghiului se consideră un paralelogram, totul rămîne valabil.

10.2.2. Aceeași soluție.

10.2.3. Se compară bazele și înălțimile. Triunghiurile sînt echivalente.

10.2.4 (fig. 24). În triunghiul ABC, BO este mediană, deci aria I = aria II ș.a.m.d. Cele patru triunghiuri sînt echivalente.

Fig. 24



10.2.5 (fig. 25). Se compară ariile triunghiurilor ADB și ADC luînd ca baze BD și DC. Aceste triunghiuri sînt echivalente, deci aria ABD este $\frac{1}{2}$ din aria ABC. În triunghiul ABD, BE este mediană, deci fiecare dintre ariile I și II este $\frac{1}{2}$ din aria ABD, deci $\frac{1}{4}$ din aria ABC. La fel se vede că și ariile III și IV sînt cîte $\frac{1}{4}$ din aria ABC.

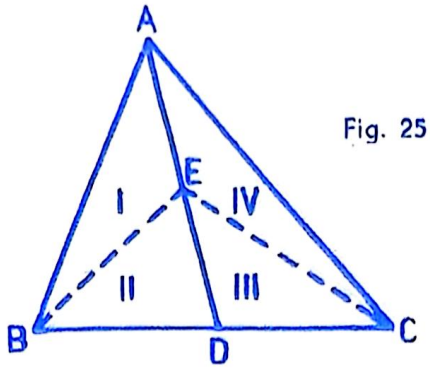


Fig. 25

10.2.6. Cînd segmentul AB alunecă pe dreapta d și CD pe dreapta e, lungimile bazelor se schimbă? Dar înălțimea? Aria trapezului rămîne constantă, nu există minim.

10.2.7 (fig. 26). Este indiferent care bază mărim, căci, dacă $BE = CF$, triunghiurile CBE și BFC au bazele congruente și aceeași înălțime, deci ariile lor sînt egale.

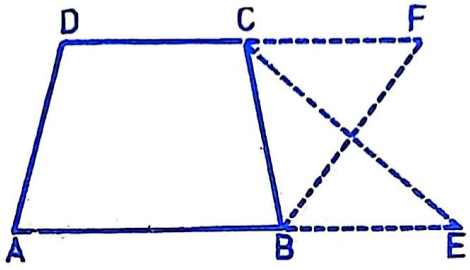


Fig. 26

10.2.8. (fig. 27). $\triangle CMP \equiv \triangle BMN$ (ULU) oricum a duce dreapta. Trapezul $ANPB$ este echivalent cu $ABCD$. Nu există nici maxim, nici minim.

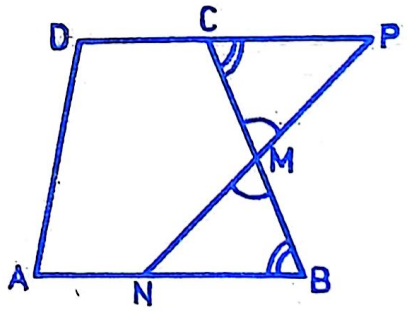


Fig. 27

10.2.9. Se compară bazele și înălțimile trapezelor $ABCD$ și $ABFE$. Aria $ABFE = 90 \cdot 2 = 180$ cm². Din ea se scad aria trapezului $ABCD$ și aria dreptunghiului $DCFE$. Răspuns: 48 cm².

Observare. Este surprinzător faptul că baza mare a trapezului nu intervine în problemă, ea nu este dată și n-am avut nevoie de ea. Ar urma că, dacă baza mare se schimbă, aria cerută nu se schimbă. Pe de altă parte se vede că, dacă punctul B se mută pe dreapta AB spre stînga, aria triunghiului FCB scade, căci baza FC rămîne aceeași și înălțimea HB scade. Cum se explică această contradicție?

Explicație: Se cunosc aria, baza mică și înălțimea trapezului, deci baza mare se poate afla, ea este determinată, punctul B nu se poate muta. Faptul că în cursul rezolvării nu am avut nevoie de ea nu înseamnă că aria cerută nu depinde de ea. Mai mult, există o altă cale de rezolvare a problemei în care se folosește baza mare. Fie $AB = x$. Formula pentru aria trapezului dă:

$$\frac{(x+7)6}{2} = 90; \quad x = 23.$$

Deci $AB = 23$ cm. Luăm ca baze ale triunghiurilor laturile ED și FC; atunci înălțimile sînt AG și HB. Suma ariilor lor este

$$\frac{ED \cdot AG}{2} + \frac{FC \cdot HB}{2} = \frac{6AG + 6HB}{2} = 3(AG + HB).$$

Dar $AG + HB = AB - GH = 23 - 7 = 16$. Deci suma ariilor $= 3 \cdot 16 = 48$ cm^2.

10.2.10 (fig. 29). Fie $AB = a$ baza și $EF = i$ înălțimea paralelogramului. $ME + MF = i$. Suma ariilor acestor triunghiuri este

$$\mathcal{A} = \frac{aME}{2} + \frac{aMF}{2} = \frac{a(ME + MF)}{2} = \frac{ai}{2}.$$

Dar ai este aria paralelogramului, deci $\mathcal{A}$ este jumătate din aria paralelogramului — oricare ar fi punctul M. Ea nu are nici maxim, nici minim.

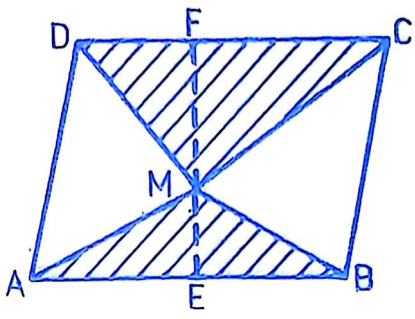


Fig. 29

Observare. La fel se vede că nici suma ariilor triunghiurilor MAD și MBC nu depinde de poziția punctului M.

10.2.11 (fig. 30). Fie $ABCD$ paralelogramul inițial și $ABC'D'$ paralelogramul mărit, $AD' = nAD$, DE și $D'E'$ înălțimile.

Ariile sînt: $\mathcal{A} = AB \cdot DE$, $\mathcal{A}' = AB \cdot D'E'$, deci $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{D'E'}{DE}$. Triunghiurile asemenea DAE și $D'AE'$ dau $\frac{D'E'}{DE} = \frac{D'A}{DA}$. Dar $\frac{D'A}{DA} = n$, deci $\frac{D'E'}{DE} = n$, deci $\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = n$.

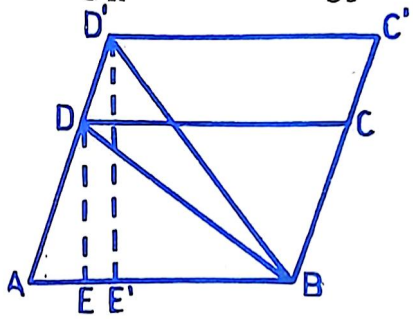


Fig. 30

10.2.12. Aria BOD este jumătate din aria OBC ș.a.m.d. Suma ariilor este jumătate din aria triunghiului ABC.

10.2.13 (fig. 32). Se compară înălțimile IM, IN și IP. v. probl. 10.2.2.

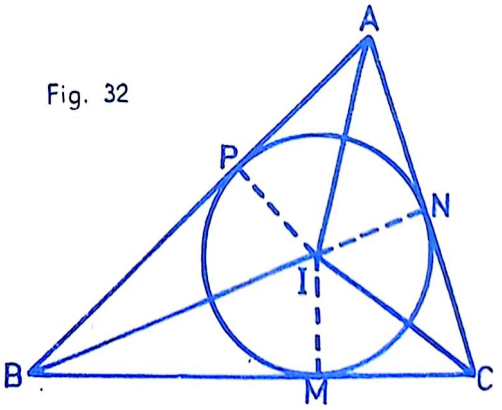


Fig. 32

10.2.14. a) Se compară (fig. 33) triunghiurile FBD, FDE, EDC și AFE (LLL). Din cîte astfel de triunghiuri este format fiecare patrulater. Aria fiecăruia din ele este jumătate din aria triunghiului. b) Din cîte triunghiuri este format fiecare patrulater? Aria sa este trei sferturi din aria triunghiului.

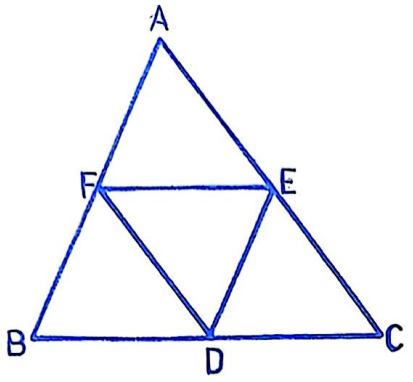


Fig. 33

10.2.15. *Soluție I* (fig. 34). Cele două părți sînt echivalente dacă și numai dacă aria triunghiului CMB este jumătate din aria trapezului. Ca triunghiul să aibă aceeași arie cu trapezul, trebuie ca baza sa să fie $AB + DC$ (v. probl. 10.1.12); ca aria triunghiului să fie jumătate din aria trapezului trebuie ca baza triunghiului să fie $\frac{AB + DC}{2}$, adică să aibă aceeași lungime cu linia mijlocie a trapezului. Construcție: Prin mijlocul E al laturii AD se duce paralela la CB; intersecția ei cu AB este punctul căutat M.

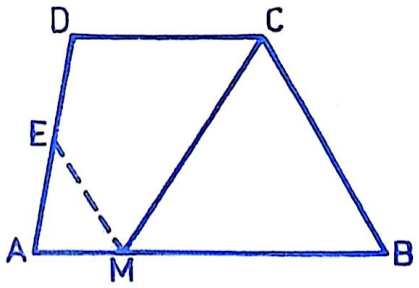


Fig. 34

Soluția II. Fie $AB = a$, $CD = b$, i înălțimea trapezului și $AM = x$, deci $MB = a - x$. Se pune condiția ca aria trapezului $AMCD$ să fie egală cu aria triunghiului MBC:

$$\frac{(x + b)i}{2} = \frac{(a - x)i}{2},$$

$$x = \frac{a - b}{2}.$$

Rezultatul concordă cu cel precedent.

10.2.16 (fig. 35). Orice mediană a unui triunghi împarte triunghiul în două triunghiuri echivalente (v. probl. 10.2.3). Fie $\mathcal{A}$ aria triunghiului ABC. În triunghiul PBC, BA este mediană, deci aria PAB este egală cu aria triunghiului inițial, aria $PAB = \mathcal{A}$. În triunghiul PAM, PB este mediană, deci aria PBM = aria $PAB = \mathcal{A}$. Rezultă că aria $PAM = 2\mathcal{A}$. În mod analog se stabilește că aria $MBN = 2\mathcal{A}$ și aria $NCP = 2\mathcal{A}$.

La triunghiul inițial ABC s-au adăugat trei triunghiuri de arie $2\mathcal{A}$. Raportul cerut este 7.

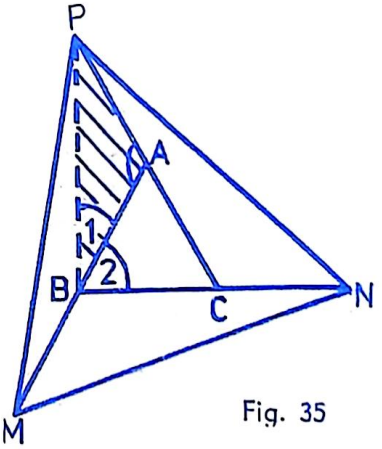
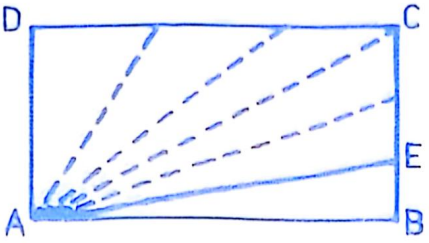


Fig. 35

10.2.17. A cîta parte din triunghiul respectiv este partea din aria haşurată situată sub diagonală? Cea situată deasupra diagonalei? a) $\frac{1}{2}$. b) $\frac{1}{3}$. c) $\frac{1}{4}$.

10.2.18. a) Ducem semidreptele din vîrful A (fig. 37); fie E punctul în care semidreapta cea mai apropiată de AB taie latura BC. Triunghiurile ABC și ABE au aceeași înălțime, AB. A cîta parte din triunghiul ABC trebuie să

Fig. 37



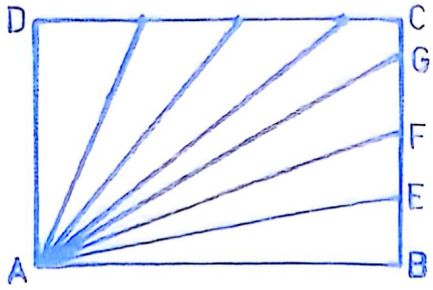


Fig. 38

fie triunghiul ABE? Rezultă că $BE = \frac{BC}{3}$. Ca triunghiurile următoare să fie echivalente cu ABE, trebuie să împărțim latura BC în 3 părți congruente și să unim punctele de diviziune cu vîrful A. La fel se procedează cu latura DC. b) Numărul 7 fiind impar, niciuna dintre semidrepte nu trece prin vîrful B. Fie și acum E punctul de diviziune cel mai apropiat de B (fig. 38). Ca aria ABE să fie $\frac{1}{7}$ din aria dreptunghiului, ea trebuie să fie $\frac{2}{7}$ din aria ABC, deci BE trebuie să fie $\frac{2}{7}$ din BC; de asemenea EF și FG. Deci împărțim latura BC în 7 părți congruente și unim punctul A cu punctele de diviziune luate din două în două. Cu latura DC se procedează la fel. c) Se ia $BE = \frac{2}{n}$ din BC, indiferent de paritatea lui n.

10.2.19. Dreptunghiul $ANMD$ (fig. 39) este $\frac{1}{3}$ din pătrat. Pentru a obține o parte mai mică decît $\frac{1}{3}$, prima tăietură trebuie să fie determinată de o semidreaptă ME din interiorul unghiului DMN, deci $E \in AB$, $AE < \frac{a}{3}$. a) Punem $AE = x$. Aria trapezului $AEMD$ trebuie să fie $\frac{1}{4}$ din aria pătratului.

$$\frac{\left(x + \frac{a}{3}\right) a}{2} = \frac{a^2}{4}; \quad x = \frac{a}{6} = AE.$$

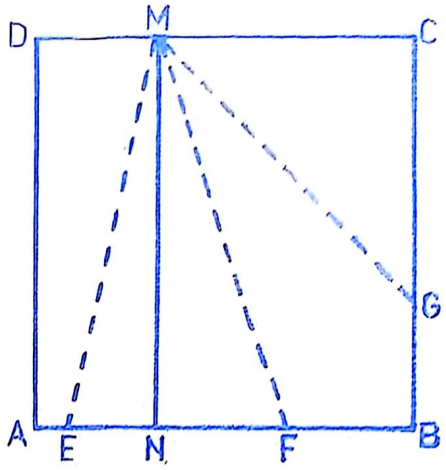


Fig. 39

Tăietura a doua va fi un segment MF. Aria triunghiului MEF trebuie să fie $\frac{a^2}{4}$.

$$\frac{EF \cdot a}{2} = \frac{a^2}{4}; \quad EF = \frac{a}{2}.$$

Acum $AE + EF = \frac{2a}{3}$; $FB = \frac{a}{3}$; aria $FBM = \frac{a^2}{6} < \frac{a^2}{4}$, deci tăietura a treia va fi un segment AG unde $G \in BC$. În loc să calculăm aria $MFBG$, punem condiția ca aria MGC să fie $\frac{1}{4}$ din aria pătratului.

$$\frac{MC \cdot CG}{2} = \frac{a^2}{4}; \quad CG = \frac{3a}{4}.$$

b) Tăieturile sînt ME, MF, MG și MH, unde E, F, $G \in AB$, $AE = \frac{a}{15}$, $EF = FG = \frac{2a}{5}$, $H \in BC$, $CH = \frac{3a}{5}$.

c) Tăieturile sînt ME, MF, MG, MH, MK și ML. $E \in AD$, $DE = \frac{6a}{7}$; $F, G, H \in AB$, $AF = \frac{5a}{21}$, $FG = GH = \frac{2a}{7}$; $K, L \in BC$, $CL = LK = \frac{3a}{7}$.

10.2.20. a) Se compară ariile triunghiurilor DAB și CAB (fig. 40). Ele au o parte comună, OAB; scăzînd această parte, rezultă că.. b) Presupunem că aria OAD = aria BOC. Adăugînd la ambele triunghiuri triunghiul OAB, rezultă că triunghiul DAB este echivalent cu CAB. Aceste triunghiuri au aceeași bază, deci înălțimile lor sînt congruente, $DE \equiv CF$. Ce fel de patrulater este $EFCD$? Reciproca este adevărată.

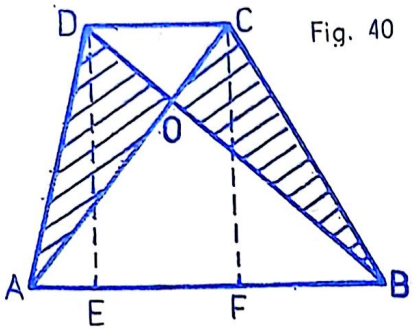


Fig. 40

10.2.21 (fig. 41). Dreapta MN împarte trapezul în două trapeze. Aria I = aria II și aria III = aria IV (v. probl. 10.2.20), deci...

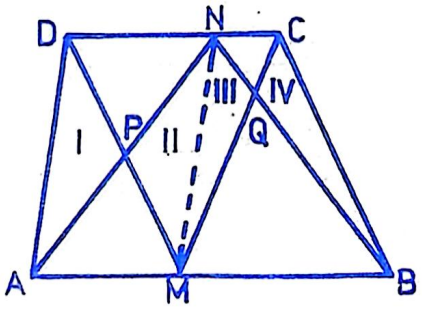


Fig. 41

10.2.22. a) Fie MN și MP înălțimile triunghiurilor (fig. 42). Ele trebuie să fie congruente. Aceste segmente reprezintă distanțele de la punctul M la dreptele AB și CD. Fie O intersecția acestor drepte. Punctul M se poate

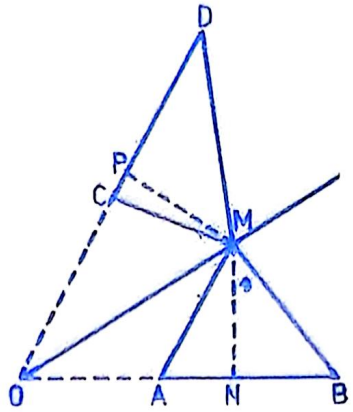


Fig. 42

mișca pe bisectoarea unuia dintre unghiurile O, celui ascuțit (fig. 42) sau celui obtuz (fig. 43). b) Deoarece $MN \parallel MP$, punctul M se poate mișca pe dreaptă d (fig. 44) paralelă cu AB și CD situată la aceeași distanță de ele.

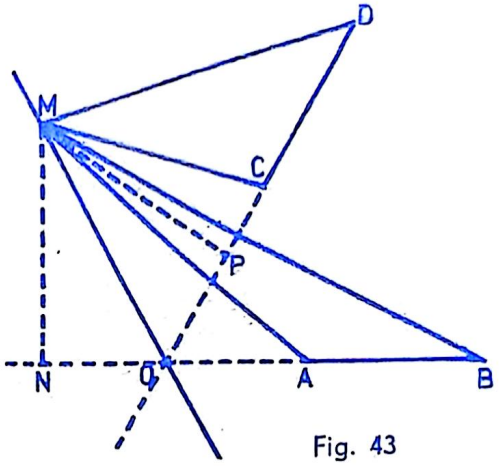


Fig. 43

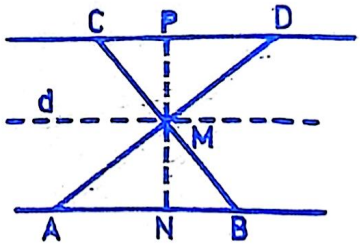


Fig. 44

10.3.1. Considerăm întîi cazul a două triunghiuri asemenea (fig. 45). Fie b și i baza și înălțimea unuia din ele. Dacă raportul de asemănare este k, baza și înălțimea triunghiului al doilea sînt (v. probl. 8.4.20):

$$b' = kb, \quad i' = ki.$$

Fie $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}'$ ariile celor două triunghiuri.

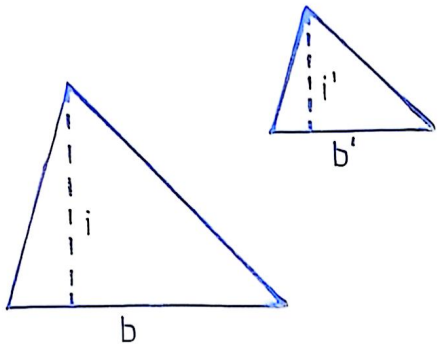


Fig. 45

$$\mathcal{A} = \frac{bi}{2}, \quad \mathcal{A}' = \frac{b'i'}{2} = \frac{kb \cdot ki}{2} = \frac{k^2 bi}{2}.$$

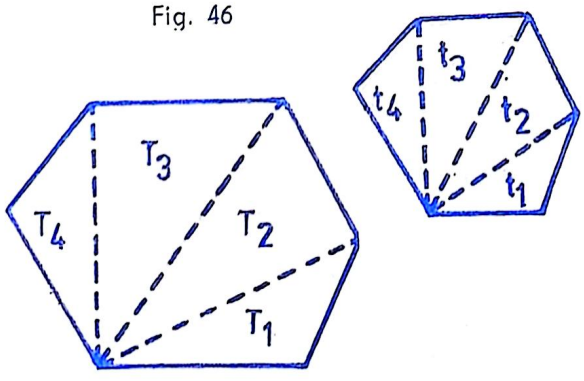
Deci

$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{k^2 bi}{2} : \frac{bi}{2} = k^2.$$

Considerăm acum două hexagoane asemenea (fig. 46), raportul de asemănare fiind un număr oarecare k. Ducem în fiecare din ele toate diagonalele care pornesc din două vîrfuri omoloage. Ele descompun poligoanele în triunghiuri asemenea două cîte două, $T_1 \sim t_1$, $T_2 \sim t_2$, $T_3 \sim t_3$, $T_4 \sim t_4$, raportul de asemănare a două triunghiuri corespunzătoare fiind același număr k. Conform rezultatului de mai sus,

$$\frac{t_1}{T_1} = k^2, \quad \frac{t_2}{T_2} = k^2, \quad \frac{t_3}{T_3} = k^2, \quad \frac{t_4}{T_4} = k^2.$$

Fig. 46



(Am notat ariile triunghiurilor cu aceleași litere ca triunghiurile.) Rezultă că

$$t_1 = k^2 T_1, \quad t_2 = k^2 T_2, \quad t_3 = k^2 T_3, \quad t_4 = k^2 T_4.$$

Adunînd aceste relații și scoțînd factorul comun k^2, se obține

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = k^2(T_1 + T_2 + T_3 + T_4),$$

deci

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3 + t_4}{T_1 + T_2 + T_3 + T_4} = k^2.$$

Dar $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \mathcal{A}'$ și $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = \mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ și $\mathcal{A}$ fiind ariile celor două poligoane. Deci

$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = k^2.$$

Demonstrația se face la fel oricare ar fi numărul laturilor poligoanelor.

Observări. 1) Din această teoremă rezultă că aria unei figuri crește cu mult mai repede decît laturile ei, în sensul următor: dacă laturile se dublează (figura obținută fiind asemenea cu cea inițială), aria se înmulțește cu 4; dacă laturile se triplează, aria se înmulțește cu 9; dacă laturile se înmulțesc cu 4, aria se înmulțește cu 16 ș.a.m.d. Acest lucru se vede direct pe figurile 47 și 48.

În figura 47 dreptunghiul al doilea este asemenea cu primul, raportul de asemănare fiind 1 : 2; laturile sale sînt de două ori mai mari decît laturile primului dreptunghi. Dar el este format din patru dreptunghiuri congruente cu primul, deci aria sa este de 4 ori mai mare. Dreptunghiul al treilea este și el asemenea cu primul, raportul de asemănare fiind 1 : 3, dar aria sa este, nu de 3 ori, ci de 9 ori mai mare decît aria primului dreptunghi. Situația este aceeași în figura 48.

Fig. 47

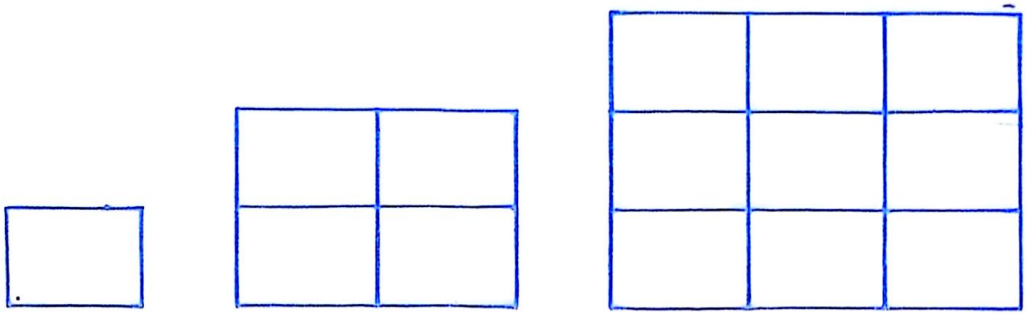
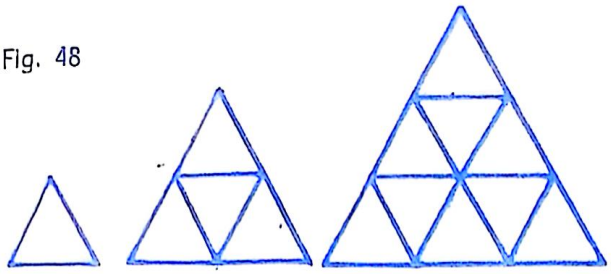


Fig. 48



2) Propoziţia de mai sus stă la baza modului în care s-au fixat multiplii şi submultiplii metrului pătrat. După ce s-a hotărît ca multiplii şi submultiplii metrului să crească şi să descrească din 10 în 10, nu se putea adopta aceeaşi scară pentru multiplii şi submultiplii metrului pătrat. De exemplu, un metru pătrat este un pătrat cu latura de 1 metru, şi un decimetru pătrat este un pătrat cu latura de 1 dm. Cele două pătrate sînt asemenea. Deoarece 1 m = 10 dm, raportul de asemănare este $\frac{1}{10}$, deci raportul ariile lor este $\left(\frac{1}{10}\right)^2$, adică $\frac{1}{100}$. Metrul pătrat are 100 dm^2. Tot aşa, 1 dm = = 10 cm, deci 1 $dm^2 = 100$ cm^2; 1 dam = 10 m, deci 1 $dam^2 = 100$ m^2 ş.a.m.d. Dacă multiplii şi submultiplii metrului cresc şi descresc din 10 în 10, multiplii şi submultiplii metrului pătrat trebuie să crească şi să descrească din 100 în 100.

3) Propoziţia de mai sus se extinde la două figuri oarecare, limitate în întregime sau în parte de linii curbe. De exemplu, două cercuri oarecare sînt asemenea. Dacă razele lor sînt r şi R, raportul de asemănare este $\frac{r}{R}$. Ariile lor sînt πr^2 şi πR^2, raportul ariilor este

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

adică egal cu pătratul raportului de asemănare. Situaţia este aceeaşi în cazul a două semicercuri, a două sferturi de cerc etc. (v. probl. 10.3.6).

10.3.2. a) Aria fiecăruia dintre triunghiurile AEJ, FBG, HCI este $\frac{4}{49}$ din aria triunghiului ABC. Raportul căutat este $\frac{37}{49}$. b) $\frac{n^2 - 3m^2}{n^2}$.

10.3.3. Luăm ca unitate aria triunghiului ABC. $\triangle FDC \sim \triangle ABC$, raportul de asemănare fiind $\frac{2}{3}$, deci

$$\text{aria } FDC = \frac{4}{9}.$$

$\triangle FDC \sim \triangle HDE$, raportul de asemănare fiind $\frac{1}{2}$, deci

$$\text{I} = \text{aria } HDE = \frac{1}{4} \text{ aria } FDC = \frac{1}{9}.$$

$$\text{II} = \text{aria } FDC - \text{aria } HDE = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.$$

La fel se află că $\text{IV} = \frac{1}{3}$.

Aria rămasă este

$$\text{III} = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

10.3.4. Se consideră triunghiul OAB și segmentul MN. Care este raportul dintre ariile triunghiurilor OMN și OAB? Aria cerută este $\frac{\mathcal{A}}{4}$.

10.3.5. Fie ABC triunghiul, $MN \parallel BC$, $M \in AB$. Triunghiul AMN este asemenea cu triunghiul ABC. Raportul ariilor acestor triunghiuri este $\frac{1}{2}$ dacă raportul de asemănare este $\frac{1}{\sqrt{2}}$, deci $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

10.3.6. a) Fie $AB = a$ și $AM = x$. $x^2 = \frac{a^2}{2}$; $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. b) Fie R și x razele celor două cercuri. $\pi x^2 = \frac{\pi a^2}{2}$; $\frac{x}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; c) Fie u unghiul sectorului, $OP = R$ și $OM = x$. $\frac{\pi x^2 u}{360} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi R^2 u}{360}$; $x^2 = \frac{R^2}{2}$;

$$\frac{x}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

d) Dacă aria pătratului mic, a cercului mic, a sectorului mic este a n-a parte din aria figurii mari, raportul este $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

10.3.7 (fig. 55). Fie $\mathcal{A}$ aria triunghiului ABC și $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ ariile triunghiurilor AM_1N_1, AM_2N_2, AM_3N_3, AM_4N_4. Triunghiurile

AM_1N_1 AM_2N_2 AM_3N_3 AM_4N_4

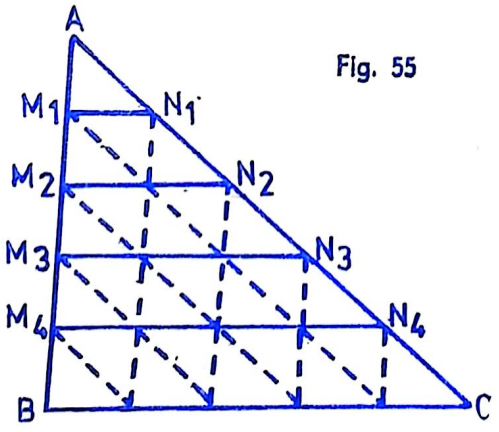


Fig. 55

sînt asemenea cu triunghiul ABC, rapoartele de asemănare fiind respectiv

$$\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{4}{5}$$

Deci

$$\frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}} = \frac{1}{25}, \quad \frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}} = \frac{4}{25}, \quad \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}} = \frac{9}{25},$$

$$\frac{\mathcal{A}_4}{\mathcal{A}} = \frac{16}{25}.$$

De aici se află $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$ și ariile trapezelor care se formează se află prin scăderi. Ariile căutate sînt: $\frac{1}{25}\mathcal{A}$, $\frac{3}{25}\mathcal{A}$, $\frac{5}{25}\mathcal{A}$, $\frac{7}{25}\mathcal{A}$, $\frac{9}{25}\mathcal{A}$. b) $\frac{1}{10\,000}\mathcal{A}$, $\frac{3}{10\,000}\mathcal{A}$, $\frac{5}{10\,000}\mathcal{A}$, ... $\frac{199}{10\,000}\mathcal{A}$.

Observări. 1) Dacă se duc și liniile punctate, triunghiul ABC se descompune în triunghiuri congruente, fiecare din ele este a 25-a parte din triunghiul ABC. Trapezele consecutive sînt formate din 3, 5, 7 și 9 triunghiuri mici. Rezultatul se citește astfel de pe figură.

2) Din figura 55 se poate scoate o teoremă de aritmetică. Numărul triunghiurilor care se găsesc deasupra liniilor M_1N_1, M_2N_2, ... este

$1,\ 1 + 3 = 4,\ 1 + 3 + 5 = 9,$

$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$ ...

Se adună mereu numere fără soț. Suma primelor două numere fără soț este $4 = 2^2$, suma primelor 3 numere fără soț este $9 = 3^2$ ș.a.m.d. Suma primelor n numere fără soț este n^2.

10.3.8. Poligoanele fiind asemenea, unghiurile lor sînt congruente două cîte două. Fie $\mathcal{A}$ și $\mathcal{A}'$ ariile lor și k raportul lor de asemănare. Atunci $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = k^2$. Dar, ariile fiind egale, $\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}'} = 1$, deci

$k^2 = 1$, deci $k = 1$. Aceasta înseamnă că raportul a două laturi corespunzătoare din cele două poligoane este 1, deci laturile corespunzătoare sînt congruente.

Observare. Intuitiv, această propoziție este evidentă. Două poligoane asemenea au aceeași formă, dar, în general, unul este mai mare și celălalt este mai mic. Dacă poligoanele sînt echivalente, ele sînt la fel de mari, dar pot avea forme diferite. Dacă două poligoane sînt asemenea și echivalente, ele au aceeași formă și aceeași mărime, ele sînt congruente.

10.4.1. *Soluția I* (fig. 56). Punem, pentru prescurtare, $AB = AC = a$, $MN = x$ și $MP = y$. Dreapta AM împarte triunghiul în două triunghiuri, AMB și AMC. Ariile lor, adunate, trebuie să dea aria triunghiului ABC. Aceste arii sînt: $\frac{ax}{2}$, $\frac{ay}{2}$ și $\frac{a \cdot BD}{2}$, unde $BD \perp AC$.

$$\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} = \frac{a \cdot BD}{2}.$$

Eliminînd numitorii și simplificînd cu a, se obține

$$x + y = BD.$$

Aceasta înseamnă că, dacă punctul M se mișcă pe bază, suma $x + y$ rămîne mereu egală cu BD, care nu se schimbă.

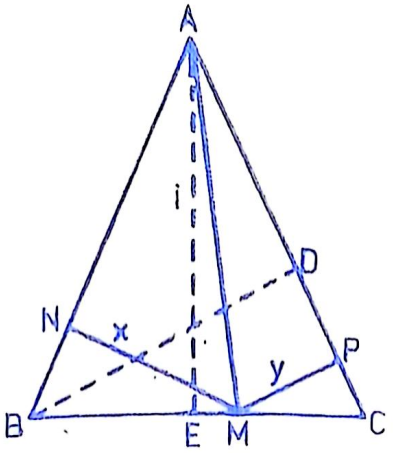


Fig. 56

Soluția II. Ducem înălțimea AE și notăm cu i lungimea ei. $\triangle MNB \sim \triangle AEB$, căci triunghiurile sînt dreptunghice și au unghiul B comun, deci

$$\frac{MN}{AE} = \frac{MB}{AB}; \quad \frac{x}{i} = \frac{MB}{a}.$$

La fel se obține

$$\frac{y}{i} = \frac{MC}{a}.$$

Adunînd aceste relații, se obține

$$\frac{x + y}{i} = \frac{MB + MC}{a}.$$

Dar $MB + MC = BC$, deci

$$\frac{x + y}{i} = \frac{BC}{a}; \quad x + y = \frac{i \cdot BC}{a}.$$

Cînd punctul M se mișcă pe bază, lungimile i, BC și a nu se schimbă, deci...

Observare. Se poate demonstra la fel că, dacă punctul M se mișcă pe prelungirea bazei, diferența dintre MN și MP rămîne constantă.

10.4.2. a) Unim punctul O (fig. 57) cu vîrfurile triunghiului. Suma ariilor triunghiurilor OBC, OCA și OAB este egală cu aria triunghiului ABC. Fie $OM = x$, $ON = y$, $OP = z$, a latura triunghiului ABC și i înălțimea lui.

$$\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{ai}{2}.$$

Alungind numitorii și simplificînd cu a, se obține

$$x + y + z = i.$$

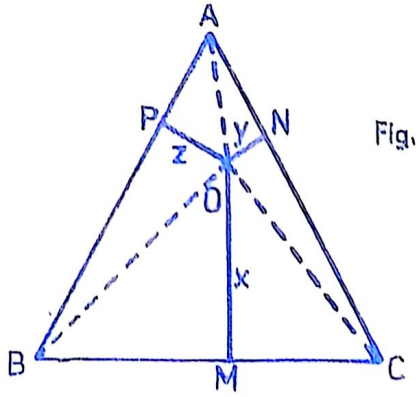


Fig. 57

Aceasta înseamnă că, dacă dăm punctului O o altă poziție, suma $x + y + z$ este de asemenea egală cu i, care nu se schimbă.

b) Considerăm, de exemplu, cazul pentagonului regulat (fig. 58). Unind punctul O cu vîrfurile se obțin 5 triunghiuri; suma ariilor lor este egală cu aria pentagonului. Dacă notăm cu a lungimea laturii pentagonului și cu $\mathcal{A}$ aria lui, obținem:

$$\frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} + \frac{au}{2} + \frac{av}{2} = \mathcal{A};$$

$$\frac{a(x + y + z + u + v)}{2} = \mathcal{A};$$

$$x + y + z + u + v = \frac{2\mathcal{A}}{a}.$$

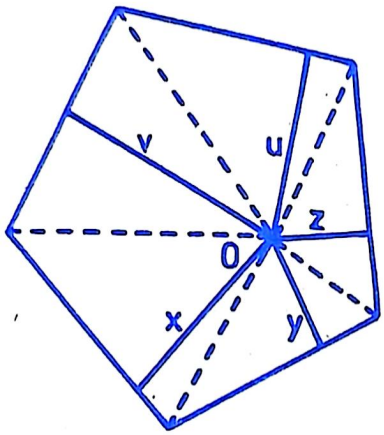


Fig. 58

$\mathcal{A}$ și a nu depind de alegerea punctului O, deci nici suma $x + y + z + u + v$ nu depinde de punctul O; cînd acest punct se mișcă în interiorul pentagonului, ea rămîne constantă. O expresie simplă a acestei constante se obține luînd O în centru. Atunci segmentele x, y, z, u și v devin apoteme ale pentagonului, deci

$$x + y + z + u + v = 5p$$

unde p este apotema.

În cazul unui poligon cu n laturi, suma distanțelor este np. Verificare în cazul triunghiului echilateral și al pătratului.

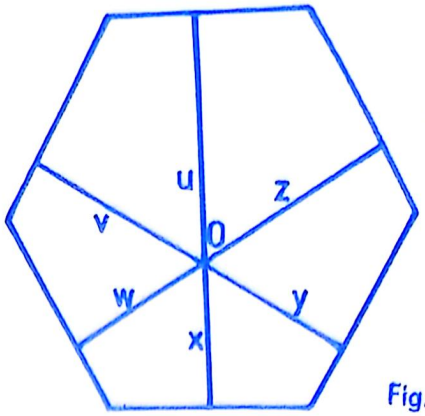


Fig. 59

Observare. Dacă n este un număr par, soluția este imediată (fig. 59), căci laturile sînt paralele două cîte două (v. probl. 7.15). De exemplu, în cazul hexagonului, $x + u = y + v = z + w = 2p$, deci...

10.4.3. a) Fie $\mathcal{A}_1$ și $\mathcal{A}_2$ ariile celor două triunghiuri (fig. 60). Triunghiurile au aceeași înălțime, deci (v. probl. 10.2.2).

$$(1) \qquad \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \frac{DB}{DC}.$$

b) Acum înălțimile sînt DE și DF; $DE \equiv DF$ căci, D fiind un punct al bisectoarei, este egal depărtat de laturile unghiului, deci

$$(2) \qquad \frac{\mathcal{A}_1}{\mathcal{A}_2} = \frac{AB}{AC}.$$

c) Din (1) și (2) rezultă că

$$(3) \qquad \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

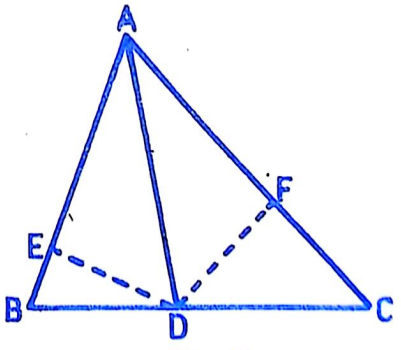


Fig. 60

d) ... laturile care formează unghiul. Această propoziție se numește *teorema bisectoarei*.

e) Proporția (3) arată că, dacă $AB \equiv AC$, $DB \equiv DC$ și invers. Se obțin astfel două teoreme referitoare la triunghiul isoscel: 1) Într-un triunghi isoscel, bisectoarea unghiului de la vîrf este mediană. 2) Un triunghi în care o bisectoare mediană este isoscel.

f) Demonstrația se poate repeta cuvînt cu cuvînt.

10.4.4. Patrulaterul haşurat în figura 61 are toate laturile congruente cu ipotenuza triunghiului. Unghiurile 1 şi 2 sînt unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic, deci $\hat{1}+\hat{2}=90°$, deci $\hat{3}=180°-90°=90°$. Patrulaterul este pătrat, aria sa este a^2. Partea haşurată în figura 62 este formată din două pătrate, aria sa este b^2+c^2. Părțile haşurate sînt echivalente, deci $a^2=b^2+c^2$. S-a obținut teorema lui Pitagora.

Observare. Această demonstrație a fost cunoscută în antichitate. Dacă se folosește calculul algebric, ajunge figura 61.

Aria pătratului mare este $(b+c)^2$; aria unui triunghi este $\frac{bc}{2}$, aria celor patru triunghiuri este $4\cdot\frac{bc}{2}=2bc$. Rezultă că aria părții haşurate este $(b+c)^2-2bc=b^2+c^2$. Pe de altă parte, această arie este a^2 deci $a^2=b^2+c^2$.

10.4.5. a) Se obține teorema lui Pitagora (fig. 63). b) Triunghiurile ABD şi AEC (fig. 64) sînt asemenea cu triunghiul ABC, rapoartele de asemănare fiind $\frac{AB}{BC}$ şi $\frac{AC}{BC}$. Acum triunghiurile ABD şi AEC nu acoperă triunghiul ABC, $\mathcal{A} > \mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$ şi se obține $BC^2 > AB^2+AC^2$. c) Acum $\mathcal{A} < \mathcal{A}_1+\mathcal{A}_2$ (fig. 65), deci $BC^2 < AB^2+AC^2$. Între BC^2 şi AB^2+AC^2 există relația

$$= \qquad > \qquad <$$

după cum

$$\hat{A}=90° \quad \hat{A}>90° \quad \hat{A}<90°.$$

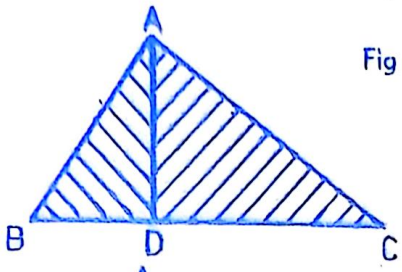


Fig. 63

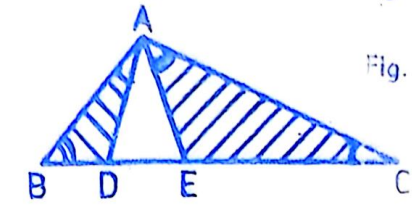


Fig. 64

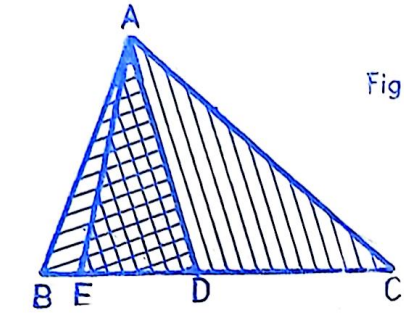


Fig. 65

De aici rezultă reciproca teoremei lui Pitagora (v. metoda folosită în probl. 15.1.9).

Observare. Teorema lui Pitagora se ilustrează de obicei printr-un desen ca cel din figura 67: un triunghi dreptunghic şi cîte un pătrat pe fiecare dintre laturile sale. În cele mai multe demonstrații se demonstrează, pe căi diferite, uneori complicate, că aria pătratului construit pe ipotenuză este suma ariilor celorlalte două pătrate.

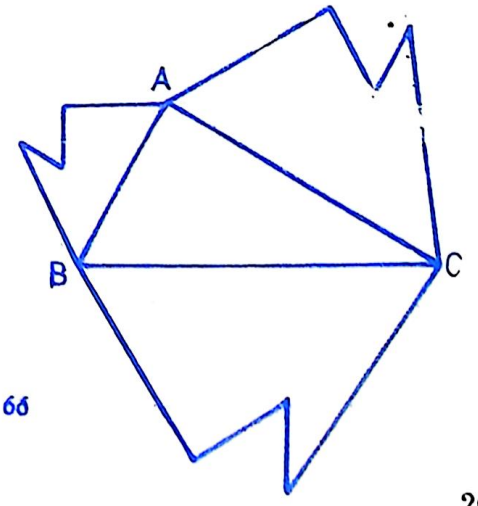


Fig. 66

De fapt, teorema lui Pitagora spune mai mult, şi anume: Dacă pe laturile unui triunghi dreptunghic se construiesc trei figuri asemenea oarecare F_1, F_2 şi F_3 (fig. 66), aria F_3 = aria F_1 + + aria F_2. (Sub această formă este enunţată teorema în Elementele lui Euclid, Cartea VI, propoziţia 31.) Ingeniozitatea demonstraţiei de mai sus constă în faptul că se construiesc, nu pătrate, ci triunghiuri asemenea cu cel dat şi nu în afara, ci în interiorul triunghiului.

10.4.6. a) Prin construcţie $AB \equiv EB$ şi $BF \equiv BC$; $\widehat{ABF} = \widehat{EBC} = 90° + \widehat{ABC}$. Deci triunghiurile sînt congruente (LUL). Ele se pot obţine unul din celălalt printr-o rotaţie de 90° în jurul punctului B. b) Luăm ca bază în amîndouă triunghiurile latura EB; atunci înălţimile sînt CM şi DE, care sînt congruente, deci... c) Luăm ca bază latura BF; atunci înălţimile sînt AL şi HB, care sînt congruente, deci... d) Triunghiurile (haşurate) CEB şi FAB sînt congruente, deci echivalente; primul este echivalent cu triunghiul DBE şi al doilea cu HBF, deci aceste triunghiuri sînt echivalente. Diagonala DB împarte pătratul I în două triunghiuri congruente, DEB şi DAB, deci aria pătratului I este dublul ariei triunghiului DEB; la fel se vede că aria dreptunghiului II este dublul ariei triunghiului HBF; aceste triunghiuri fiind echivalente, rezultă că... e) La fel se vede că pătratul III construit pe cateta AC este echivalent cu dreptunghiul $KGCH$, notat cu IV. Din [1]

$$\text{I} = \text{II} \text{ şi } \text{III} = \text{IV}$$

rezultă că $\text{I} + \text{III} = \text{II} + \text{IV}$. Dar

$$\text{I} = AB^2,\ \text{III} = AC^2 \text{ şi } \text{II} + \text{IV}$$

este aria pătratului construit pe ipotenuză, adică BC^2, deci...

[1] Notăm cu I, II, etc. atît figura, cît şi aria ei.

10.4.7. b) Segmentele $BE = 3$ şi $DG = 3$ se poartă de la B spre A şi de la D spre A. c) $a = 1$ şi $c < 0$. Ecuaţia are o rădăcină pozitivă şi una negativă, şi se află numai cea pozitivă.

10.5.1 (fig. 69). Fie MAB un triunghi şi d o paralelă la AB. Cînd vîrful M se mută în N, se obţine triunghiul NAB. Baza triunghiului s-a schimbat? Dar înălţimea?

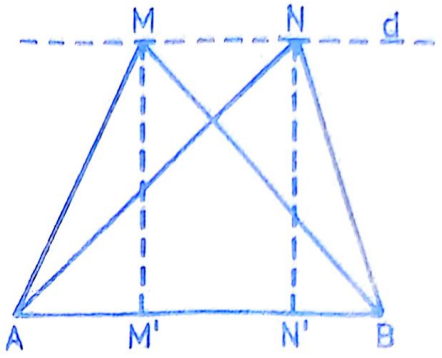


Fig. 69

Observare. Pe baza acestei propoziţii un triunghi oarecare MAB se poate transforma într-un triunghi ANB echivalent cu el care să aibă aceeaşi bază AB. Vîrful N poate fi orice punct al paralelei d, aşa că i se poate impune o condiţie suplementară, ca în problemele următoare.

10.5.2 (fig. 70). Fie $ABCD$ patrulaterul dat. Se duce prin vîrful C, de exemplu, paralela la diagonala BD; fie M intersecţia ei cu dreapta AB. Triunghiul AMD este cel căutat. În adevăr, partea ABD este comună patrulaterului şi triunghiului, iar triunghiul BDM este echivalent cu BDC.

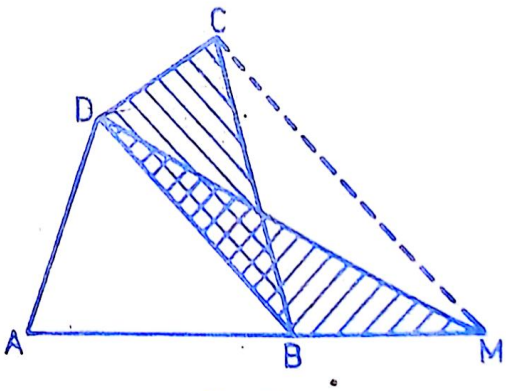
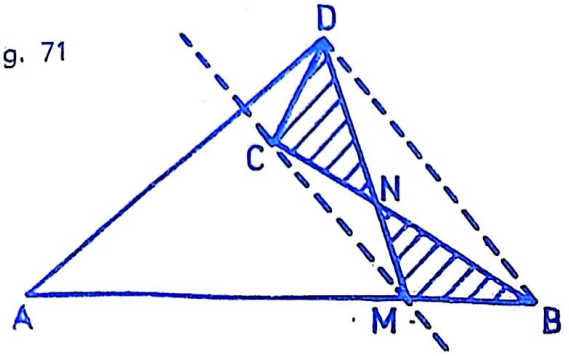


Fig. 70

Dacă se folosește diagonala BD, vîrful C se poate muta pe dreapta AB sau AD, sau vîrful A se poate muta pe dreapta BC sau CD; deci transformarea se poate face în patru moduri. Dacă se folosește diagonala AC, apar alte patru moduri. În total, construcția se poate face în opt moduri.

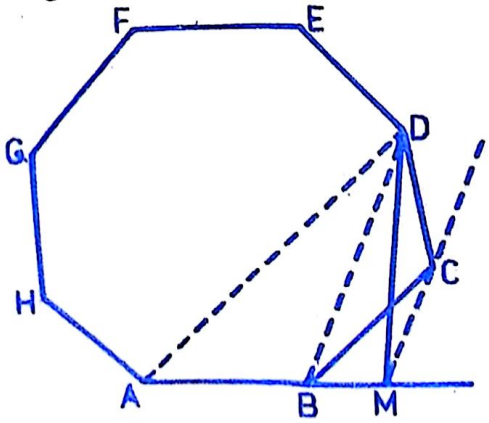
În cazul patrulaterului neconvex $ABCD$ (fig. 71), se face aceeași construcție. Triunghiul AMD este echivalent cu patrulaterul $ABCD$. În adevăr, prin trecerea de la patrulater la triunghi, se scade triunghiul NMB și se adaugă NCD. Or, triunghiurile BDC și BDM sînt echivalente, partea BDN le este comună, deci triunghiurile NMB și NCD sînt echivalente.

Fig. 71



Observare. Prin acest procedeu se poate transforma orice poligon într-un triunghi. În cazul unui poligon $ABCDE\ldots$ (fig. 72), se duce diagonala AD și, după procedeul de mai sus, patrulaterul $ABCD$ se transformă în triunghiul AMD echivalent cu el. Poligonul inițial devine $AMDEF\ldots$ echivalent cu el și are o latură mai puțin (vîrfurile B și C au dispărut și în locul lor a apărut un singur vîrf, M). Procedeul se repetă pînă cînd se obține un triunghi.

Fig. 72



10.5.3 (fig. 73). a) O diagonală a unui paralelogram împarte paralelogramul în două triunghiuri congruente. Notăm ariile părților așa cum se vede în figură. Atunci

$$\text{I} + \text{II} + \text{III} = \text{IV} + \text{V} + \text{VI}.$$

Dar $\text{I} = \text{VI}$ și $\text{III} = \text{IV}$, deci $\text{II} = \text{V}$.

b) Fie $AEMH$ paralelogramul dat și a segmentul dat. Se prelungește AE cu un segment EB congruent cu a; fie $BM \cap AH = D$. Prin B se duce paralela la AD și prin D paralela la AB; fie C intersecția lor. În sfîrșit, se prelungesc EM și HM pînă la intersecția lor cu DC și BC în G și F. Paralelogramul $MFCG$ este cel căutat.

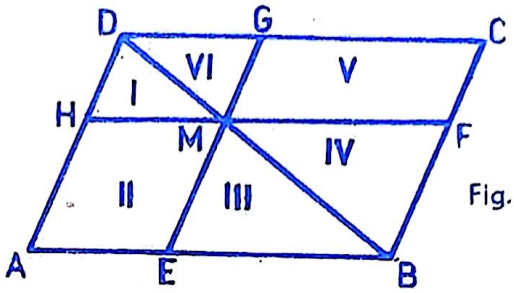


Fig. 73

Observare. Propoziția de mai sus este valabilă și în cazul particular cînd patrulaterul $ABCD$ este un dreptunghi, construcția indicată arată cum se poate transforma un dreptunghi într-un dreptunghi echivalent cu el care să aibă o latură dată.

În antichitate, această transformare era foarte importantă. Matematicienii greci nu făceau, ca noi, operații cu lungimile segmentelor, care sînt numere, ci cu segmentele însăși. Pentru ei, produsul a două segmente a și b era un dreptunghi cu laturile congruente cu a și b. Atunci o expresie ca $ab + cd$, în care a, b, c și d sînt segmente, era o sumă de două dreptunghiuri. Ca această sumă să fie tot un dreptunghi, unul din cele două dreptunghiuri trebuia transformat astfel încît una dintre laturile lui să fie congruentă cu o latură a celuilalt. Construcția se făcea prin procedeul descris mai sus. Dreptunghiul astfel transformat se putea „lipi" de celălalt.

10.5.4. Fie a și b dimensiunile dreptunghiului și x latura pătratului. Condiția este $x^2 = ab$. Se construiește media proporțională x a segmentelor a și b.

10.5.5 (fig. 74). Fie ABC triunghiul dat. Prin A se duce paralela la BC și se construiește un semicerc cu diametrul BC; fie D și E punctele lor de intersecție. Triunghiul căutat este DBC sau EBC. Sînt în aparență două soluții, de fapt, aceste triunghiuri sînt congruente. Condiția ca problema să aibă o soluție este ca paralela la BC dusă prin punctul A să taie cercul. Fie AF înălțimea triunghiului și OG raza perpendiculară pe BC. Condiția ca paralela să taie cercul este $AF \leqslant OG$. Dar $OG = \frac{BC}{2}$, deci condiția ca problema să aibă o soluție este $AF \leqslant \frac{BC}{2}$, adică înălțimea triunghiului să fie cel mult egală cu jumătate din bază. O latură a triunghiului ABC poate fi luată ca ipotenuză numai dacă înălțimea corespunzătoare este mai mică decît jumătatea ei.

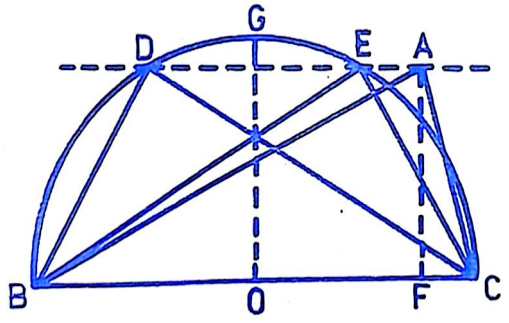


Fig. 74

Cap. 11

11.1.1. e) Ce poziție au una față de cealaltă dreptele BB' și DD'? Ele determină un plan, care conține punctele B, B', D' și D; dreptele se taie. i) Analog cu e). Se folosesc dreptele AA' și CC'. Dreptele $A'C$ și AC' se taie.

11.1.3. a) 9 drepte; b) 6 drepte sînt în același plan cu AA' și două nu; c) 5 drepte sînt în același plan cu AB și 3 nu.

11.1.4. a) 15 drepte. b) 10 drepte sînt în același plan cu AA' și 4 nu; c) 9 drepte sînt în același plan cu AB și 5 nu.

11.1.5. a) 12 drepte; b) 7 drepte sînt în același plan cu AA'. c) 7 drepte sînt în același plan cu AB.

11.1.6. a) 24 de drepte. b) 13 drepte sînt în același plan cu AA'. c) 13 drepte sînt în același plan cu AB.

11.1.7. a) $(n-1)+2+2 = n+3$ muchii sînt în același plan cu AA' și $2(n-2)$ nu. b) $(n-1)+2+1 = n+2$ muchii sînt în același plan cu AB și $(n-2)+(n-1) = 2n-3$ nu.

Observare. Dacă baza are două laturi paralele, de exemplu $AB \parallel DE$, situația din punctul b se schimbă, căci $C'D' \parallel AB$, deci $(n+3)$ muchii sînt în același plan cu AB și $(2n-4)$ nu.

11.1.8. a) 6 drepte sînt în același plan cu $A'C$ și 6 nu. b) Cîte 12 drepte din fiecare fel.

11.1.9. a) $A'D'$ și CC'; $B'C'$ și DD'. b) DC și $B'C'$; BC și $D'C'$.

11.1.10. Ce fel de patrulater este $ADGE$? Deci $EG \parallel AD$ și $EG \equiv AD$. Ce fel de patrulater este $AFHD$? Deci $FH \parallel AD$ și $FH \equiv AD$. Rezultă că $EFHG$ este un paralelogram, $EF \parallel GH$, punctele E, F, G și H sînt în același plan. Răspuns: da.

11.1.11. a) Punctele B și D' sînt comune celor două plane, deci intersecția este dreapta BD'. b) DB'.

11.1.12. a) Intersecțiile sînt triunghiurile ABC', BCA' și CAB'. b) Da (LLL). c) $BC' = AC' = 13$ cm; perimetrul $= 31$ cm.

11.1.13. a) Dreapta BC' este conținută în primul plan și $B'C$ în cel de-al doilea. Aceste drepte sînt în același plan; fie M intersecția lor. Punctul M este comun celor două plane. La fel, intersecția N a dreptelor DC' și $D'C$ este un punct comun. Intersecția este dreapta MN. b) MN este linie mijlocie în triunghiul $C'BD$ (sau $CB'D'$). Teorema lui Pitagora dă $BD = 25$ cm; $MN = 12{,}5$ cm.

11.1.14. a) Fie O și P respectiv centrele fețelor ABC și DCC'. Intersecția este dreapta OP. b) În triunghiul DBC', OP este linie mijlocie. $BC' = 26$ cm, $OP = 13$ cm.

11.1.15. a) Trebuie să găsim două puncte comune celor două plane. Dreptele AB și DE sînt în același plan, ABB', deci ele se pot tăia. Fie $AB \cap DE = L$. Deoarece $L \in AB$ și $AB \subset$ planul ABC, $L \in$ planului ABC. Tot așa, $L \in DE$ și $DE \subset P$, deci $L \in P$. Rezultă că L este un punct comun planelor P și ABC. Fie $EF \cap BC = M$. Judecînd la fel, se vede că M este de asemenea un punct comun acestor plane. Rezultă că intersecția lor este dreapta LM. b) Procedeu analog: Fie $DE \cap A'B' = L'$ și $EF \cap B'C' = M'$. Intersecția cerută este dreapta $L'M'$.

Observări. 1) În locul intersecției dreptelor EF și BC se putea lua intersecția N a dreptelor AC și DF, atunci intersecția celor două plane ar fi fost dreapta LN. Dar două plane se taie după o singură dreaptă, deci dreptele LM și LN coincid, punctele L, M și N sînt coliniare.

2) Dacă privim figura 5 ca o figură plană, ea arată lucrul următor: Dacă ABC și DEF sînt două triunghiuri, $AD \parallel BE \parallel CF$, $DE \cap AB = L$, $EF \cap BC = M$ și $FD \cap CA = N$, atunci punctele L, M și N sînt coliniare.

11.1.16. a) Fie $EF \cap CC' = G$ și $GD \cap A'C' = H$. Intersecția este patrulaterul $DEFH$. b) Fie $DE \cap AB = M$ și $EF \cap BC = N$. Intersecția este MN.

11.2.1. Planele bazelor fiind paralele, planul P taie baza $A'B'C'$ după o dreaptă $D'E'$ ($E' \in A'C'$) paralelă cu DE. Trapez.

11.2.2. Planele ABC și $A'B'C'$ fiind paralele, planul P taie planul $A'B'C'$ după o dreaptă $D'E'$ ($E' \in B'C'$) paralelă cu DE. Dar $DE \parallel AC \parallel A'C'$, deci $D'E' \parallel A'C'$, $D'E'$ este linie mijlocie în triunghiul $A'B'C'$. $D'E' = A'C' : 2 = 4$ cm; $DD' = EE' = AA'$; perimetrul $= 38$ cm.

11.2.3. Planul P taie baza de sus după o dreaptă BE' ($E' \in A'D'$) paralelă cu BE. Punctele E și E' aparțin atît planului P, cît și feței din stînga, ADD', deci $P \cap$ planul $ADD' = EE'$. Fața din stînga și cea din dreapta fiind paralele, intersecțiile lor cu planul P sînt paralele, deci $EE' \parallel BB'$. Intersecția este paralelogramul $EBB'E'$.

11.2.4. a) Intersecția este paralelogramul $A'BCD'$. Triunghiul dreptunghic $A'AB$ dă $A'B = 13$. Perimetrul $= 44$ cm. b) Intersecția este paralelogramul $ABC'D'$. Perimetrul $= 40$ cm.

11.2.5. a) Deoarece $A'D' \parallel$ planul bazei, planul P taie baza după o dreaptă paralelă cu $A'D'$. Planul Q de asemenea. b) Amîndouă fiind paralele cu $A'D'$ sînt paralele.

11.2.6. $D'F' \parallel AB$ și $E'G' \parallel AB$. Trapez.

11.2.7. a) Se duce prin F o dreaptă d paralelă cu EG; fie $d \cap CC' = H$. Intersecția este paralelogramul $EFHG$. b) Fie $d \cap B'C' = H$; prin G se duce paralela GK la EF ($K \in C'D'$). Intersecția este pentagonul $EFHKG$.

11.2.8. a) Deoarece $AA' \parallel$ planul CBB' (fig. 6), intersecția planelor P și CBC' este paralela dusă prin punctul D la AA'; ea trece prin mijlocul D' al muchiei $C'B'$. Intersecția cerută este paralelogramul $ADD'A'$. La fel, intersecția prismei cu planul Q este para-

lelogramul $CEE'C'$, unde E' este mijlocul muchiei $A'C'$. b) Fie $AD \cap CE = O$ și $A'D' \cap C'E' = O'$. $P \cap Q = OO' = d$. c) AO și $A'O'$ sînt razele cercurilor circumscrise bazelor, deci $AO \equiv A'O'$. Ce fel de patrulater este $AOO'A'$? $OO' \equiv AA'$.

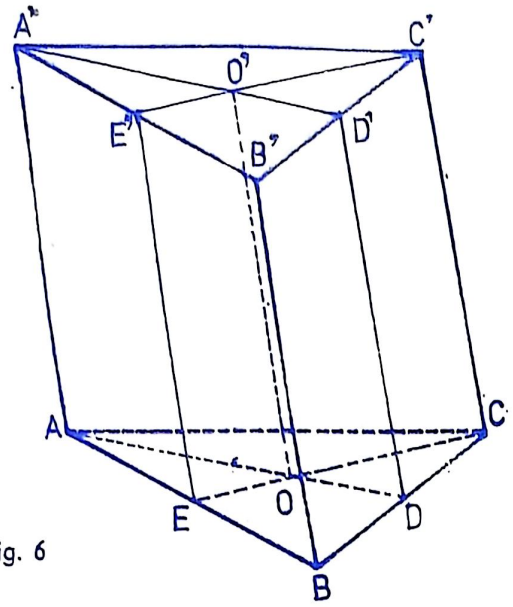


Fig. 6

11.2.9. a) Fie $DF \cap AB = M$ și $EF \cap BC = N$. Intersecția este dreapta MN. b) $MN \parallel DE$. c) Dacă ABC și $A'B'C'$ sînt două unghiuri unde $B'A' \parallel BA$ și $B'C' \parallel BC$, D și E sînt puncte ale laturilor sale, $D \in B'A'$, $E \in B'C'$ și F un punct al segmentului BB', $DF \cap AB = M$, $EF \cap BC = N$, atunci $MN \parallel DE$.

11.2.10 (fig. 7). a) $EF \parallel BD \parallel B'D' \parallel GH$, deci $EF \parallel GH$. b) Fie $AC \cap EF = M$ și $A'C' \cap GH = N$. Intersecția este dreapta MN.

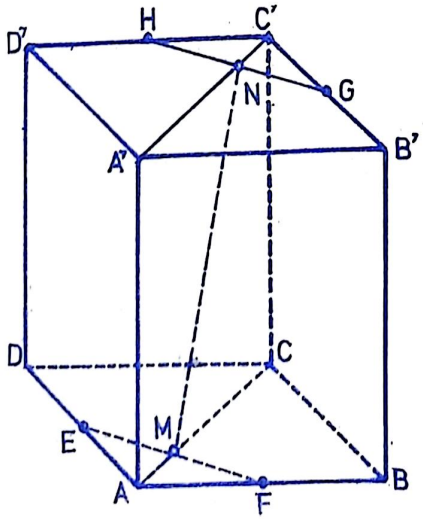


Fig. 7

11.2.11. a) Ce poziție au aceste drepte față de $B'C'$? $EF \parallel GH$. b) Ce poziție au aceste drepte față de $A'B$? $KL \parallel D'C$.

11.2.12. Numai propozițiile c), e) și g) sînt false.

11.3.1. Ca dreapta $A'B$ să fie perpendiculară pe planul bazei, ea trebuie să fie perpendiculară pe două drepte concurente din plan; dreptele BC și AD nu sînt concurente.

11.3.2. Toate au cîte 90°.

11.3.3. Nu există maxim, nici minim. $Oz \perp AB$ oricare ar fi punctele A și B.

11.3.4. Imposibil.

11.3.5. Sînt 12 drepte.

11.3.6. a) $B'B \perp$ planul ABC și $AC \subset$ planul ABC, deci $B'B \perp AC$; totodată $AC \perp BD$. Rezultă că AC este perpendicular pe două drepte neparalele din planul DBB' ($B'B$ și DB), deci $AC \perp BD'$. b) Da. c) Da. d) Da. e) Da. f) Nu, căci, din $AC \perp BD'$ și $AC \perp BB'$ ar urma că $AC \perp$ planul DBB', deci $AC \perp BD$ — ceea ce nu este adevărat.

11.3.7. a) Cîte grade are unghiul format de dreapta DA cu planul ABB'? cu dreapta AB'? Distanța de la B' la AD este $B'A$. La fel, distanța de la B' la DC este $B'C$. $B'A \equiv B'C$. b) $A'B \equiv A'D$. c) Nu.

11.3.8. a) $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$. b) $A'B' = a$. c) $A'D' = b$. d) $AB = a$. e) $A'B' = a$. f) $A'D' = b$. g) $AD = b$.

11.3.9. a) $AA' = a$. b) Fie E' mijlocul muchiei $A'B'$ (fig. 8). Distanța este $C'E' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. c) Fie D și D' mijloacele muchiilor BC și $B'C'$, $BC' \cap DD' = N$ și M mijlocul muchiei AA'. Ce fel de patrulater este $ADD'A'$?

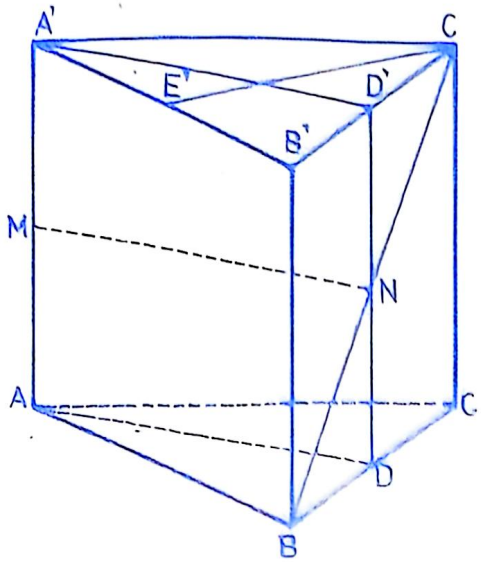


Fig. 8

Punctul N este mijlocul lui DD', deci $MN \perp DD'$. Totodată $MN \parallel AD$ şi $AD \perp BC$, deci $MN \perp BC$. Rezultă că $MN \perp$ faţa BCD, deci $MN \perp BC'$. Distanţa cerută este $MN = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

11.3.10. Numai prima propoziţie este greşită.

11.4.1 (fig. 9). Fie E piciorul perpendicularei coborîte din punctul O pe BC; $ME \perp BC$ (t. celor 3 $\perp$). În triunghiul CAB, OE este linie mijlocie, deci $OE = AB : 2 = 9$ cm. Triunghiul MOE dă $ME = 15$ cm; $MF = ME$. La fel se află că distanţa de la M la laturile AB şi DC sînt de 13 cm.

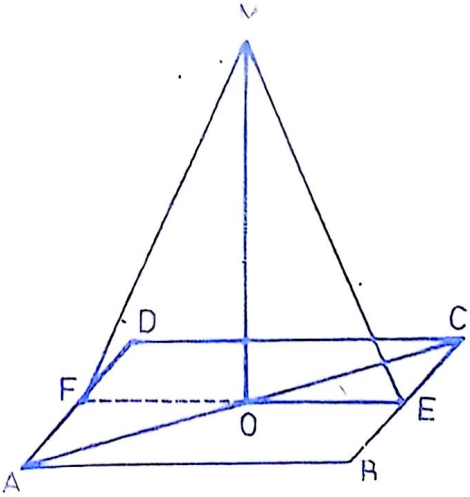


Fig. 9

11.4.2. a) (fig. 10). $EC \perp BC$ (t. celor 3 $\perp$). Teorema lui Pitagora dă $EC = a\sqrt{2}$. La fel, $EA = a\sqrt{2}$.

b) Fie O intersecţia diagonalelor pătratului. Deoarece $ED \perp$ planul pătratului şi $DO \perp AC$, $EO \perp AC$. Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiul ABD, apoi în triunghiul EDO.

$$EO = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

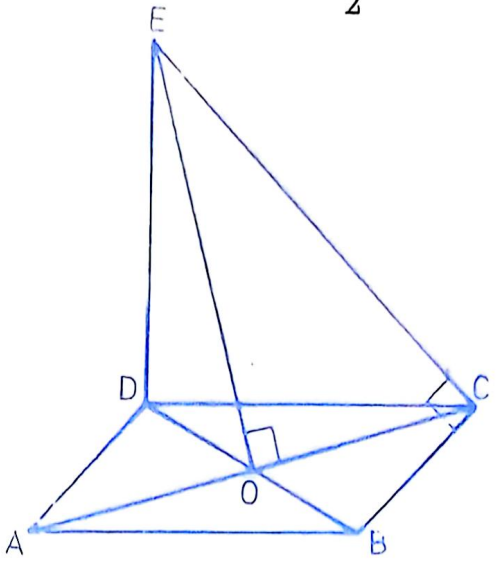


Fig. 10

11.4.3. Fie E mijlocul laturii BC. $DE \perp BC$ (t. celor 3 $\perp$), deci distanţa este DE. Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile AEC şi DAE.

$$DE = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

11.4.4. a) Se compară (fig. 11) triunghiurile ABC, ABD şi ACD; echilateral. b) Fie AE înălţimea triunghiului ABC. $DE \perp BC$ (t. celor 3 $\perp$), deci distanţa de la punctul D la dreapta BC este DE, care este o înălţime a triunghiului DBC. La fel, celelalte distanţe sînt înălţimile BF şi CG ale triunghiului DBC. Triunghiul DBC fiind echilateral...

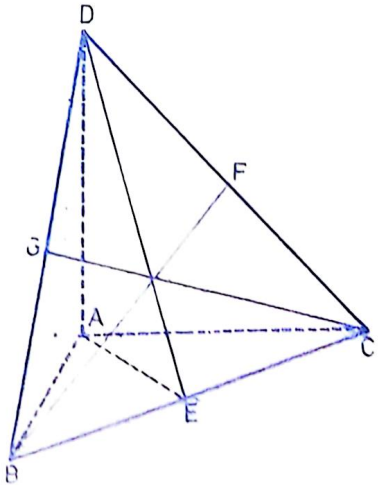


Fig. 11

11.4.5 (fig. 12). Fie E piciorul perpendicularei duse din D pe BC; $AE \perp BC$, deci AE este o înălțime a triunghiului ABC. Triunghiul DAE dă $AE = 10$ cm. Aria $= 75$ cm^2.

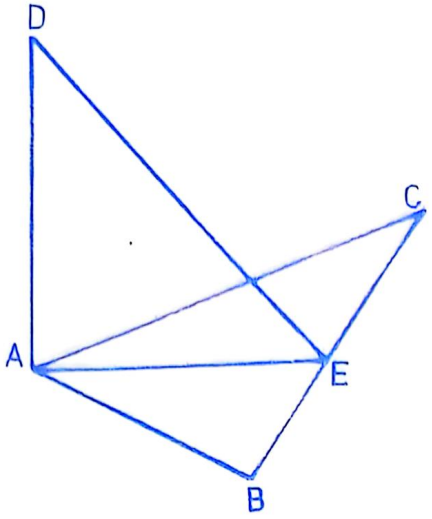


Fig. 12

11.4.6 (fig. 13). Fie AD înălțimea triunghiului ABC. Atunci $A'D \perp BC$ (rec. t. celor 3 $\perp$). Punctul A' se mișcă pe perpendiculara ridicată în planul P pe BC în punctul D. Caz particular: punctul A' se mișcă pe mediatoarea segmentului BC.

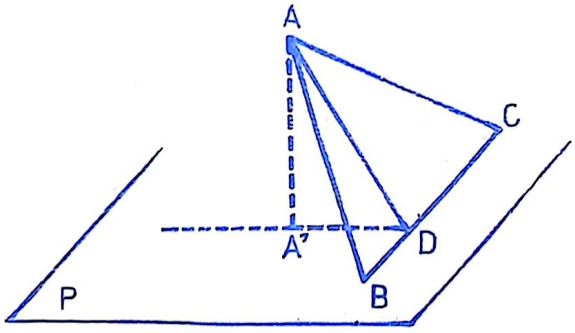


Fig. 13

11.4.7. Ducem MN perpendicular pe AB și unim M' cu N. Atunci $M'N \perp AB$ (rec. t. celor 3 $\perp$). Punctul M' se mișcă pe perpendiculara ridicată în planul $ABCD$ în punctul N pe AB.

11.5.1 (fig. 15). a) 45°. b) 60°. c) $OM \equiv ON$.

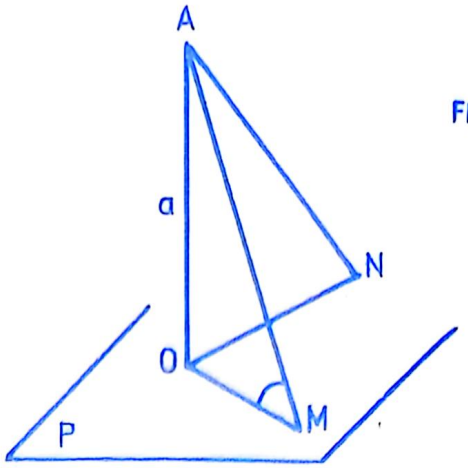


Fig. 15

11.5.2 (fig. 16). Ce fel de triunghi este EAD? $\widehat{EAD} = 45°$. Se compară triunghiul EBD cu ABD; $\widehat{EBD} = 60°$. La fel, $\widehat{ECD} = 60°$.

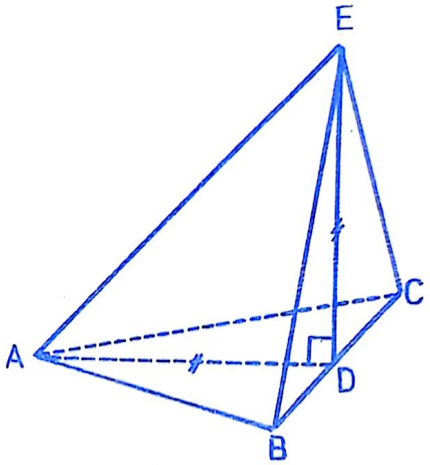


Fig. 16

11.5.3. $\triangle MOA \equiv \triangle MOB \equiv \triangle MOC\triangle$ ... (LUL), deci $\widehat{MAO} \equiv \widehat{MBO} \equiv \widehat{MCO} \equiv$ ... și $MA \equiv MB \equiv MC$...

11.5.4 (fig. 17). $\triangle MCA \equiv \triangle MCB$ (LUL), deci unghiul $MAC \equiv$ unghiul MBC.

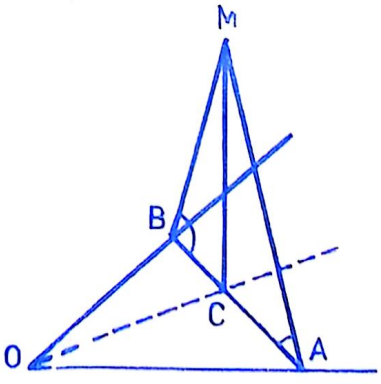
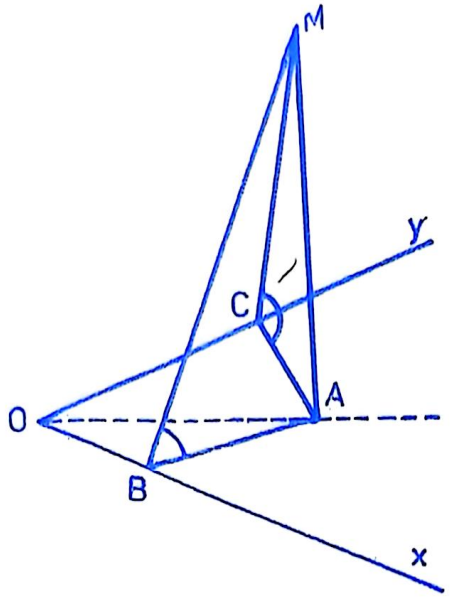


Fig. 17

11.5.5 (fig. 18). Care sînt proiecțiile dreptelor MB și MC pe planul unghiului? $AB \perp Ox$ și $AC \perp Oy$ (rec. t. celor 3 $\perp$). OA fiind bisectoare, $AB \equiv AC$. Acum $\triangle MAB \equiv \triangle MAC$ (LUL), deci $MB \equiv MC$ și unghiul $MBA \equiv$ unghiul MCA.

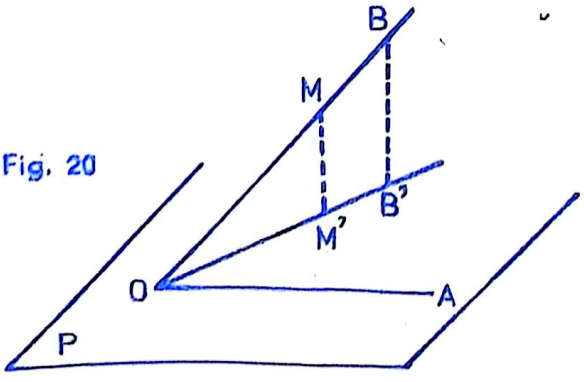
Fig. 18



11.5.6. a) Se compară triunghiurile $AB'B$ și $AC'C$ (LUL), $B'B \equiv C'C$, $C'B'BC$ este un dreptunghi. b) $\triangle AB'C' \equiv \triangle AB'B$ (LLL). Triunghiul $AB'B$ este dreptunghic, deci... Altfel: Se calculează laturile triunghiului $AB'C'$ și se folosește reciproca teoremei lui Pitagora.

11.5.7. a) Fie B' proiecția punctului B pe planul P (fig. 20). Cîte grade are unghiul format de dreapta OA cu OB? cu BB'? Dreapta OA fiind perpendiculară pe două drepte din planul BOB', este perpendiculară pe orice dreaptă din acest plan, deci $OA \perp OB'$. Proiecția este un unghi drept. b) Punctul M' se mișcă pe perpendiculara ridicată în O pe OA în planul P.

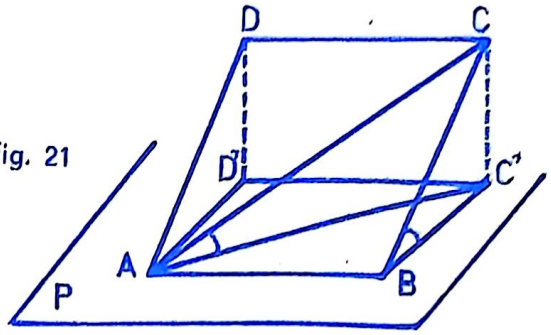
Fig. 20



11.6.1 a) 45°; b) 90°.

11.6.2 (fig. 21). $CB \perp AB$ și $C'B \perp AB$ (rec. t. celor 3 $\perp$), deci unghiul plan corespunzător unghiului diedru este CBC' și se dă că are 45°. Fie a latura pătratului. Triunghiul CBC' dă $CC' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ și triunghiul CAC', în care $AC = a\sqrt{2}$, dă $\sin CAC' = \frac{CC'}{AC} = \frac{1}{2}$; $\widehat{CAC'} = 30°$. La fel, $\widehat{DBD'} = 30°$.

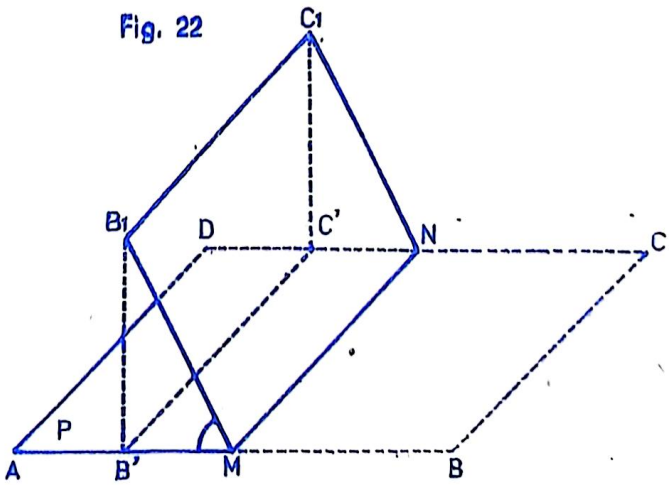
Fig. 21



11.6.3 (fig. 22). $AM \perp MN$. Fie B_1C_1 noua poziție a laturii BC și $B'C'$ proiecția ei pe planul AMN; $B_1M \perp MN$. Unghiul B_1MB' este unghiul plan corespunzător diedrului. Fie $AB = a$. Atunci $MB = \frac{a}{2}$, $MB' = \frac{a}{4}$, Triunghiul $B_1B'M$ dă

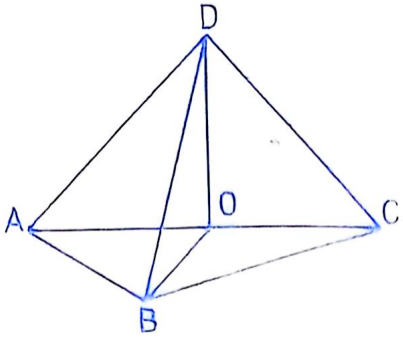
$$\cos M = \frac{a}{4} : \frac{a}{2} = \frac{1}{2}; \quad \hat{M} = 60°.$$

Fig. 22



11.6.4. a) BO și DO (fig. 23) sînt jumătăți din diagonala pătratului, deci $BO = DO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, a fiind latura pătratului. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul BOD, dă $BD = a$. *Altfel:* $\triangle BOD \equiv \triangle AOB$ (LUL), deci $BD \equiv AD$. b) Ce fel de triunghi este BOD? $BD = a$.

Fig. 23



11.6.5 (fig. 24). Fie D mijlocul ipotenuzei BC; $AD \perp BC$. Apoi $\triangle ABA' \equiv \triangle ACA'$ (IC), deci $A'B \equiv A'C$, deci $A'D \perp BC$. Unghiul plan corespunzător diedrului este ADA' și se dă că acest unghi are 45°. Se află AA' din triunghiul ADA' apoi unghiul ACA' din triunghiul ACA'. Fie $AB = a$; atunci $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$,

$$AD = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

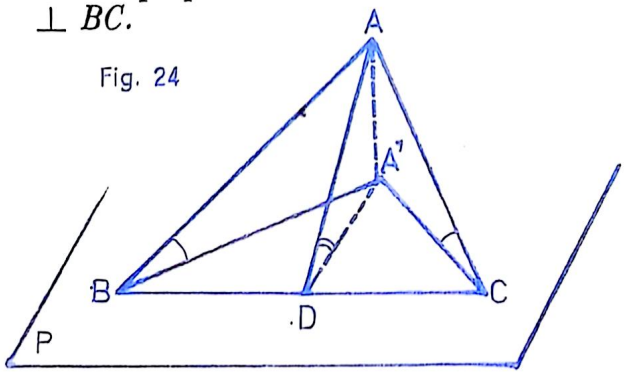
$$AA' = AD \sin 45° = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{a}{2}; \quad \sin ACA' = \frac{AA'}{AC} = \frac{1}{2};$$

$\widehat{ACA'} = 30°$. La fel, $\widehat{ABA'} = 30°$.

Altfel: Unghiul plan corespunzător diedrului se poate determina observînd că, D fiind mijlocul lui BC, $AD \perp BC$ (căci triunghiul ABC este isoscel) și $AA' \perp P$. Reciproca teoremei celor 3 perpendiculare arată că $A'D \perp BC$.

Fig. 24

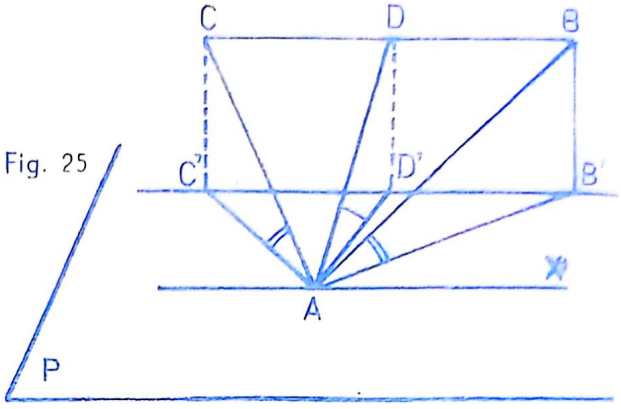


11.6.6 (fig. 25). a) $\triangle AB'B \equiv \triangle AC'C$ (ULU), deci $BB' \equiv CC'$; totodată $BB' \perp C'B'$ și $CC' \perp C'B'$, deci $C'B'BC$ este un dreptunghi, deci... b) Fie $AB = AC = a$. Se calculează laturile triunghiului $AB'C'$. Triunghiul ABC dă $BC = a\sqrt{2}$, deci $B'C' = a\sqrt{2}$. Triunghiul BAB' dă $AB' = a\cos u$; la fel, $AC' = a\cos u$. În triunghiul $AB'C'$, $AB' + AC' > C'B'$, deci

$$a\cos u + a\cos u > a\sqrt{2};$$

$$2\cos u > \sqrt{2}; \cos u > \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad u < 45°.$$

Fig. 25



Numai cînd punctele A, B' și C' sînt coliniare, $AB' + AC' = B'C'$; atunci se obține $u = 45°$. Așadar, unghiul u poate avea cel mult 45° (v. probl. 15.2.13). Dacă $u = 45°$, punctele C', A și B' sînt coliniare, deci planul triunghiului este perpendicular pe planul P. c) Fie AD' înălțimea triunghiului isoscel $AB'C'$, care este și bisectoare. $D'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Triunghiul $AC'D'$ dă

$$\sin C'AD' = \frac{D'C'}{AC'} =$$

$$= \frac{a\sqrt{2}}{2} : a\cos u = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\cos u}.$$

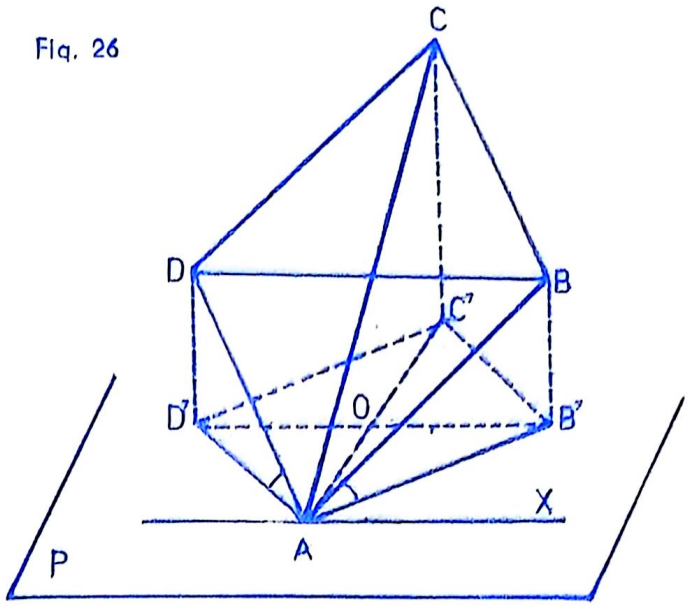
Deoarece $\cos u < 1$, $\frac{1}{\cos u} > 1$, deci produsul obținut este mai mare decît $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin C'AD' > \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\widehat{C'AD'} > 45°$, $\widehat{C'AB'} > 2 \cdot 45° = 90°$. Numai cînd $BC \subset P$, $B = B'$, $C = C'$ și unghiul $B'AC'$ este drept. d) Deoarece $CB \parallel$ planul P, intersecția planului triunghiului cu planul P este dreapta AX paralelă cu CD, $AD' \perp C'B'$, deci $AD' \perp AX$; tot așa, $AD \perp CB$, deci $AD \perp AX$. Rezultă că unghiul plan corespunzător unghiului diedru este DAD'. Pentru $u = 30°$ triunghiul BAB' dă $BB' = \frac{a}{2}$, deci $DD' = \frac{a}{2}$. Triunghiul ABD dă $AD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. În sfîrșit, triunghiul DAD' dă $\sin DAD' = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\widehat{DAD'} = 45°$.

11.6.7. c) Se obține $\sin C'AD' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos u}$ și se deduce că $\sin C'AD' > \frac{1}{2}$, deci unghiul $C'AD' > 30°$, deci... d) $\sin DAD' = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\widehat{DAD'} = 35°$.

11.6.8. a) Se compară triunghiurile $AB'B$ și $AD'D$ (fig. 26). $B'B = D'D$, deci $D'B'BD$ este un dreptunghi, deci $DB \parallel D'B'$, deci $DB \parallel P$. Totodată $AB' = AD'$. b) Proiecțiile a două drepte paralele sînt paralele, deci $AB' \parallel D'C'$ și $AD' \parallel B'C'$; totodată $AB' = AD'$, deci $AB'C'D'$ este un romb. c) Se folosesc triunghiurile $AB'B$ și AOB'. Primul dă $AB' = AB \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Apoi, triunghiul ABD dă $BD = a\sqrt{2}$, deci $D'B' = a\sqrt{2}$, $OB' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul AOB', dă $AO = \frac{a}{2}$, deci $AC' = 2AO = a$.

Fig. 26



d) Trebuie să găsim muchia diedrului. $DB \parallel P$, deci planul pătratului taie planul P după o dreaptă AX paralelă cu DB, deci paralelă cu $D'B'$, $AC' \perp D'B'$, deci $AC' \perp AX$. Apoi deoarece $AC \perp BD$, $AC \perp AX$. Rezultă unghiul plan care corespunde diedrului este CAC'. Triunghiul ACC' dă

$$\cos CAC' = \frac{AC'}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \widehat{CAC'} = 45°.$$

Cap. 12

12.1.1. a) Ele trebuie să fie: a, a, b, b, c, c, d, d, d, unde fiecare dintre segmentele a, b și c trebuie să fie mai mic decît suma celorlalte două. b) Avem nevoie de 3 grupe de cîte 4 vergele de aceeași lungime.

12.1.2. a) Rotim una dintre muchiile laterale în jurul unuia dintre capetele sale astfel încît să devină perpendiculară pe planul bazei. b) Aceeași mișcare, apoi rotim o latură a bazei în planul ei astfel încît să devină perpendiculară pe o altă latură a bazei.

12.1.3. a) Muchia AB (fig. 1), de exemplu, se socoteşte de două ori, cînd se socotesc muchiile care trec prin A şi cînd se socotesc cele care trec prin B.

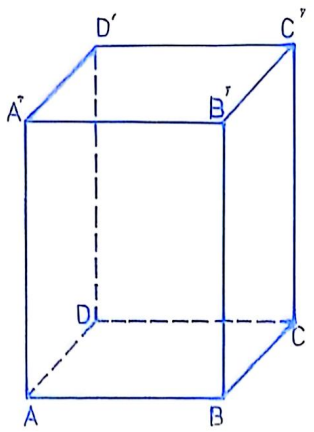


Fig. 1

De aceea numărul 24 care se obţine trebuie împărţit la 2. b) Faţa $ABCD$, de exemplu, a fost socotită de 4 ori: cînd s-au considerat feţele care trec prin vîrfurile A, B, C şi D. c) Faţa $ABCD$, de exemplu, a fost socotită de 4 ori, ca faţă care trece prin AB, BC, CD şi DA.

12.1.4. a) Cele 12 muchii ale paralelipipedului se împart în 6 perechi de muchii opuse. b) Sînt 6 plane diagonale. Fiecare plan diagonal conţine două muchii opuse. c) Sînt 4 diagonale, fiecare porneşte din cîte un vîrf al bazei. d) Două plane diagonale se taie după o diagonală a paralelipipedului sau după o dreaptă care trece prin centrele a două feţe opuse. În unele cazuri răspunsul se poate găsi fără figură. Exemplu: $ABC'D' \cap BCD'A'$; literele B şi D' figurează în ambele expresii, deci intersecţia este BD'. e) Prin fiecare diagonală trec trei plane diagonale. Prin fiecare vîrf trec 3 muchii şi prin fiecare din ele trece cîte un plan diagonal.

12.1.5. a) Fie $ABCDA'B'C'D'$ paralelipipedul. $ADC'B'$ este un paralelogram, deci $AB' \equiv DC'$; la fel $BA' \equiv CD'$. Diagonalele a două feţe opuse sînt congruente două cîte două. b) Da, dacă sînt diagonalele unor feţe diferite printre care nu se găsesc două feţe paralele, de exemplu: AC, AB' şi AD'. Dacă două din ele sînt ale aceleiaşi feţe, de exemplu $AC \equiv BD$, $ABCD$ este dreptunghi, $A'B'C'D'$ de asemenea, deci există 4 diagonale congruente. c) Dacă, de exemplu, $AC \equiv BC'$, $\triangle ABC \equiv \triangle BCC'$ (IC), deci $AB \equiv CC'$, deci $AB \equiv AA'$, $ABB'A'$ este un pătrat. d) Cub.

12.1.6. a) Două, patru sau toate. b) Dacă faţa anterioară $ABB'A'$ (fig. 1) este un dreptunghi, $BB' \perp AB$; dacă şi faţa din dreapta $BCC'B'$ este un dreptunghi, $BB' \perp BC$, deci $BB' \perp$ planul bazei ş.a.m.d.

12.1.7. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped. Considerăm, de exemplu, baza $ABCD$. Diagonalele sale fiind congruente, ea este un dreptunghi. La fel celelalte feţe, deci paralelipipedul este dreptunghi (v. problema precedentă). Apoi $\triangle ABC \equiv \triangle B'BC$ (IC), căci BC este latură comună şi $AC \equiv B'C$, deci $AB \equiv B'B$. Tot aşa $AB \equiv BC$. Cub.

12.1.8. a) Fie AD' şi BC' (fig. 2) diagonalele a două feţe opuse. Se compară AB cu $D'C'$; ce fel de patrulater este $ABC'D'$? Deci $AD' \parallel BC'$. La fel, $A'D \parallel B'C$, $AC \parallel A'C'$ ş.a.m.d. b) Se compară AM cu BN; ce fel de patrulater este $ABNM$? Deci $MN \parallel AB$.

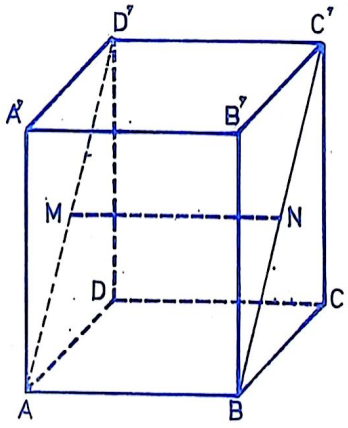


Fig. 2

12.1.9 (fig. 3). Fie O intersecţia diagonalelor AC' şi BD'. Aceste segmente sînt diagonalele paralelogramului $ABC'D'$, deci punctul O este mijlocul fiecăreia din ele, în special al diago-

nalei BD'; BD' și CA' sînt diagonalele paralelogramului $BCD'A'$, deci CA' trece prin mijlocul diagonalei BD', care este O, acest punct fiind totodată mijlocul diagonalei CA'; în sfîrșit, CA' și DB' sînt diagonalele paralelogramului $DCB'A'$, deci diagonala DB' trece prin mijlocul diagonalei CA', care este tot punctul O. Oricare două diagonale se împart în părți congruente.

Observare. Fie M și M' centrele a două fețe opuse, de exemplu ale bazelor. $ACC'A'$ fiind un paralelogram cu centrul în O, dreapta MM' trece prin O. Mai mult, dacă $N \in AC$ și dreapta NO taie baza superioară într-un punct al N', $N' \in A'C'$ și $ON \equiv ON'$.

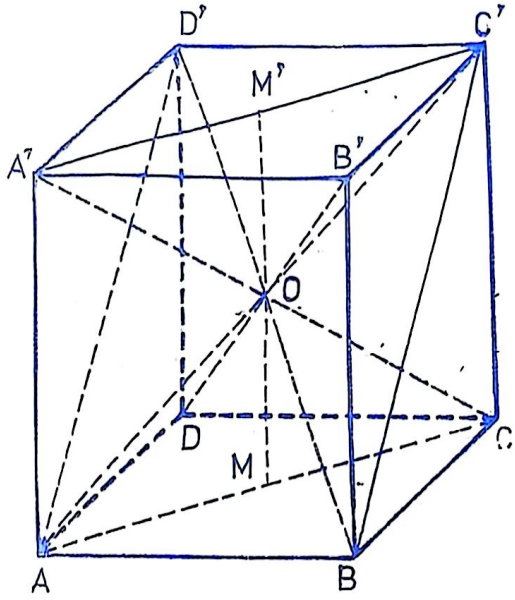


Fig. 3

12.1.10. a) Orice diagonală a cubului, de exemplu $D'B$ (fig. 4), este ipotenuza unui triunghi dreptunghic în care o catetă, DD', este muchia cubului și cealaltă, DB, este diagonala unei fețe a cubului. Aceste triunghiuri sînt congruente (LUL), deci... b) Considerăm, de exemplu, diagonalele BD' și DB' (fig. 5). Ele sînt diagonalele dreptunghiului $DBB'D'$, în care $BB' = a$ și $BD = a\sqrt{2}$. Ducem OE perpendicular pe BB'. Triunghiul OEB' dă $\operatorname{tg} u = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $u = 35°$,

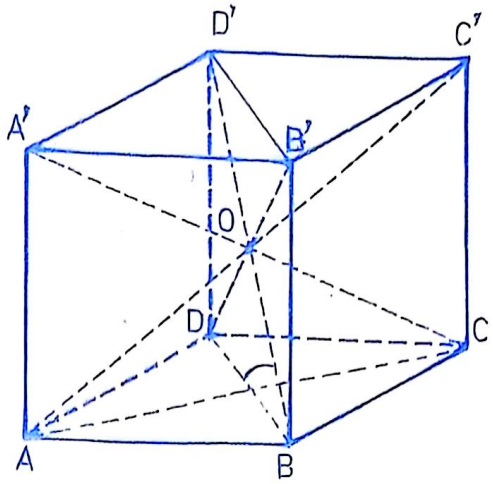


Fig. 4

deci $\widehat{BOB'} = 70°$. c) Triunghiul $D'BD$ dă $\operatorname{tg} D'BD = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\widehat{D'BD} = 35°$. (Acest lucru se vede și fără calcul, în fig. 5 unghiul $D'BD \equiv$ unghiul EOB'.) d) 45°.

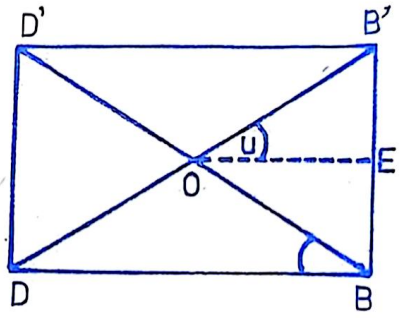


Fig. 5

12.1.11. a) Un vîrf oarecare B (fig. 6) al bazei de jos poate fi unit cu toate vîrfurile bazei de sus, afară de A', B' și C', deci din B pleacă $(n-3)$ diagonale. În total prisma are $n(n-3)$ diagonale. b) Orice diagonală a prismei, de exemplu BE', este ipotenuza unui triunghi dreptunghic, în care o catetă este o muchie a prismei (EE') și cealaltă este o diagonală a bazei (BE). Condiția ca două diagonale ale prismei să nu fie congruente este ca diagonalele corespunzătoare ale bazei să nu fie congruente. Hexagonul regulat are două diagonale de lungimi diferite, deci prisma are două diagonale de lungimi diferite. c) v. problema 7.14.

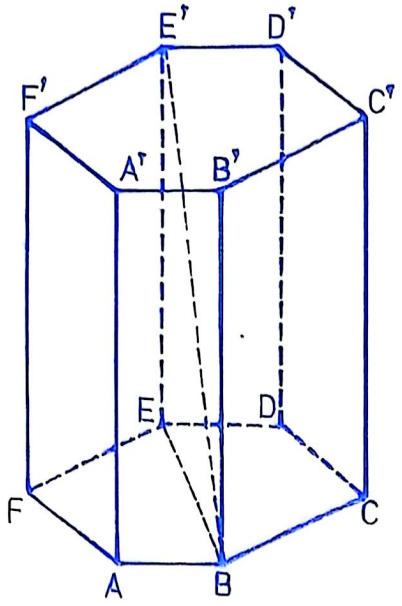


Fig. 6

Dacă n este par, $\frac{n-2}{2}$ diagonale de lungimi diferite; dacă n este impar >5, $\frac{n-3}{2}$; dacă $n=5$, toate diagonalele sînt congruente.

12.1.12. a) Ce linie importantă este MN (fig. 7) în triunghiul $C'AB$? $MN=\frac{AB}{2}$. La fel, $NP=\frac{BC}{2}$ și $PM=\frac{CA}{2}$. b) Fie $AM\cap CP=G$; punctul G este centrul de greutate al triunghiului $AB'C$, el împarte mediana AM în raportul $\frac{1}{2}$. Dar AM este mediană și în triunghiul $C'AB$, deci mediana BN a acestui triunghi împarte de asemenea mediana AM în raportul $\frac{1}{2}$, deci și ea trece prin punctul G.

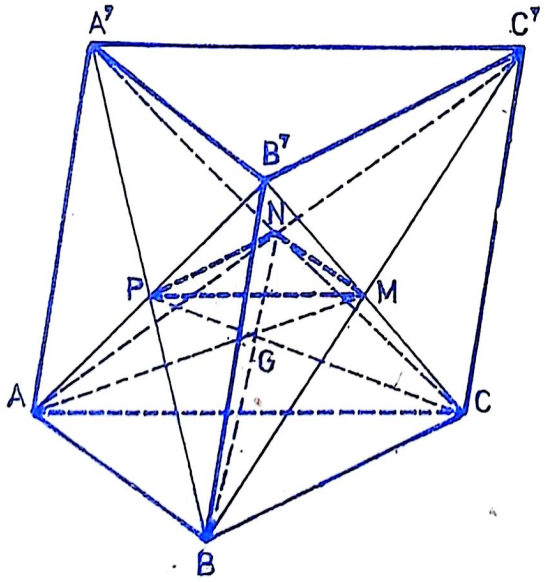


Fig. 7

12.1.13. a) Ducem MM' și QQ' paralel cu muchiile laterale (fig. 8); $MM'=QQ'=\frac{BB'}{2}$, deci $Q'M'MQ$ este un paralelogram, deci $QM\parallel Q'M'\parallel AC$. La fel, $PN\parallel AC$, deci $QM\parallel PN$. Tot așa $PQ\parallel NM\parallel BD$. Paralelogram. b) $QM=\frac{AC}{2}$, $MN=\frac{BD}{2}$.

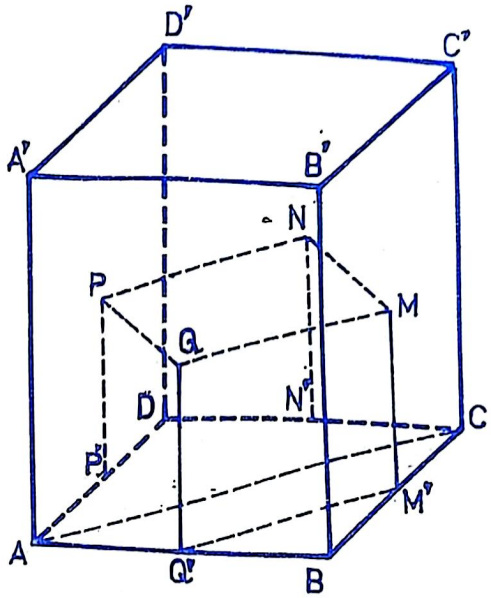
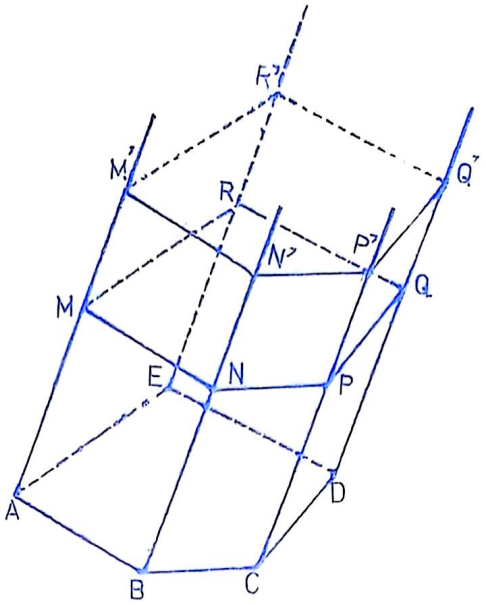


Fig. 8

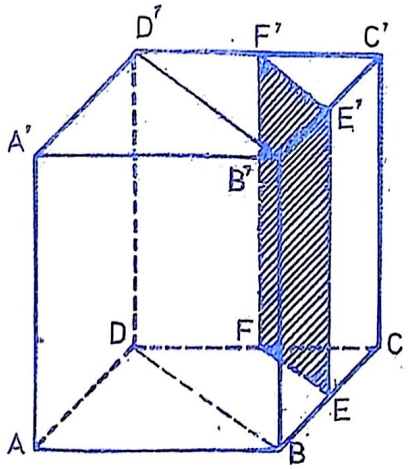
12.1.14 (fig 9). Fie $MNPQR$ și $M'N'P'Q'R'$ intersecțiile celor două plane cu prisma. Ce fel de patrulater este $MNN'M'$? Deci $MN\equiv M'N'$. La fel $NP\equiv N'P'$ ș.a.m.d. Apoi unghiul $MNP\equiv$ unghiul $M'N'P'$, ca unghiuri cu laturi paralele, unghiul $NPQ\equiv$ $\equiv$ unghiul $N'P'Q'$ ș.a.m.d. Poligoanele sînt congruente.

Fig. 9



12.1.15 (fig. 10). Planul Q taie corpul după dreptunghiul $DBB'D'$. Planele P și Q fiind paralele, planul bazei le taie după drepte paralele, deci intersecția planului P cu planul bazei este dreapta EF paralelă cu BD. La fel se vede că celelalte laturi ale intersecției sînt paralele cu BB', $B'D'$ și DD'. Intersecția este dreptunghiul $FEE'F'$. $BD = 50$, $FE = 50 : 2 = 25$ Aria $= 250$ cm^2.

Fig. 10



12.1.16. a) Dreptunghi. b) $\frac{1}{2}$.

12.1.17. Se formează un cub cu latura a, un cub cu latura b, 3 paralelipipede dreptunghice cu dimensiunile a, a și b și 3 cu dimensiunile, a, b și b. Suma volumelor este $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, adică $(a + b)^3$.

12.1.18. a) Deoarece $BC \parallel$ planul ADD' (fig. 12), planul P taie fața ADD' după dreapta MN paralelă cu BC. Intersecția este patrulaterul $BCNM$. $MN \equiv AD$ și $AD \equiv BC$, deci $MN \equiv BC$, deci $MBCN$ este un paralelogram. Apoi $CB \perp$ planul ABB', deci $CB \perp BM$, deci $MBCN$ este un dreptunghi. b) Baza BC a dreptunghiului este fixă, deci aria sa este proporțională cu BM. Pe măsură ce AM crește, BM crește de asemenea, deci aria crește. Aria minimă $= ab$ și aria maximă $= b\sqrt{a^2 + c^2}$.

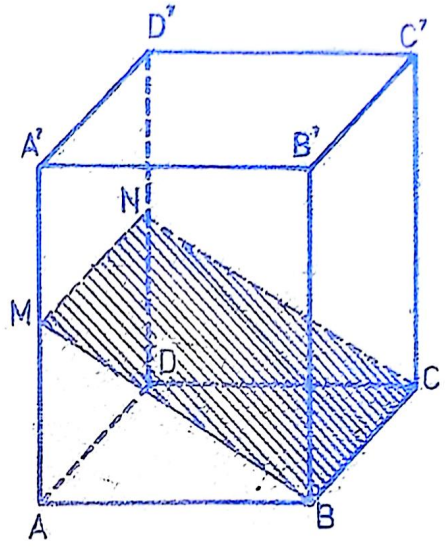


Fig. 12

12.1.19. a) $\triangle MBC \equiv \triangle MAC$ (LUL), deci $MA \equiv MB$ (fig. 13). Triunghi isoscel. b) Baza AB a triunghiului este fixă, deci aria variază în același sens cu înălțimea NM, unde punctul N este mijlocul laturii AB. NC și NM sînt perpendiculara și o oblică duse din N pe CC'; cînd CM crește, NM crește de asemenea, deci aria crește. Ea este minimă cînd $M = C$ și maximă cînd $M = C'$. Aria minimă este $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Triunghiul $C'BC$ dă $C'B = a\sqrt{2}$ și $NB = \frac{a}{2}$. Teorema lui Pitagora dă $C'N = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Aria maximă este $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$.

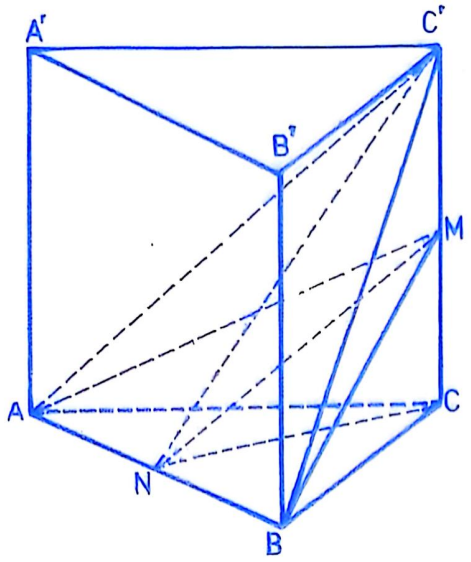


Fig. 13

c) Dacă într-un triunghi isoscel MAB (fig. 14) baza AB este fixă și înălțimea NM crește, unghiul de la vîrf scade. În adevăr, în triunghiul $M'MB$, u este unghi exterior, deci $u > v$, deci $v < u$, deci $2v < 2u$. Cînd punctul M (fig. 13) se mișcă de la C spre C', NM crește, deci unghiul AMB scade. Triunghiul $C'NB$ dă $\cos \widehat{C'BN} = \frac{a}{2} : a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\widehat{C'BN} = 69°$, deci $\widehat{AC'B} = 42°$. Unghiul M scade de la 60° la 42°.

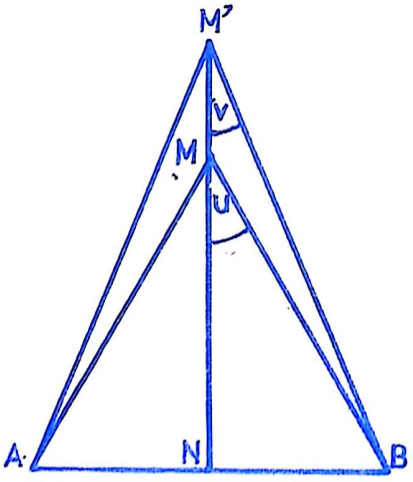


Fig. 14

12.1.20. a) Triunghi isoscel. b) Aria crește de la $\frac{a^2}{2}$ la $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. c) Unghiul AMB scade de la 90° la 60°.

12.1.21. *Soluția I* (fig. 15). Fie $ABEF$ intersecția corpului cu planul P. Deoarece fața anterioară este paralelă cu cea din spate, $FE \parallel AB$; tot așa, $AF \parallel BE$, deci $ABEF$ este un paralelogram. Dacă este și dreptunghi, diagonalele sale sînt congruente, $AE \equiv BF$. Atunci $\triangle ACE \equiv \triangle BDF$ (IC), căci triunghiurile sînt dreptunghice, $AE \equiv BF$ și $CE \equiv DF$ (paralele cuprinse între paralele). Rezultă că $AC \equiv BD$, ceea ce nu este adevărat, căci baza nu este un dreptunghi. Problema nu are soluție.

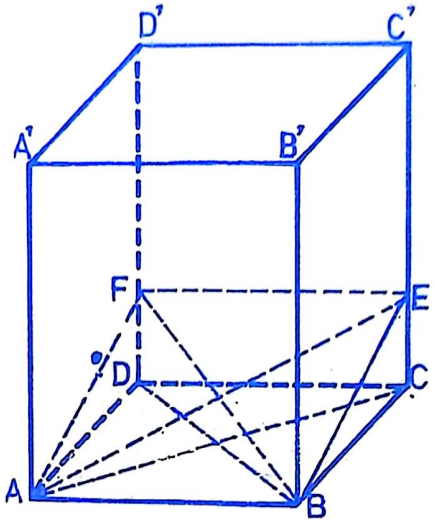


Fig. 15

Soluția II. $EC \perp CB$. Dacă și $EB \perp AB$, rezultă că $CB \perp AB$ (rec. t. celor 3 $\perp$), deci baza este un dreptunghi — ceea ce este contrar ipotezei.

12.1.22. a) $MNM'N'$ este un paralelogram, deci diagonala NN' trece prin mijlocul O al diagonalei MM'. La fel se demonstrează că PP' trece prin mijlocul lui MM'. b) Fie R, R', S, S', T și T' respectiv mijloacele muchiilor DC, $A'B'$, AD, $B'C'$, BB' și DD'. Se demonstrează la fel că dreptele RR', SS' și TT' sînt concurente, într-un punct O', care este mijlocul lor. Apoi se demonstrează că $MRM'R'$ este un paralelogram ($MR \equiv R'M'$ și $MR \parallel R'M'$), deci mijlocul lui RR' coincide cu mijlocul lui MM', adică O' coincide cu O. Altfel: Se folosește numai paralelogramul $MRM'R'$ pentru a deduce că RR' trece prin O,

apoi, folosind paralelogramele analoage $MSM'S'$ și $MTM'T'$, se demonstrează că și dreptele SS' și TT' trec prin punctul O.

12.1.23. *Soluția I* (fig. 17). a) $\triangle GAE \equiv \triangle GAF$ (LUL), deci $GE \equiv GF$; isoscel. b) Se ia AG congruent cu AE. c) Presupunem că triunghiul GFE ar fi dreptunghic. Triunghiul fiind isoscel, unghiul drept nu poate fi decît cel din G, deci triunghiul este dreptunghic și isoscel. Fie H mijlocul segmentului EF. GH este înălțimea triunghiului GEF și, deoarece unghiul GEF are 45°, $GH \equiv HE$; tot așa, $AH \equiv HE$, deci $AH \equiv GH$. Dar, în triunghiul dreptunghic GAH, AH este catetă și GH este ipotenuză, deci $AH < GH$. Această contradicție dovedește că triunghiul GEF nu poate fi dreptunghic.

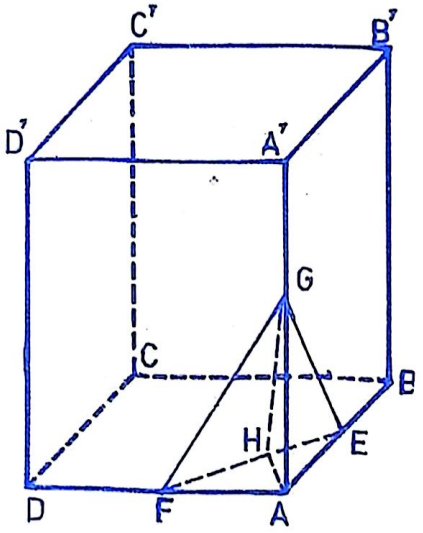


Fig. 17

Soluția II. c) Dacă două triunghiuri isoscele au aceeași bază, triunghiul în care înălțimea este mai mare are unghiul de la vîrf mai mic (v. problema 12.1.19). Aplicăm această propoziție triunghiurilor AEF și GEF. Ele sînt isoscele și, după cum se vede din triunghiul GHA, $GH > AH$, deci unghiul $FGE < FAE$, deci unghiul FGE este ascuțit.

Soluția III. c) Fie $AE = AF = a$ și $AG = x$. Atunci $GF^2 = GE^2 = a^2 + x^2$ și $FE^2 = 2a^2$. Dacă triunghiul GFE ar fi dreptunghic, teorema lui Pitagora ar da:

$$GF^2 + GE^2 = FE^2;$$

$$(a^2 + x^2) + (a^2 + x^2) = 2a^2;$$

$$x^2 = 0;\ x = 0.$$

Dar s-a presupus că $x \neq 0$, deci...

12.1.24. *Soluția I* (fig. 18). a) Isoscel. b) Triunghiul ADE este echilateral, căci $AD \equiv AE$ și unghiul $A = 60°$, deci $DE \equiv AE$. Presupunem că și triunghiul DEF ar fi echilateral; atunci $DE \equiv FE$. Rezultă că $FE \equiv AE$ — ceea ce este imposibil, căci, în triunghiul FAE, FE este ipotenuza și AE o catetă. Triunghiul DEF nu poate fi echilateral. c) Dacă triunghiul DEF este dreptunghic, unghiul drept nu poate fi decît cel din F. Fie G mijlocul segmentului DE. Atunci FG și AG sînt înălțimi în triunghiurile respective. Dacă $DE = a$, $FG = \frac{a}{2}$ și $AG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (v. nota de la problema 12.1.27), deci $FG < AG$. Dar triunghiul FGA arată că $FG > AG$.

Această contradicție dovedește că triunghiul DEF nu poate fi dreptunghic.

Soluția II. V. problema precedentă, soluția III.

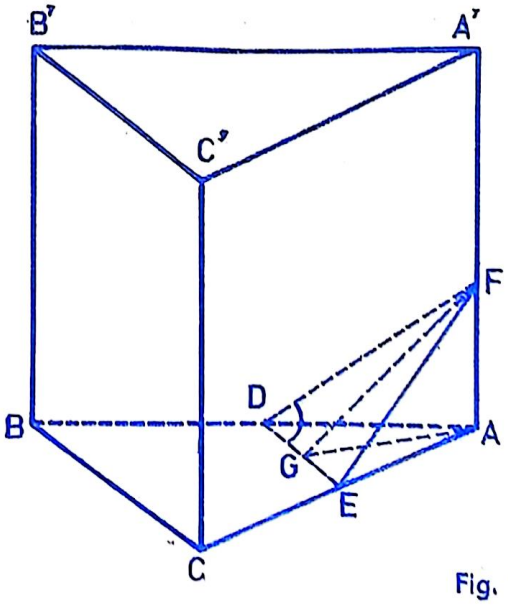


Fig. 18

12.1.25. *Soluția I* (fig. 19). Fie $A'C \cap AC' = M$. Se cere segmentul BM. Ducem MD perpendicular pe AC. Atunci $MD = \frac{a}{2}$, $DB = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, teorema lui Pitagora dă $MB = a$.

Soluția II. În $\triangle AC'C$, MD este linie mijlocie, deci $MD = \frac{C'C}{2} = \frac{a}{2} = DC$. $\triangle MDC \equiv \triangle CDB$ (LUL), deci...

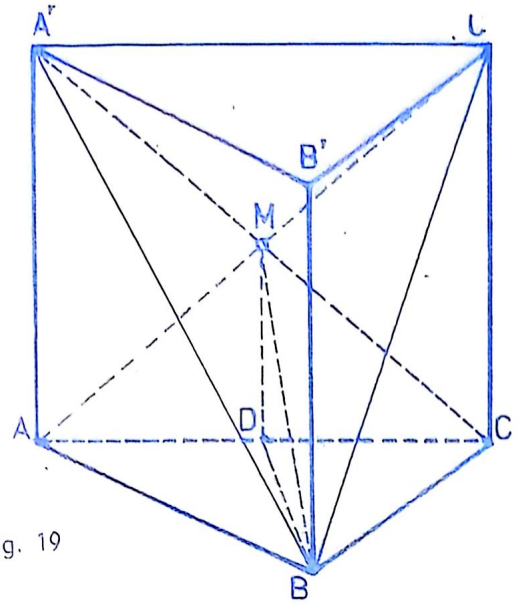


Fig. 19

12.1.26 (fig. 20). Fie G mijlocul muchiei BC și $EG \cap BF = H$. $P \cap Q = AH$. $AG = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $GH = \frac{CF}{2} = \frac{a}{4}$. Triunghiul AGH dă $AH = \frac{a\sqrt{13}}{4}$

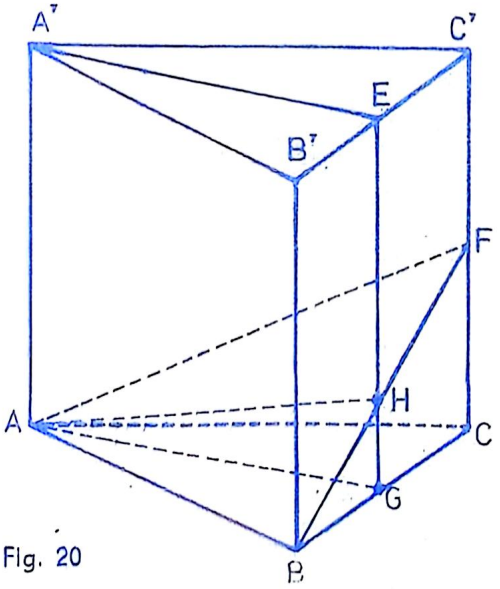


Fig. 20

12.1.27 (fig. 21). Tăiem prisma cu planul Q determinat de dreapta AA' și punctul O. Acest plan taie baza după dreapta AE, E fiind mijlocul laturii BC. $P \cap Q = DE$; $DE \cap OO' = M$. Planul Q taie baza superioară după dreapta $O'A'$. Bazele fiind paralele, $A'O' \parallel AO$. Totodată $A'O' \equiv AO$ (razele cercurilor circumscrise), deci $AOO'A'$ este un paralelogram, deci $O'O \parallel A'A$.

$\triangle EMO \sim \triangle EDA$, deci[1] $\frac{OM}{AD} = \frac{OE}{AE} = \frac{1}{3}$, deci $OM = \frac{AD}{3} = \frac{a}{6}$.

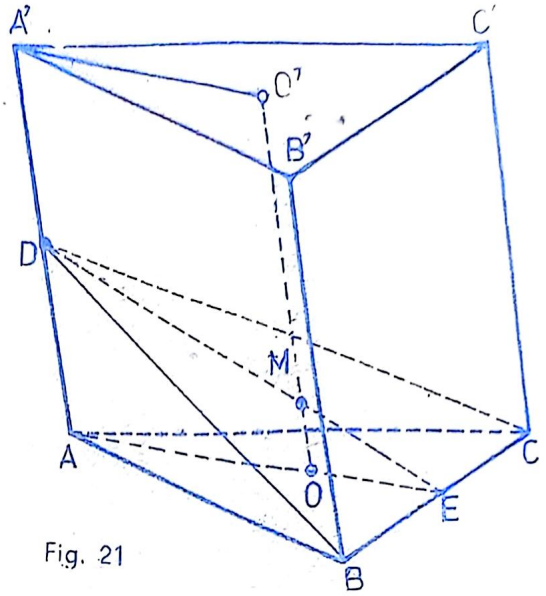


Fig. 21

[1] Pentru a nu repeta mereu aceleași explicații, dăm mai jos cîteva proprietăți ale triunghiului echilateral. Fie a latura lui. Atunci înălțimea $= \frac{a\sqrt{3}}{2}$, aria $= \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,

Fie AD o înălțime și O centrul cercului circumscris triunghiului (fig. 22).

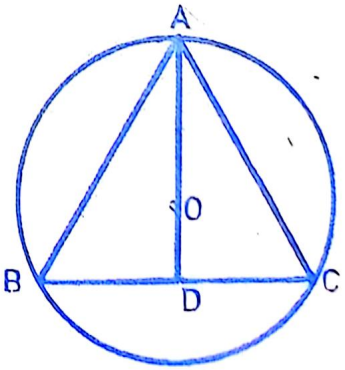


Fig. 22

12.1.28. a) Se obține de cîte două ori $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ și $\frac{c}{2}$. b) Se obține de cîte patru ori $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $\frac{\sqrt{b^2+c^2}}{2}$ și $\frac{\sqrt{c^2+a^2}}{2}$.

12.1.29 (fig. 23). Luăm, de exemplu, AE și $B'F$. Ducem EG perpendicular pe BC și FH perpendicular pe $A'D'$. $\triangle ABG \equiv \triangle B'A'H$ (LUL), deci $AG \equiv B'H$; apoi $\triangle AGE \equiv \triangle B'HF$ (LUL), deci $AE \equiv B'F$.

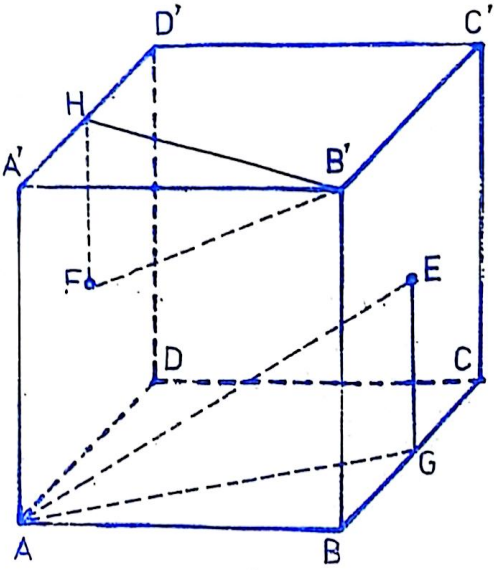


Fig. 23

12.1.30. b) Dacă $A'D \perp BC$, atunci $AD \perp BC$ (rec. t. celor 3 $\perp$), deci AD este înălțimea triunghiului ABC. La fel, dacă $BE \perp A'C'$, atunci $B'E$ este înălțimea triunghiului $A'B'C'$. $\triangle A'AD \equiv \triangle BB'E$ (LUL), deci... *Altfel*: Se calculează AD, apoi DA' și se obține $A'D^2 = \frac{3a^2}{4} + m^2$, unde a este latura bazei și m muchia.

Atunci O_A este raza lui și OD este apotema triunghiului. $OA = 2OD$, punctul O împarte înălțimea AD în raportul $\frac{1}{2}$, $OD = \frac{1}{3}AD$, $OA = \frac{2}{3}AD$, deci

$$OD = \frac{a\sqrt{3}}{6},\ OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

12.1.31. *Soluția I* (fig. 25). Trebuie aflat segmentul AD. Ducem înălțimea AE a triunghiului ABC. Fie $AB = a$. Atunci $AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (v. nota de la problema 12.1.27) și $ED = \frac{a}{2}$. Triunghiul AED dă $AD = a$, deci $AD \equiv AB$.

Soluția II. $\triangle DAE \equiv \triangle BAE$ (LUL), deci...

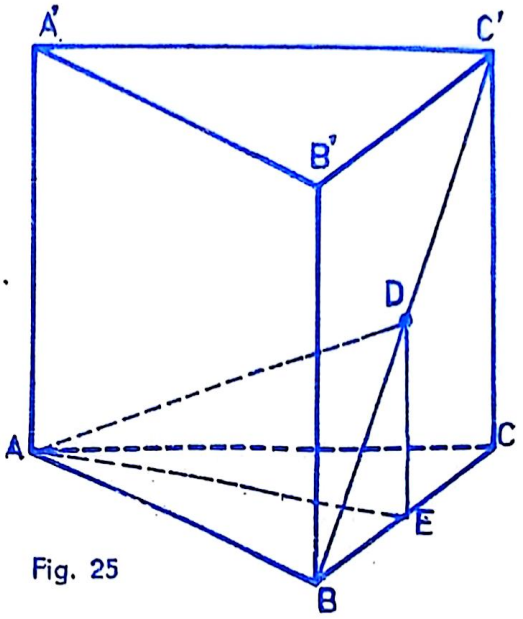
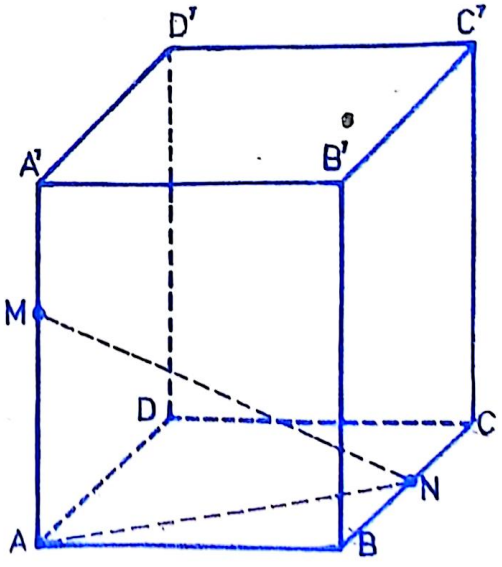


Fig. 25

12.1.32 (fig. 26). Fie M un punct oarecare al muchiei AA' și N un punct oarecare al muchiei BC. Unim N cu A. Se compară segmentul MN cu AN și acesta cu AB.

Fig. 26



12.1.33. a) Fie O piciorul perpendicularei coborîte din C' pe DB (fig. 27); $CO \perp BD$ (rec. t. celor 3 $\perp$), deci O este centrul bazei. Triunghiul $C'OC$ dă $C'O = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. b) Fie G piciorul perpendicularei coborîte din C' pe EF, $CG \perp FE$. Dar $FE \parallel DB$, deci $CG \perp DB$, deci $G \in CA$. În triunghiul AOB, EG este linie mijlocie, deci $AG = \frac{AO}{2} = \frac{AC}{4}$ şi $CG = \frac{3AC}{4} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$. Triunghiul $C'GC$ dă $C'G = \frac{a\sqrt{34}}{4}$.

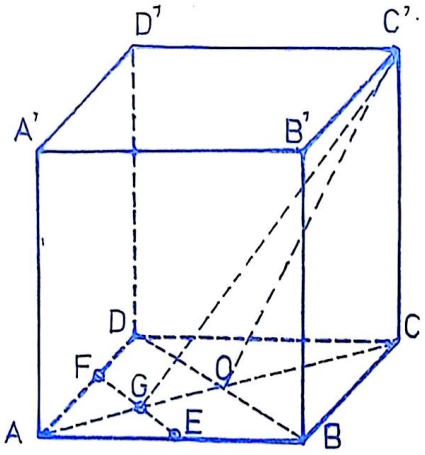


Fig. 27

12.1.34. a) Fie D piciorul perpendicularei din A' pe BC (fig. 28); $AD \perp BC$ (rec. t. celor 3 $\perp$). Se folosesc triunghiurile ABD şi $A'AD$. $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $A'D = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. b) Fie DE linia mijlocie şi F piciorul perpendicularei coborîte din B' pe DE; $BF \perp DE$. Totodată BF este jumătate din înălţimea triunghiului ABC (fig. 29). Triunghiul $B'BF$ dă $B'F = \frac{a\sqrt{19}}{4}$.

Altfel: Se află $B'D$ din triunghiul $B'BD$, apoi $B'F$ din triunghiul $B'FD$, în care $FD = \frac{a}{4}$. c) Fie G piciorul perpendicularei coborîte din P pe AB. $PD \perp$ planul ABC, deci $DG \perp AB$. În triunghiul PDG, DG este jumătate din înălţimea triunghiului ABC şi $DP = \frac{a}{2}$ (fig. 29). Teorema lui Pitagora dă $PG = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

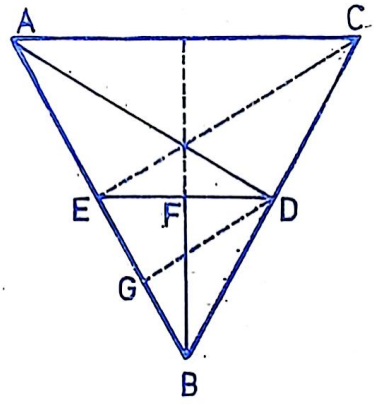


Fig. 29

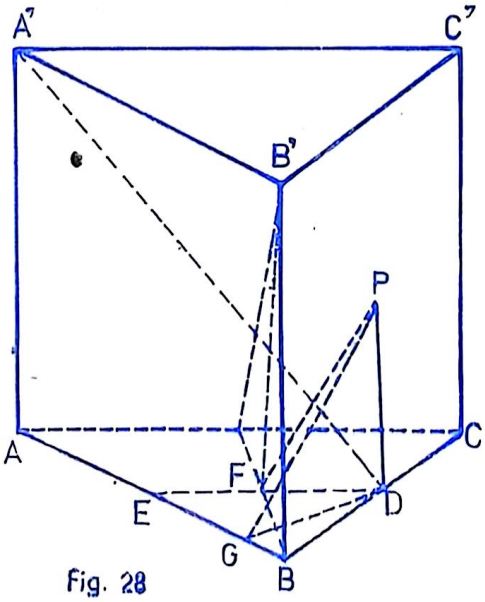
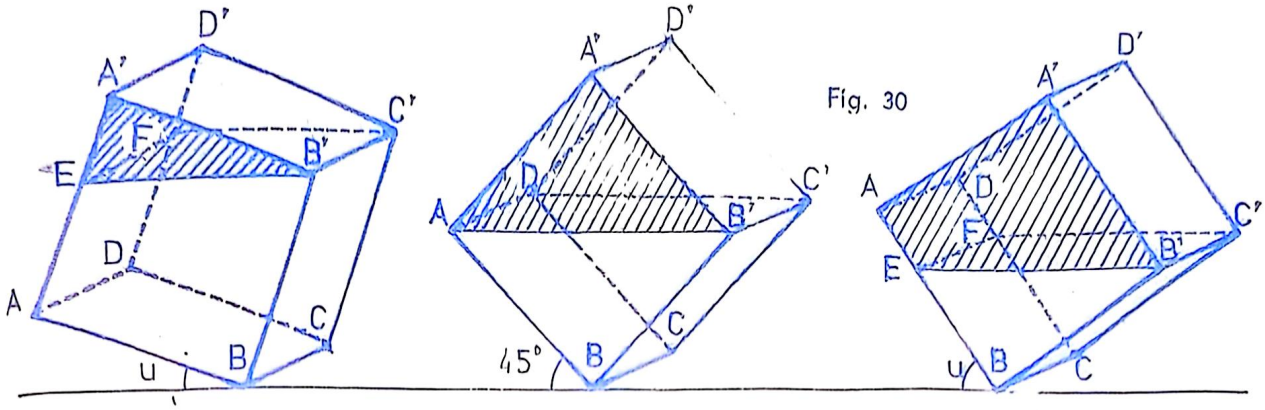


Fig. 28

12.1.35. Greutatea apei dislocuite trebuie să fie egală cu greutatea corpului. $c(1 - d)$.

12.1.36 (fig. 30-a). Considerăm cazul cînd $u < 45°$. Suprafaţa apei este totdeauna orizontală. Ducem prin muchia $B'C'$ un plan orizontal; fie $EB'C'F$ intersecţia lui cu cubul. Atunci unghiul $EB'A' = u$ şi cantitatea de apă care s-a vărsat este dată de volumul prismei care are ca bază triunghiul $A'EB'$ şi ca înălţime $B'C'$.

$$EA' = a \operatorname{tg} u, \quad \mathcal{V} = \frac{a^3 \operatorname{tg} u}{2}.$$



Pentru $u = 45°$, situaţia este cea din figura 30-b, suprafaţa apei conţine muchia AD,

$$\operatorname{tg} u = 1,\ \mathcal{V} = \frac{a^3}{2}.$$

Se varsă jumătate din cantitatea de apă. Figura 30-c reprezintă cazul cînd $u > 45°$. Partea de apă care s-a vărsat este dată de prisma care are ca bază trapezul $AEB'A'$. Este mai uşor să calculăm partea care a rămas în bidon, dată de prisma cu baza EBB'. Atunci $\widehat{BEB'} = u$. Triunghiul BEB' dă $EB = a \operatorname{ctg} u$, deci volumul prismei este $\frac{a^3 \operatorname{ctg} u}{2}$ şi volumul părţii care s-a vărsat este

$$\mathcal{V} = a^3\left(1 - \frac{\operatorname{ctg} u}{2}\right).$$

12.1.37 (fig. 30-a). Cînd $\operatorname{tg} u < \frac{c}{a}$, aria triunghiului $A'EB'$ este $\frac{a^2 \operatorname{tg} u}{2}$, deci volumul apei vărsate este

$$\frac{a^2 b \operatorname{tg} u}{2}.$$

Cînd $\operatorname{tg} u > \frac{c}{a}$ (fig 30-c), aria triunghiului $B'EB$ este $\frac{c^2 \operatorname{ctg} u}{2}$, volumul apei rămase este $\frac{bc^2 \operatorname{ctg} u}{2}$, deci volumul apei rămase este

$$\mathcal{V} = bc\left(a - \frac{c \operatorname{ctg} u}{2}\right).$$

Dacă

$$\operatorname{tg} u = \frac{c}{a},\ \operatorname{ctg} u = \frac{a}{c},$$

apare situaţia din figura 30-b, ambele rezultate devin $\frac{abc}{2}$, ceea ce înseamnă că volumul apei care se varsă este jumătate din volumul bidonului.

12.1.38. a) Înălţimea prismei se află din triunghiul $B'AB$ (fig. 31): $AB' = a\sqrt{3}$. Volumul $= a^3\sqrt{3}$. Unghiul cerut este $B'BA$. Acelaşi triunghi dă

$$\cos B'BA = \frac{AB}{B'B} = \frac{1}{2},$$

$\widehat{B'BA} = 60°$.

b) Acest unghi este totodată un unghi al feţei ABB'. Apoi

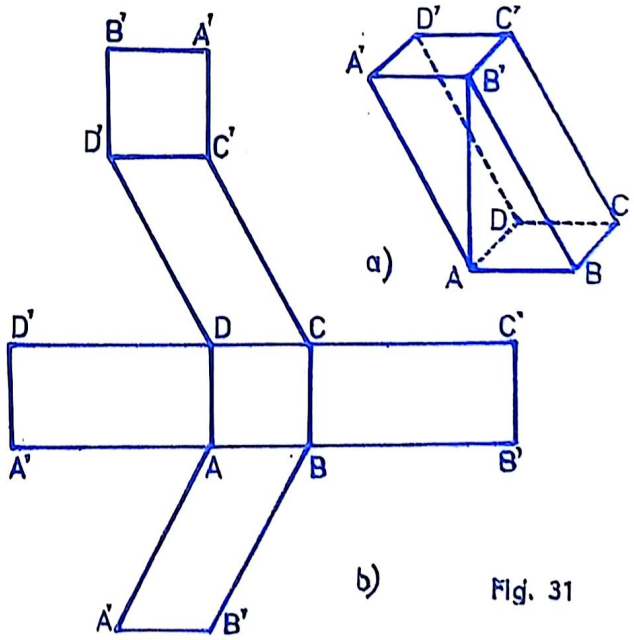


Fig. 31

$B'A \perp$ pe planul bazei și $AB \perp BC$, deci $B'B \perp BC$ (t. celor 3 $\perp$). Fața din dreapta BCC' este un dreptunghi. Desfășurarea are forma din figura 31-b sau 31-c. c) Unghiul diedru format de fața $A'AD$ sau $B'BC$ cu planul bazei

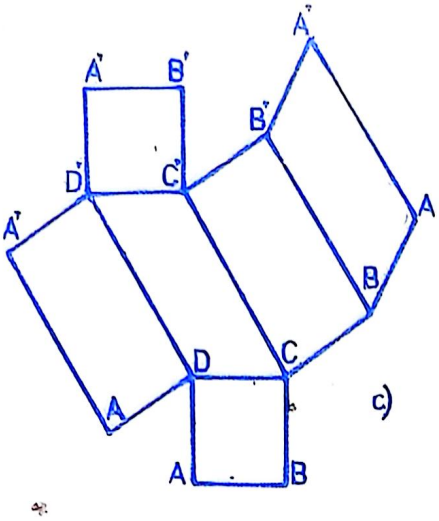


Fig. 31

(muchia BC) este $B'BA = 60°$. Unghiul format de fața $D'DC$ sau $A'AB$ (muchia AB) este $\widehat{B'AD} = 90°$.

Observare. Faptul că fețele $A'AD$ și $B'BC$ sînt dreptunghiuri se poate vedea și astfel. Considerăm prisma pătrată dreaptă și o aplecăm spre stînga astfel încît fața din dreapta, $B'BC$, să se rotească în jurul muchiei BC și cea din stînga, $A'AD$ în jurul muchiei AD. Atunci fețele ABB' și DCC' se deformează, dar $A'AD$ și $B'BC$ rămîn dreptunghiuri.

12.1.39. a) Înălțimea prismei se află din triunghiul $A'AC$ (fig. 32); $A'C = a\sqrt{2}$. Volumul $= a^3\sqrt{2}$. Unghiul cerut este $A'AC$. Diagonala bazei este

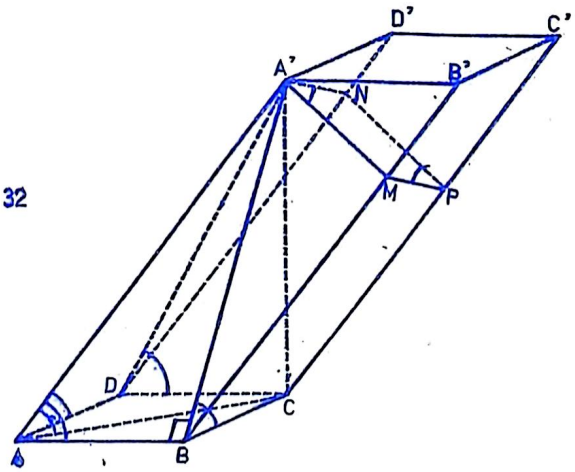


Fig. 32

$AC = a\sqrt{2}$, deci $AC \equiv CA'$, $\widehat{A'AC} = 45°$. b) Pentru a afla unghiul $A'AB$, avem nevoie de înălțimea paralelogramului $ABB'A'$. $A'C \perp$ planul bazei și $CB \perp AB$, deci $A'B \perp AB$ (t. celor 3 $\perp$). Triunghiul $A'AB$ dă $\cos A'AB = \frac{AB}{AA'} = \frac{1}{2}$; $\widehat{A'AB} = 60°$. În mod analog se află că $A'D \perp AD$ și unghiul $A'AD = 60°$. Toate fețele laterale sînt congruente. c) Unghiul format de fața $B'BC$ sau $A'AD$ cu planul bazei (muchia AD) este dat de unghiul $A'DC$. Triunghiul $A'DC$ dă $\operatorname{tg} A'DC = \frac{A'C}{DC} = \sqrt{2}$, $\widehat{A'DC} = 55°$. Unghiul format de fața $D'DC$ sau $A'AB$ (muchia AB) cu planul bazei este dat de unghiul $A'BC$; se obține tot 55° ($\triangle A'DC \equiv \triangle A'BC$). d) Tăiem prisma cu planul care trece prin A' și este perpendicular pe AA', deci pe toate muchiile laterale. Intersecția este un paralelogram $A'MPN$. Atunci $A'N \perp AA'$ și $A'M \perp AA'$, deci unghiul plan corespunzător unghiului diedru de muchie AA' este $MA'N$ și unghiul plan corespunzător unghiului diedru de muchie CC' este MPN; aceste unghiuri sînt congruente. Tot așa, unghiul plan corespunzător unghiului diedru de muchie BB' sau DD' este $A'MP$, suplementar cu primul. Este deci suficient să aflăm unghiul $MA'N$. Triunghiul $A'MB'$ dă

$$A'M = A'B' \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$B'M = A'B' \cos 60° = \frac{a}{2}.$$

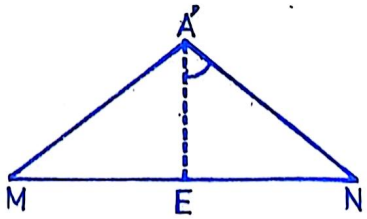


Fig. 33

La fel se obține din triunghiul $A'ND'$

$$A'N = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad D'N = \frac{a}{2}.$$

Rezultă că $D'N \equiv B'M$, deci $D'NMB'$ este un paralelogram, deci $MN = B'D' = a\sqrt{2}$. Acum unghiul $MA'N$ se poate afla din triunghiul isoscel $MA'N$ (fig. 33):

$$\sin EA'N = \frac{EN}{A'N} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3};\ \widehat{MA'N} = 109°.$$

Unghiurile diedre sînt de 109° și 71°.

12.1.40. a) Ducem $C'M$ perpendicular pe AC (fig. 34); $C'M$ este înălțimea prismei. Triunghiul $C'MC$ dă $C'M = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $CM = \frac{a}{2}$; volumul $= \frac{3a^3}{8}$. Unghiul cerut este $C'CM = 60°$. b) Pentru a afla înălțimea rombului $BCC'B'$, ducem din M perpendiculara MN pe BC; atunci $C'N \perp BC$ (t. celor 3 $\perp$). Fie AD o înălțime a triunghiului ABC; în triunghiul ADC, MN este linie mijlocie, deci $CN = \frac{CD}{2} = \frac{a}{4}$.

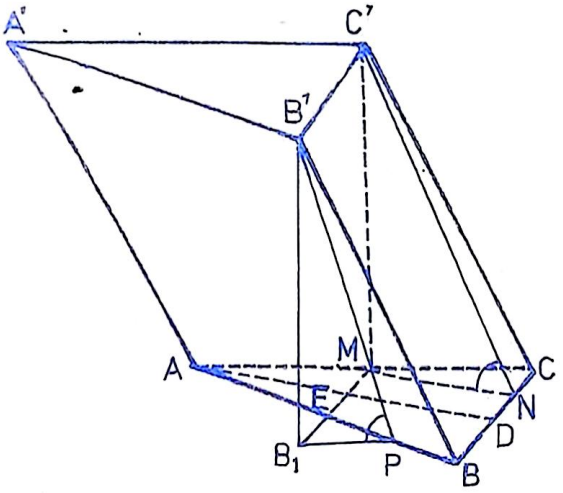


Fig. 34

Triunghiul $C'NC$ dă $\cos C'CN = \frac{1}{4}$; $\widehat{C'CN} = 75°30'$. Pentru a afla unghiul $B'BA$, trebuie să ducem din B' perpendiculara pe AB; pentru aceasta, trebuie dusă perpendiculara din B' pe planul bazei, adică trebuie aflată proiecția punctului B' pe planul bazei. Dreapta $B'C'$ fiind paralelă cu acest plan, proiecția ei este paralelă cu ea. Deci ducem prin M paralela la $B'C'$ și prin B' paralela la $C'M$; fie B_1 intersecția lor, MB_1 este proiecția căutată, deci $B'B_1 \perp$ planul bazei. Acum ducem B_1P perpendicular pe AB; atunci $B'P \perp AB$ (t. celor 3 $\perp$). Fie $MB_1 \cap AB = E$. ME este linie mijlocie în triunghiul ABC (fig. 35), deci $EB = \frac{a}{2}$, triunghiul EB_1B este echilateral, P este mijlocul segmentului EB, deci $BP = \frac{a}{4}$. Rezultă că $\triangle B'PB \equiv \triangle C'NC$ (IC), unghiurile $B'BP$ și $C'CN$ sînt congruente, de asemenea și cele două fețe laterale. c) Unghiul format de fața BCC' cu planul bazei este $C'NM$.

$$\operatorname{tg} C'NM = \frac{C'M}{MN} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{4} = 2;$$

$$\widehat{C'NM} = 63°30'.$$

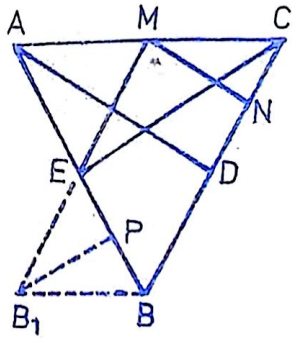
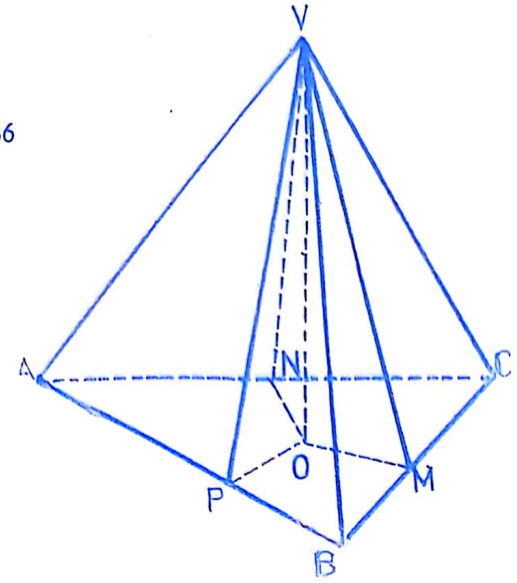


Fig. 35

Unghiul ascuțit format de fața ABB' cu planul bazei este $B'PB_1$. Dar $B'B_1 \equiv C'M$ și $B_1P \equiv MN$ (jumătate din înălțimea triunghiului ABC), deci $\triangle B'B_1P \equiv \triangle C'MN$, deci $\widehat{B'PB_1} = \widehat{C'NM} = 63°30'$. Unghiul cerut este de $180° - 63°30' = 116°30'$.

12.2.1 (fig. 36). Fie O piciorul înălțimii piramidei și $OM \perp BC$ $(M \in BC)$; $VM \perp BC$ (t. celor 3 $\perp$), deci VM este tocmai înălțimea triunghiului VBC. Analog VN și VP. Cele trei perpendiculare trec prin punctul O.

Fig. 36



12.2.2. Fie O piciorul înălțimii piramidei. Se aplică teorema cu privire la oblicele congruente duse dintr-un punct la un plan și reciproca ei. Poligonul trebuie să fie inscriptibil.

12.2.3. a) Intersecția este triunghiul echilateral EDF (fig. 37) cu latura $\frac{a}{2}$. Aria $= \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. b) Intersecția este triunghiul ADE în care $AD = \frac{VB}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = AE$ (într-un triunghi dreptunghic isoscel, înălțimea este jumătate din ipotenuză). $\mathcal{A} = \frac{a^2\sqrt{7}}{16}$. c) Intersecția este pătratul $EFGH$.

$$\mathcal{A} = \frac{a^2}{4}.$$

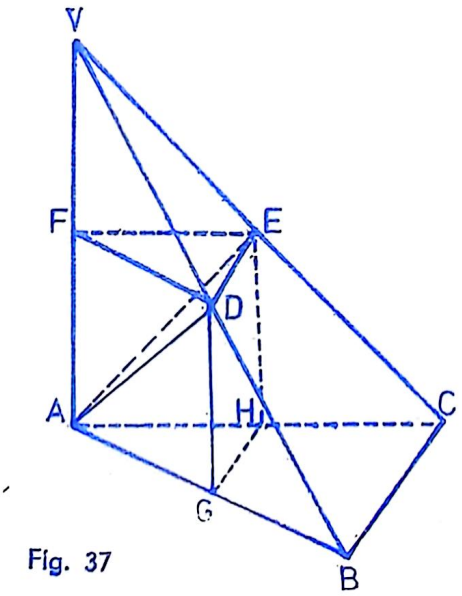


Fig. 37

12.2.4. a) Planele P și VAD fiind paralele (fig. 38) intersecțiile lor cu planul VAB sînt paralele, deci $P \cap$ $\cap VAB$ este paralela EF la VA. Analog, $P \cap$ planul ABC este paralela FG la AD. Apoi $BC \parallel FG$, deci $BC \parallel P$, deci planul VBC taie P după dreapta EH paralelă cu BC, deci $EH \parallel FG$.

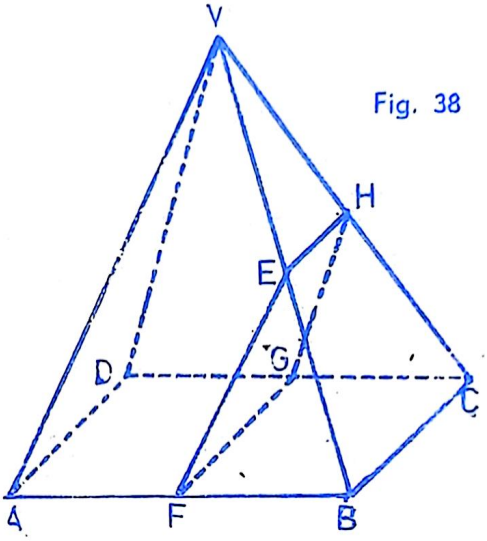


Fig. 38

Intersecția este trapezul $EFGH$ și $GH \parallel VD$. b) Fie $VE = x$. Calculăm perimetrul patrulaterului considerînd că x este cunoscut. Triunghiul VEH este echilateral, deci $EH = x$. Apoi $EB = a - x$. Triunghiul EFB fiind echilateral, $EF = a - x$; tot așa $HG = a - x$. $FG = BC = a$. Perimetrul este

$$p = 3a - x.$$

Perimetrul triunghiului VBD este $t = 3a$, deci $p < t$.

c) Cînd x variază de la 0 la a, p descrește de la $3a$ la $2a$. Cînd $x = 0$, $p = 3a$; trapezul $EFGH$ devine triunghiul VAD. Cînd $x = a$, $p = 2a$; latu-

rile EH și FG devin BC și laturile EF și GH se reduc la cîte un punct. Perimetrul devine $2BC = 2a$.

12.2.5. a) VA și BC; VB și AC; VC și AB (fig. 39). b) Primele două perechi dau patrulaterul $MQNP$. În triunghiul VAB, MP este linie mijlocie, deci $MP \parallel AB$ și $MP = \frac{AB}{2}$. În triunghiul CAB, QN este linie mijlocie, deci $QN \parallel AB$ și $QN = \frac{AB}{2}$. Rezultă că $MP \parallel QN$ și $MP \equiv QN$, deci $MQNP$ este un paralelogram. Perechea a doua și a treia de muchii opuse dau paralelogramul $PSQR$; prima și a treia pereche dau paralelogramul $MSNR$. c) Ca linii mijlocii,

$$MQ = \frac{VC}{2},\quad QN = \frac{AB}{2},\quad NP = \frac{VC}{2},$$

$$PM = \frac{AB}{2}.$$

Rezultă că perimetrul acestui paralelogram este $VC + AB$. La fel se calculează perimetrele celorlalte paralelograme. d) Fie $MN \cap PQ = O$. Acest punct este mijlocul diagonalei PQ care este totodată o diagonală a paralelogramului $PSQR$. Rezultă că punctul O este mijlocul celeilalte diagonale, RS. Așadar...

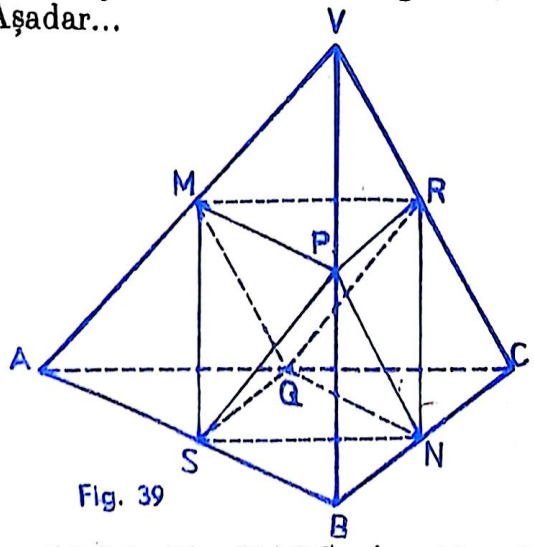


Fig. 39

12.2.6. Fie $VABC$ piramida și M mijlocul muchiei BC. $BC \perp MV$ și $BC \perp MA$, deci $BC \perp$ planul VAM, deci $BC \perp VA$.

12.2.7 (fig. 40). Presupunem că tetraedrul există. Atunci segmentul a formează cîte un triunghi cu segmentele b și c, precum și cu d și e; segmentul f formează cîte un triunghi cu segmentele e și b, precum și cu d și c; ș.a.m.d. Se formează astfel 12 grupe de cîte 3 segmente, ca: (a, b, c), (a, d, c) ș.a.m.d. dintre care unele se repetă așa că rămîn grupele distincte

$$(a, b, c),\ (a, d, e),\ (b, e, f),\ (c, d, f).$$

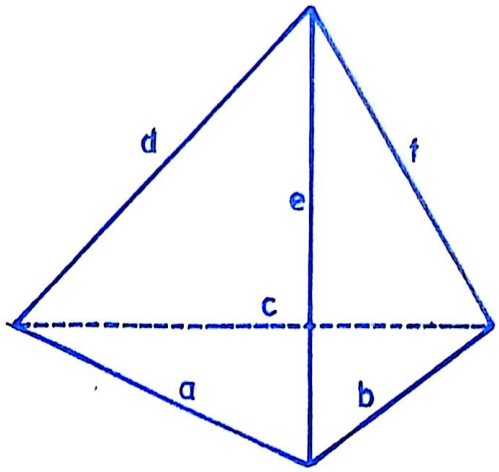


Fig. 40

Segmentele din fiecare dintre aceste grupe îndeplinesc „condiția triunghiulară", adică fiecare din ele este mai mic decît suma celorlalte două. Se constată că aceste grupe corespund tocmai fețelor tetraedrului: (a, b, c) corespunde bazei, (a, d, e) feței din stînga ș.a.m.d. Reciproc, dacă aceste condiții sînt îndeplinite, cele patru triunghiuri care trebuie să formeze fețele tetraedrului există. Afară de aceasta, se constată că fiecare dintre literele a, b și c figurează în două grupe. De exemplu, a figurează în grupele (a, b, c) și (a, d, e), ceea ce înseamnă că muchia a este comună acestor două triunghiuri; tot așa, litera d figurează în grupele (a, d, e) și (c, d, f), ceea ce înseamnă că muchia d este comună acestor triunghiuri; ș.a. m.d. Deci tetraedrul există.

12.2.8. a) Suprafața este formată din 4 triunghiuri echilaterale congruente. Aria totală[1] $= a^2\sqrt{3}$. b) Ducem înălțimile AD și VD (fig. 42). $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, AO este raza cercului circumscris triunghiului ABC, deci $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Triunghiul VAO dă $VO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Volumul $= \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

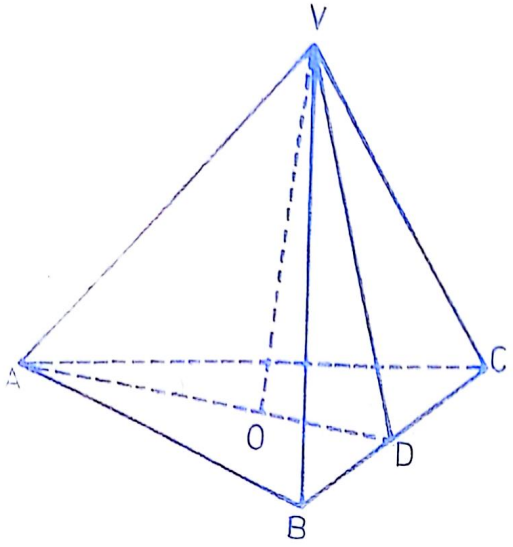


Fig. 42

12.2.9. Trebuie aflate muchiile tetraedrului mic. Ducem (fig. 43) înălțimile AE și AF. Fie $AB = a$; atunci $EF = \frac{a}{2}$. Triunghiurile asemenea $AD'B'$ și AEF dau

$$\frac{D'B'}{EF} = \frac{AD'}{AE}.$$

Triunghiul ABC arată[1] că $\frac{AD'}{AE} = \frac{2}{3}$, deci $\frac{D'B'}{EF} = \frac{2}{3}$; $D'B' = \frac{2}{3}EF = \frac{2}{3}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a}{3}$. Tetraedrul mic este regulat. Pentru a afla aria și volumul lui, se înlocuiește în problema precedentă a prin $\frac{a}{3}$. a) $\frac{1}{9}$. b) $\frac{1}{27}$. (v. problema 13.5.3).

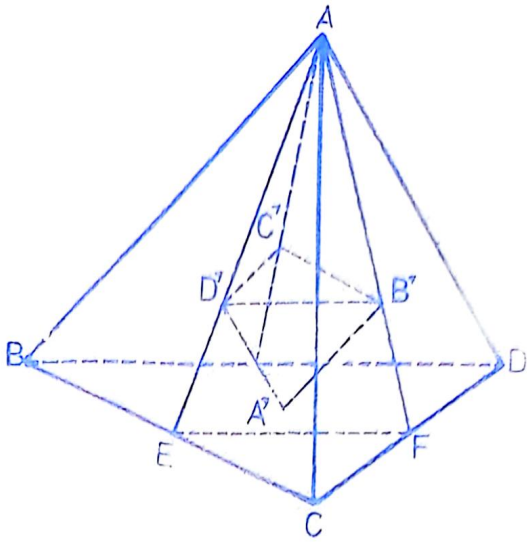


Fig. 43

12.2.10. v. figura 44. Cazul piramidei patrulatere regulate în care înălțimea este jumătate din latura bazei.

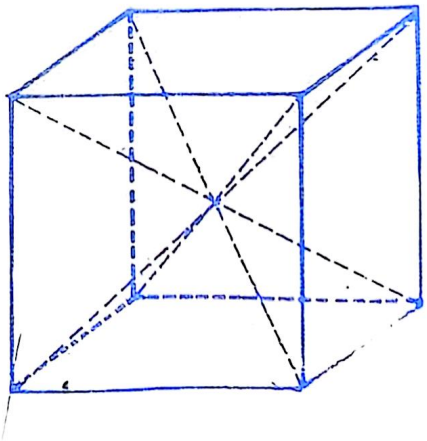


Fig. 44

12.2.11 (fig. 45). a) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. b) 60° sau 90°. c) $\frac{1}{6}$.

[1] v. nota de la problema 12.1.27.

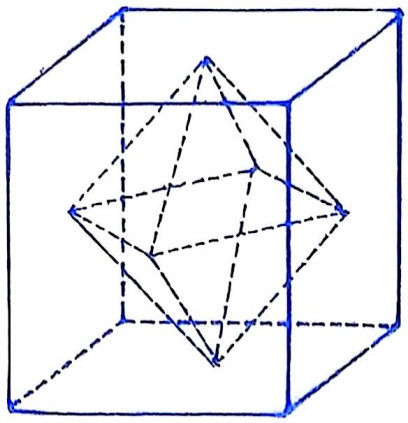


Fig. 45

12.2.12 (fig. 46). a) $VB = VC = BC = a\sqrt{2}$. b) $\mathcal{V} = \frac{a^3}{6}$. c) 90°; 45°; 45°. d) 45°, 60° sau 90°. e) 90°; 90°; $\operatorname{tg} VDA = a : \frac{a\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$; $\widehat{VDA} = 55°$. f) Distanța AO este înălțimea piramidei cînd se ia ca bază triunghiul VBC. Cunoscînd volumul piramidei și aria bazei VBC $\left(= \frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$, se obține $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

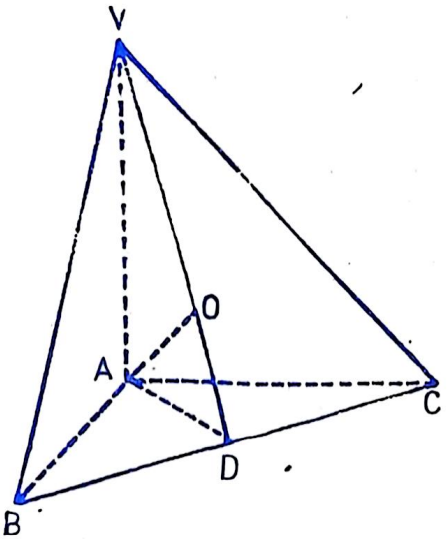


Fig. 46

Altfel: AB, AC și AV sînt oblice duse din punctul A pe planul VBC și ele sînt congruente, deci $OB \equiv OC \equiv OV$, punctul O este centrul triunghiului VBC. În triunghiul VAD, $VA = a$, $AD = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Teorema lui Pitagora dă $VD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. $VO = \frac{2}{3}VD = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Teorema lui Pitagora dă...

12.2.13 (fig. 47). a) $VB = VC = a\sqrt{2}$. b) $\mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. c) 45°; 45°; 90°. d) 90°; 45°; 90°; 45°; fie M mijlocul muchiei BC. Triunghiul VBM dă $\cos \widehat{VBC} = \frac{a}{2} : a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\widehat{VBC} = 69° = \widehat{VCB}$. e) 90°; 90° și $\operatorname{tg} VMA = a : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$; $\widehat{VMA} = 49°$.

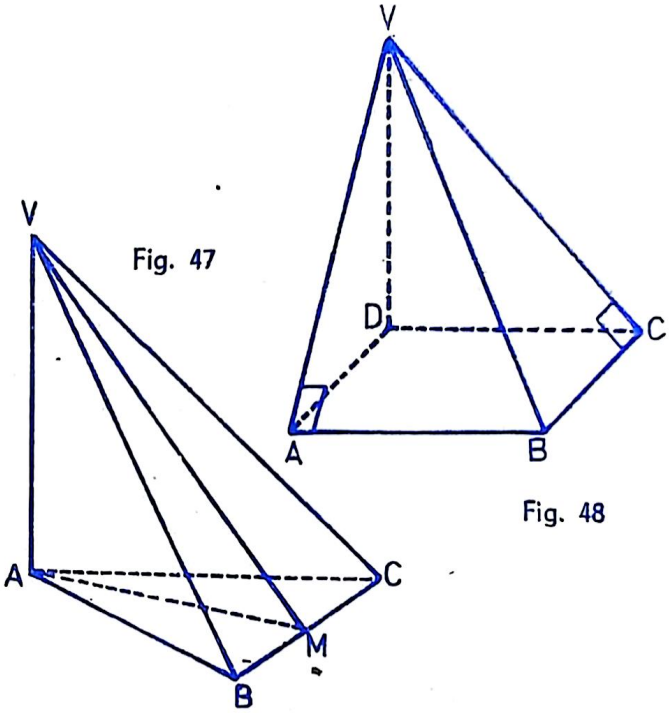


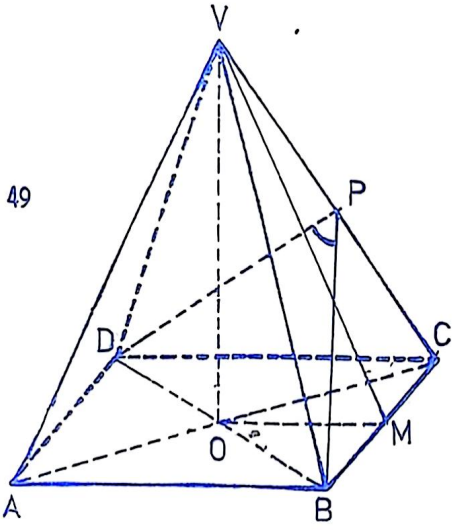
Fig. 47

Fig. 48

12.2.14 (fig. 48). a) $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{3}$. b) $\mathcal{V} = \frac{a^2}{3}$. c) 45°; 45°; 90° și $\operatorname{tg} VBD = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\widehat{VBD} = 35°30'$. d) $VA \perp AB$ și $VC \perp BC$ (t. celor 3 $\perp$); $\operatorname{tg} VBA = \frac{a\sqrt{2}}{a}$; $\widehat{VBA} = 54° = \widehat{VBC}$. e) 90°; 45°.

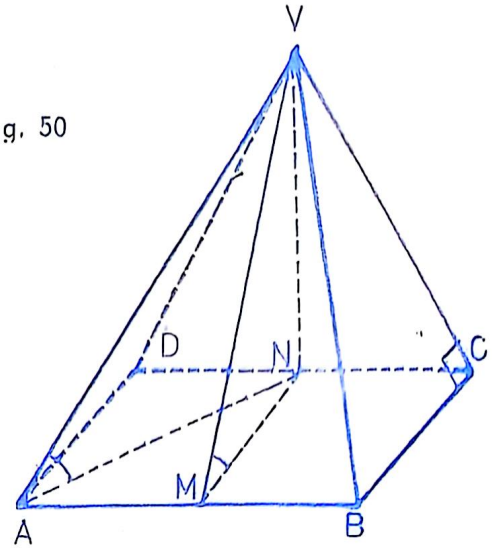
12.2.15. b) Fie O centrul bazei (fig. 49). Triunghiul VAC fiind isoscel, $VO \perp AC$, tot așa $VO \perp BD$, deci $VO \perp$ planul bazei, adică este înălțimea piramidei. $AC = a\sqrt{2}$, $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; triunghiul VAO dă $VO = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. c) 45°. d) Toate fețele laterale sînt triunghiuri echilaterale. e) Fie M mijlocul laturii BC. Triunghiul VOM dă $\cos VMO = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $\widehat{VMO} = 55°$. Celelalte unghiuri diedre au aceeași măsură. f) Fie P mijlocul muchiei VC; $PB \perp VC$ și $DP \perp VC$, deci unghiul plan corespunzător este BPD. Triunghiul POB dă $\sin OPB = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\widehat{OPB} = 35°30'$; $\widehat{DPB} = 71°$. Celelalte unghiuri diedre au aceeași măsură.

Fig. 49



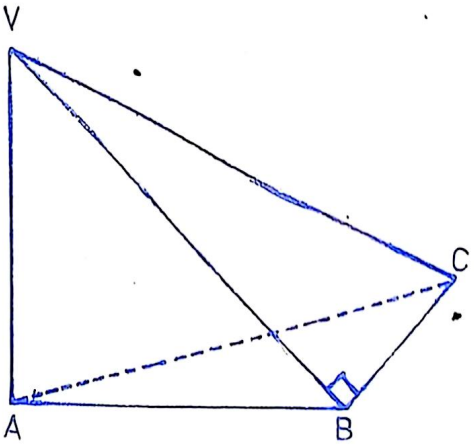
12.2.16. a) $VA = VB = a\sqrt{2}$ (fig. 50). b) $\mathcal{V} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$. c) 60°; 60°; $\sin VAN = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$; $\widehat{VAN} = 37°30' = \widehat{VBN}$. d) $\cos VAM = \frac{a}{2} : a\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$; $\widehat{VAM} = 69°30' = \widehat{VBM}$; $\widehat{VBC} = \widehat{VAD} = 45°$. e) 90°; $\operatorname{tg} VMN = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\widehat{VMN} = 41°; 60°; 60°$.

Fig. 50



12.2.17. a) $AC = VB = a\sqrt{2}$; $VC = a\sqrt{3}$ (fig. 51). b) $\mathcal{V} = \frac{a^3}{6}$. c) 90°; 45°; $\operatorname{tg} VCA = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\widehat{VCA} = 35°30'$. d) $\widehat{VAB} = 90°$; $\widehat{VBA} = 45°$; CB este perpendicular pe dreptele BA și VA, deci este perpendicular pe planul VAB, deci $CB \perp VB$, $\widehat{VBC} = 90°$; $\operatorname{tg} VCB = \frac{VB}{BC} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$, $\widehat{VCB} = 55°$; $\widehat{VCA} = 35°30'$; $\widehat{VAC} = 90°$. e) 90°; 90°; 45°.

Fig. 51



12.2.18. a) Fie VD înălțimea piramidei (fig. 52). $VD = BD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; triunghiul VDB dă $VB = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. b) $\mathcal{V} = \frac{a^3}{8}$. c) 60°; 60°; 45°. d) Fie P mijlocul laturii VB a triunghiului isoscel CVB. Triunghiul CPB dă $\cos PBC = \frac{PB}{CB} = \frac{a\sqrt{6}}{4} : a = \frac{\sqrt{6}}{4}$; $\widehat{PBC} = 52°30' = \widehat{VBA}$; $\widehat{VCB} = 180° - 2 \cdot 52°30' = 75° = \widehat{VAB}$. f) $AP \perp VB$ și $CP \perp VB$, deci unghiul plan corespunzător este APC. Triunghiul VAB dă $AP = \frac{a\sqrt{10}}{4}$ și triunghiul APD dă $\sin APD = \frac{AD}{AP} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{5}$; $\widehat{APC} = 156°$.

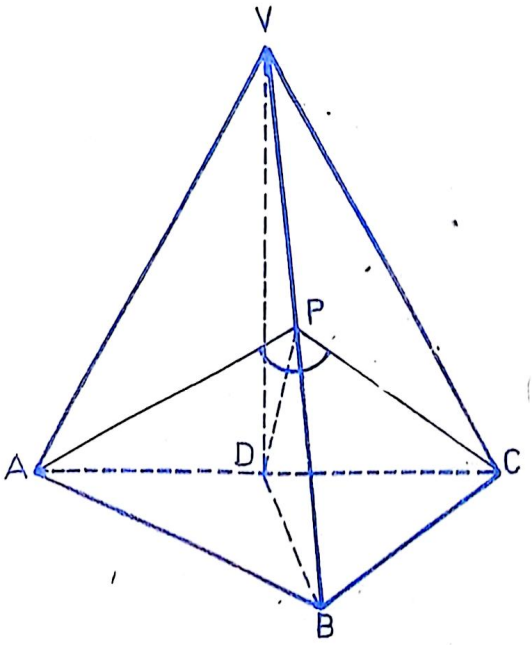


Fig. 52

12.2.19. Considerăm o piramidă patrulateră $VABCD$ (fig. 53) fără bază, făcută din carton. Pentru a obține desfășurarea ei, facem o tăietură de-a lungul unei muchii VA. Piramida fiind așezată pe masă, o apăsăm în jos astfel încît toate fețele laterale să se aștearnă pe planul mesei. Atunci în locul muchiei VA apar două segmente VA, unul este o latură a triunghiului VAB și celălalt a triunghiului VAD, și cînd turtim corpul, aceste segmente se rotesc în jurul punctului V depărtîndu-se unul de celălalt. Se obține astfel un poligon ca cel din figura 54; triunghiurile AVB, BVC,... nu acoperă toată partea din plan din jurul punctului V, deci suma unghiurilor AVB, BVC,... este mai mică decît 360°. $u < 120°$; $u < 90°$; $u < \frac{360°}{n}$. (v. problemele 15.2.16. și 15.2.17.)

Observare. Aceste considerații nu sînt o demonstrație matematică.

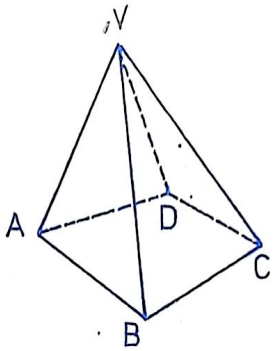


Fig. 53

12.2.20. a) Fie $VABC$ o piramidă în care $VA = VB = VC = a$ și $AB = BC = CA = b$. $\widehat{AVB} < 120°$ (v. probl. 12.2.19). Dacă $\widehat{AVB} = 120°$, $b = a\sqrt{3}$, deci dacă $\widehat{AVB} < 120°$, $b < a\sqrt{3}$. Reciproc, dacă această condiție este îndeplinită, putem desena un poligon neconvex ca cel din figura 54, care reprezintă desfășurarea piramidei, deci putem forma piramida. b) $b < a\sqrt{2}$.

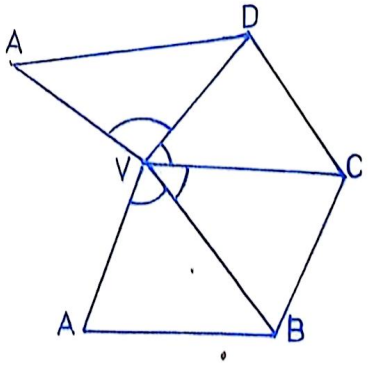


Fig. 54

12.3.1 (fig. 55). Fie $AB = a$, $BC = b$, $VD = i$. Notăm punctele de diviziune cu D_1 și D_2; atunci $VD_1 = D_1D_2 = D_2D = \frac{i}{3}$. Părțile sînt o piramidă și două trunchiuri de piramidă.

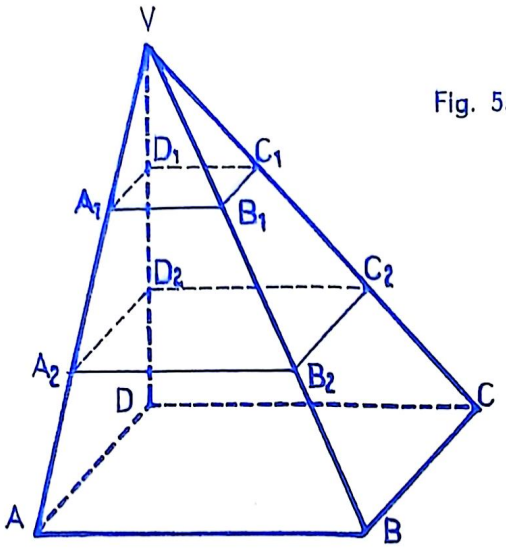


Fig. 55

$\triangle VD_1C_1 \sim \triangle VDC$, deci $\frac{D_1C_1}{DC} = \frac{VD_1}{VD} = \frac{1}{3}$; $D_1C_1 = \frac{DC}{3} = \frac{a}{3}$.

În mod analog se obține $A_1D_1 = \frac{b}{3}$.

Folosind triunghiurile asemenea VA_2D_2 și VAD, se obține $D_2C_2 = \frac{2a}{3}$, apoi $A_2D_2 = \frac{2b}{3}$. Aplicînd formulele se obține: Volumul piramidei întregi $\mathcal{V} = \frac{abi}{3}$; volumul piramidei mici $\mathcal{V}_1 = \frac{abi}{81}$; volumul trunchiului de la mijloc $\mathcal{V}_2 = \frac{7\,abi}{81}$; volumul trunchiului de jos $\mathcal{V}_3 = \frac{19\,abi}{81}$. Rapoartele sînt: $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}} = \frac{1}{27}$, $\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}} = \frac{7}{27}$, $\frac{\mathcal{V}_3}{\mathcal{V}} = \frac{19}{27}$. Cele trei volume sînt proporționale cu 1; 7 și 19.

Observare. Dacă se cunoaște propoziția din problema 13.5.3 rezultatele se obțin fără a calcula volumele. Muchiile piramidei mici se obțin înmulțind muchiile piramidei întregi cu $\frac{1}{3}$, deci $\mathcal{V}_1 = \mathcal{V} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{\mathcal{V}}{27}$. Volumul piramidei $VA_2B_2C_2$ se obține înmulțind muchiile piramidei mici cu 2, deci volumul ei este $\mathcal{V}_1 \cdot 2^3 = \frac{8\mathcal{V}}{27}$ și volumul trunchiului de la mijloc este $\frac{8\mathcal{V}}{27} - \frac{\mathcal{V}}{27} = \frac{7\mathcal{V}}{27}$. Volumul trunchiului de jos este $\mathcal{V} - \frac{8\mathcal{V}}{27} = \frac{19\mathcal{V}}{27}$.

12.3.2 (fig. 56). Fie a latura bazei mari și i înălțimea trunchiului. Volumul trunchiului întreg este $\mathcal{V} = \frac{7a^2i}{12}$. Partea din corp situată la stînga planului P este o prismă cu baza $ADD'A'$ și înălțimea $AE = \frac{a}{2}$. Volumul ei este $\mathcal{V}_1 = \frac{3a^2i}{8}$. Volumul părții din dreapta planului P este $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} - \mathcal{V}_1 = \frac{5a^2i}{24}$.

Raportul este $\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = \frac{5}{9}$.

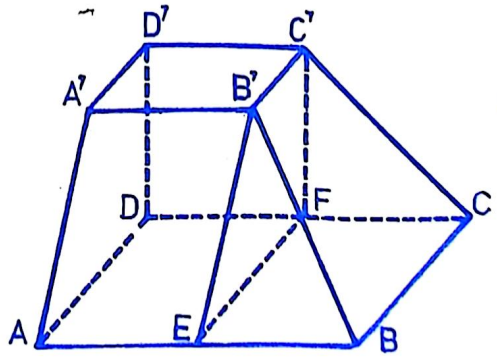


Fig. 56

12.3.3 (fig. 57). Fie $AB = c$, $AC = b$ și $AA' = i$. Volumul trunchiului este $\mathcal{V} = \frac{7bci}{24}$. Partea situată în

spatele planului P este o prismă cu baza $A'B'C'$ unde $A'B' = \frac{c}{2}$. Volumul ei este $\mathcal{V}_1 = \frac{bci}{8}$. Volumul părții rămase este $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V} - \mathcal{V}_1 = \frac{bci}{6}$. Raportul este $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{3}{4}$.

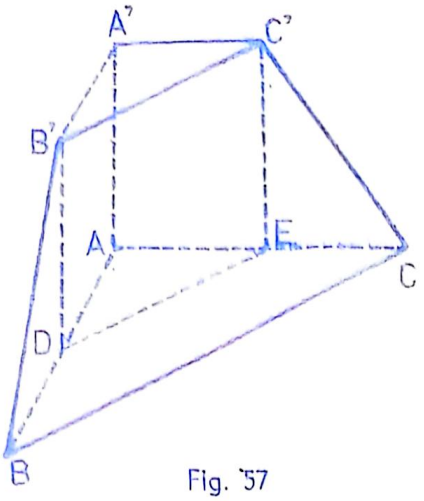


Fig. 57

12.3.4. Secțiunea este un dreptunghi care are ca laturi liniile mijlocii ale fețelor laterale, ele sînt $2a$ și $2b$. Fie i înălțimea trunchiului. Volumele sînt: $\mathcal{V}_1 = \frac{7abi}{6}$, $\mathcal{V}_2 = \frac{19abi}{6}$; $\frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{7}{19}$.

12.3.5. Se obține formula care dă, respectiv, volumul piramidei și volumul prismei.

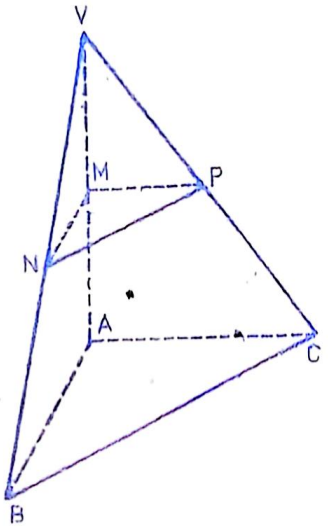


Fig. 58

12.3.6 (fig. 58). Se calculează volumele celor două piramide și se scade volumul mic din cel mare.

$$\mathcal{B} = \frac{bc}{2},\quad \mathcal{V} = \frac{bci}{6};\quad MN = \frac{c}{2},$$

$$MP = \frac{b}{2},\quad VM = \frac{i}{2},\quad v = \frac{bci}{48};$$

Volumul trunchiului este

$$\mathcal{V} - v = \frac{7bci}{48}.$$

12.3.7. Volumul trunchiului este

$$\mathcal{V} = \frac{7a^2 i\sqrt{3}}{96}.$$

12.4.1. Ultimul rînd este: a) n, $3n$, $2n$, $n + 2$. b) n, $2n$, $n + 1$, $n + 1$.

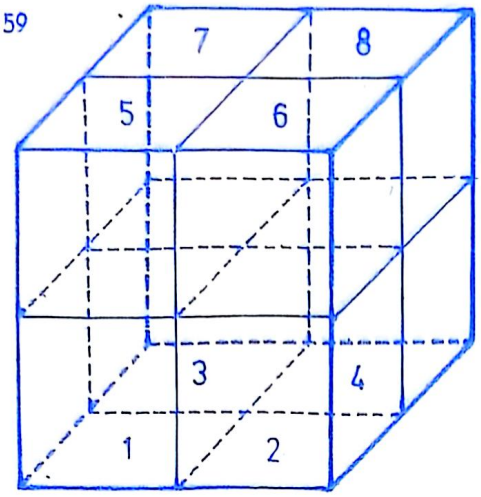
12.4.2. Pentru orientare, se va întocmi un tabel ca cel din problema precedentă. a) Nu. b) m trebuie să fie divizibil cu 3 și cel puțin 9. Se află întîi cîte laturi are baza. Prisma are $\frac{2m}{3}$ vîrfuri și $\frac{m}{3} + 2 = \frac{m+6}{3}$ fețe. c) v trebuie să fie par și cel puțin 6. Prisma are $\frac{3v}{2}$ muchii și $\frac{v}{2} + 2 = \frac{v+4}{2}$ fețe. d) f poate fi orice număr natural mai mare decît 4. Prisma are $3(f-2)$ muchii și $2(f-2)$ vîrfuri. e) $3v = 2m$; $3f = m + 6$; $2f = v + 4$. Se adună primele două relații. f) Aceleași răspunsuri.

12.4.3. a) Da, piramida pentagonală. b) m trebuie să fie par și cel puțin 6. Piramida are $\frac{m}{2} + 1 = \frac{m+2}{2}$ vîrfuri și $\frac{m}{2} + 1 = \frac{m+2}{2}$ fețe. c) v poate fi oriee număr natural mai mare decît 3. Piramida are $2(v-1)$ muchii și v fețe. d) f poate fi orice număr natural mai mare decît 3. Piramida are $2(f-1)$ muchii și f vîrfuri. e) $2v = m + 2$; $2f = m + 2$; $v = f$. Se adună primele două relații.

12.4.4. a) Dacă n este par, 3 culori; dacă n este impar, 4 culori. b) Acelaşi răspuns. c) Nu se schimbă.

12.4.5. Considerăm întîi cazul cînd $n = 2$ (fig. 59). Se formează 8 cuburi şi fiecare din ele are 3 feţe colorate.

Fig. 59



În cazul $n = 3$ (fig. 60), cubul se descompune în 3 straturi de cîte 9 cuburi. În figură se vede clar situaţia din stratul cel mai înalt: cuburile 1, 3, 7 şi 9 (situate în colţuri) au cîte 3 feţe colorate, baza de sus şi două feţe laterale; cuburile 2, 4, 6 şi 8 au cîte două feţe colorate, baza de sus şi o faţă laterală; cubul 5 are numai o singură faţă colorată, baza de sus.

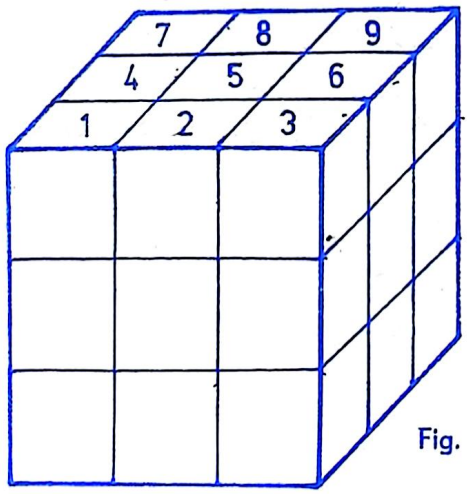
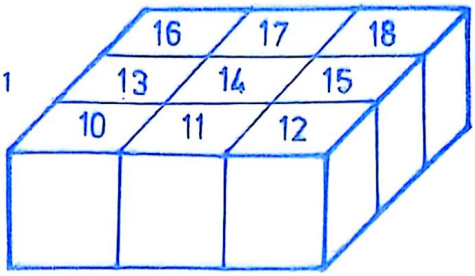


Fig. 60

În stratul cel mai de jos, situaţia este aceeaşi (n-avem decît să întoarcem cubul astfel încît baza de jos să devină baza de sus). Figura 61 reprezintă stratul de la mijloc. Cuburile 10, 12, 16 şi 18 au cîte două feţe laterale colorate, cuburile 11, 13, 15 şi 17 au cîte o singură faţă colorată şi cubul 14 nu are nici o faţă colorată.

Fig. 61



În cazul general, cubul se descompune în n straturi orizontale care sînt de două tipuri: cele de la baze şi cele interioare. Figura 62 reprezintă stratul de la baza superioară. Cele 4 cuburi, notate cu a au cîte 3 feţe colorate; celelalte cuburi de la margine au numai cîte două feţe colorate. Pe fiecare latură a stratului se găsesc cîte $(n - 2)$ astfel de cuburi, în total $4(n - 2)$ cuburi. Cuburile rămase, din interiorul liniei groase, au numai cîte o singură faţă colorată. Numărul lor este $(n - 2)^2$.

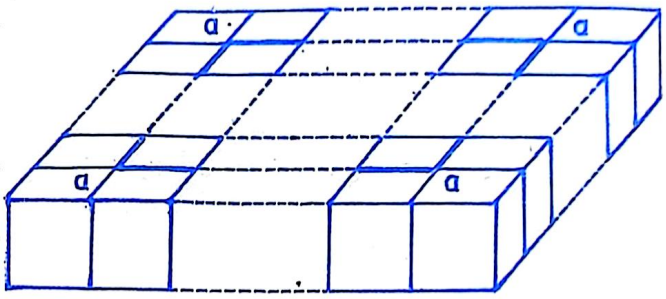


Fig. 62

Situaţia este:

Feţe colorate	Cuburi
3	4
2	$4(n - 2)$
1	$(n - 2)^2$

În stratul de la baza inferioară situaţia este aceeaşi.

Pentru a obţine situaţia din straturile de tipul al doilea, cele interioare, n-avem decît să micşorăm numerele din prima coloană cu 1, căci în aceste cuburi bază superioară este necolorată, deci:

Feţe colorate	Cuburi
2	4
1	$4(n - 2)$
0	$(n - 2)^2$

Sînt $(n - 2)$ astfel de straturi.

Pentru a obține rezultatul total, înmulțim numerele din dreapta din primul dintre aceste tabele cu 2, cele din ultimul cu $(n-2)$ și adunăm rezultatele. Deci:

Fețe colorate	Cuburi
3	$4 \cdot 2 = 8$
2	$4(n-2)\cdot 2 + 4(n-2) = 12n - 24$
1	$(n-2)^2 \cdot 2 + 4(n-2)^2 = 6n^2 - 24n + 24$
0	$(n-2)^3$.

Verificare: $8 + (12n - 24) + (6n^2 - 24n + 24) + (n-2)^3 = n^3$, adică numărul total de cuburi mici în care se descompune cubul mare.

Observare. Rezultatul rămîne valabil dacă în locul cubului se ia un paralelipiped oarecare și muchiile se împart în părți de lungimi diferite.

12.4.6 (fig. 63). Trebuie examinate cazurile următoare: a) toate muchiile laterale au lungimi diferite; b) două și numai două muchii laterale sînt congruente; c) muchiile sînt congruente două cîte două; d) trei muchii laterale sînt congruente și a patra are altă lungime; e) toate sînt congruente.

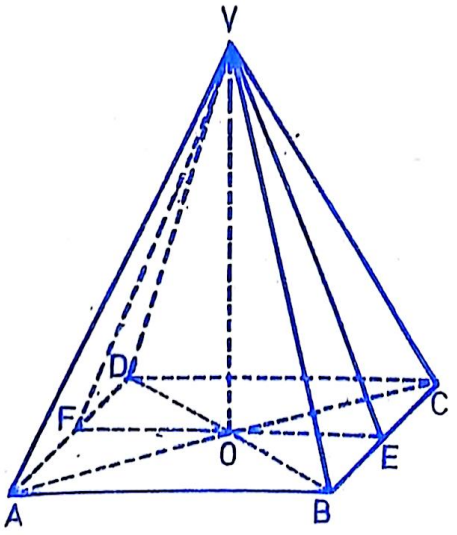


Fig. 63

a) Nici o particularitate. b) Același răspuns. c) Presupunem întîi că muchiile congruente sînt opuse, $VA \equiv VC$ și $VB \equiv VD$. Fie O centrul bazei. Triunghiul VAC fiind isoscel, $VO \perp AC$; la fel, $VO \perp BD$. Rezultă că VO este perpendicular pe planul bazei, deci înălțimea piramidei cade în centrul bazei. Acum presupunem că $VA \equiv VD$ și $VB \equiv VC$. Fie VO înălțimea piramidei și VE înălțimea fetei VBC; $OE \perp BC$ (rec. t. celor 3 $\perp$). Totodată E este mijlocul muchiei BC. La fel, dacă VF este înălțimea triunghiului VAD, $OF \perp AD$ și F este mijlocul muchiei AD. Laturile AD și BC fiind paralele, $OF \perp BC$. Din $OE \perp BC$ și $OF \perp BC$ rezultă că dreptele OE și OF coincid, punctele E, O și F sînt coliniare, $EF \perp BC$. Dar EF unește mijloacele laturilor opuse ale paralelogramului $ABCD$, deci $EF \parallel AB$. Rezultă că $AB \perp BC$. Baza este un dreptunghi. La fel se vede că, dacă $VA \equiv VB$ și $VC \equiv VD$, baza este un dreptunghi. Așadar, dacă muchiile laterale sînt congruente două cîte două, baza piramidei este un paralelogram oblic și înălțimea piramidei cade în centrul lui sau baza este un dreptunghi și înălțimea nu cade în centrul lui. d) Presupunem că $VA \equiv VB \equiv VC$. Fie VO înălțimea piramidei. Aceste oblice duse din V pe planul bazei fiind congruente, $OA \equiv OB$ ($OB \equiv OC$). Jumătățile diagonalelor bazei fiind congruente, rezultă că diagonalele sînt congruente, deci baza este un dreptunghi și înălțimea cade în centrul ei. Deoarece $OD \equiv OB$, $VD \equiv VB$, deci toate muchiile sînt congruente. Așadar, piramida nu poate avea numai trei muchii laterale congruente; dacă trei din ele sînt congruente, a patra este congruentă cu ele. e) Dacă toate muchiile laterale sînt congruente, sînt îndeplinite toate condițiile de la cazul c), deci baza este un dreptunghi și înălțimea cade în centrul ei.

12.4.7 (fig. 64). Fie $A'D \cap C'F = O$. Din triunghiurile asemenea ODF şi $OA'C'$ se află că $\frac{OD}{OA'} = \frac{1}{2}$. Fie E mijlocul laturii AC şi $A'D \cap B'E = O'$; se află la fel că $\frac{O'D}{O'A'} = \frac{1}{2}$. Rezultă că $O = O'$.

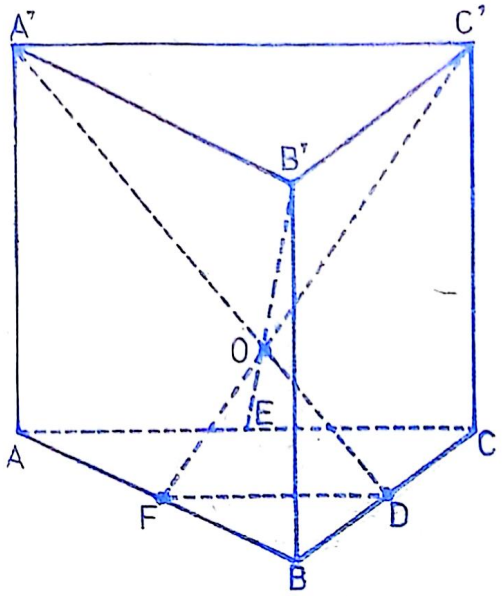


Fig. 64

12.4.8. a) $DBB'D'$ este un dreptunghi, fie O mijlocul bazei DB. În triunghiul $D'DB$, ON este linie mijlocie, deci $ON \parallel DD'$, deci dreapta ON trece prin mijlocul O' al laturii $B'D'$ şi N este mijlocul segmentului OO'. În dreptunghiul $AOO'A'$, MN uneşte mijloacele a două laturi opuse, deci $MN \perp AA'$ şi $MN \perp OO'$. Apoi $MN \parallel AO$ şi $AO \perp BD$, deci $MN \perp BD$. Înseamnă că MN este perpendicular pe două drepte neparalele din planul DBB' (BD şi OO'), deci $MN \perp$ planul DBB', deci $MN \perp BD'$. b) Fie RS un alt segment cuprins între dreptele AA' şi BD'. Ducem RT perpendicular pe planul diagonal $DBB'D'$. Deoarece OO' este proiecţia dreptei AA' pe acest plan, $T \in OO'$. RT şi RS sînt perpendiculara şi o oblică duse din R pe planul diagonal, deci $RT < RS$. Dar $RTNM$ este un dreptunghi, deci $RT = MN$. Rezultă că $MN < RS$. c) $MN = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

12.4.9. a) Poliedrul este limitat de 4 triunghiuri dreptunghice isoscele cu cateta a şi două triunghiuri echilaterale cu latura $a\sqrt{2}$. (fig. 66). d) Din volumul cubului se scad volumele celor două piramide. $\mathcal{V} = \frac{2a^3}{3}$; raportul este $\frac{2}{3}$. e) $a^2(2+\sqrt{3})$.

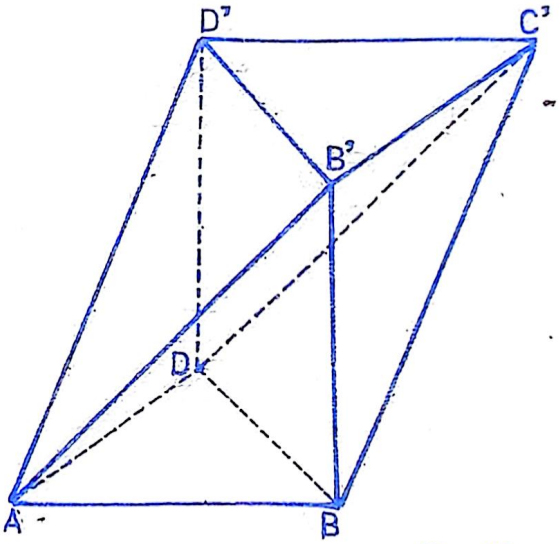


Fig. 66

12.4.10. a) Poliedrul este limitat de 6 pătrate cu latura $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ şi 8 triunghiuri echilaterale. d) Din volumul cubului se scad volumele celor 8 piramide care se înlătură. $\mathcal{V} = \frac{5a^3}{6}$; raportul este $\frac{5}{6}$. e) $\mathcal{A} = (3+\sqrt{3})a^2$.

12.4.11. a) Trei pătrate cu latura $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, două triunghiuri echilaterale cu latura $\frac{a}{2}$ și 6 triunghiuri isoscele cu laturile $\frac{a}{2}$ și $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) $\mathcal{V} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{16}$; raportul este $\frac{3}{4}$.

e) $\mathcal{A} = \frac{a^2}{8}(12 + \sqrt{3} + 3\sqrt{7})$.

12.4.12. a) Două hexagoane regulate cu latura $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, 6 pătrate cu latura $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ și 12 triunghiuri isoscele cu laturile $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ și $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) $\mathcal{V} = \frac{11a^3\sqrt{3}}{8}$ raportul este $\frac{11}{12}$.

e) $\mathcal{A} = \frac{a^2}{4}(12 + 9\sqrt{3} + 3\sqrt{15})$.

12.4.13. a) Două hexagoane regulate cu latura $\frac{a}{3}$, 3 octogoane și 6 triunghiuri isoscele cu laturile $\frac{a}{3}$ și $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

d) $\mathcal{V} = \frac{25a^3\sqrt{3}}{108}$, raportul este $\frac{25}{27}$.

e) $\mathcal{A} = \frac{a^2}{6}(14 + 2\sqrt{3} + \sqrt{7})$.

12.4.14. a) Șase octogoane și 8 triunghiuri echilaterale cu latura $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. d) $\mathcal{V} = \frac{77a^3}{81}$, raportul este $\frac{77}{81}$. e) Aria octogonului se află scăzînd din aria pătratului ariile triunghiurilor care se suprimă;

$$\mathcal{A} = \frac{2a^2}{9}(21 + 2\sqrt{3}).$$

12.4.15. a) Două dreptunghiuri și 4 trapeze isoscele. d) Din volumul paralelipipedului se scad volumele părților care au fost suprimate. În urma tăierii cu planul determinat de dreptele A_1B_1 și $A'B'$ se suprimă o prismă, care are ca bază triunghiul dreptunghic BPB' cu catetele $\frac{b}{4}$ și c și înălțimea a, volumul ei este $\frac{abc}{8}$; de asemenea prin tăierea cu planul determinat de dreptele D_1C_1 și $D'C''$. Tot așa, prin tăierea cu celelalte două plane se suprimă cîte o prismă cu volumul $\frac{abc}{12}$. Dacă se scad aceste volume, volumele piramidelor din colțuri, cum este $B'BPB_1N$, se scad de două ori, ele trebuie adunate. Volumul fiecăreia este $\frac{abc}{72}$.

Volumul $\mathcal{V}_1 = abc - 2 \cdot \frac{abc}{8} - 2 \cdot \frac{abc}{12} + 4 \cdot \frac{abc}{72} = \frac{23abc}{36} = 0{,}6389abc.$

Dacă se ia $BP = CQ = \frac{b}{6}$, se obține volumul $\mathcal{V}_2 = \frac{19abc}{27}$.

Observare. În primul caz, poliedrul rămas nu este un trunchi de piramidă căci bazele nu sînt asemenea (v. probl. 15.2.15). Dacă se aplică totuși formula care dă volumul trunchiului de piramidă, ariile bazelor sînt ab și $\frac{ab}{3}$ și se obține volumul $\mathcal{V} = \frac{abc}{9}(4 + \sqrt{3}) = 0{,}6369\ abc$, care diferă puțin de cel adevărat. În schimb, în cazul al doilea, dreptunghiurile $A_1B_1C_1D_1$ și $A'B'C'D'$ sînt asemenea, deci poliedrul rămas este un trunchi de piramidă în care ariile bazelor sînt ab și $\frac{4ab}{9}$ și, aplicînd formula care dă volumul trunchiului de piramidă se obține tot $\mathcal{V}_2$.

12.4.16 (fig. 67). Planul P taie baza cubului după segmentul EF și fața din dreapta după segmentul FG. Fie $EF \cap DC = M$. Punctul M aparține planului P și feței din spate a cubului, de asemenea și punctul G, deci planul P taie planul DCC' după dreapta MG și fața din spate după segmentul GH. Bazele cubului fiind paralele, intersecțiile lor cu planul P sînt paralele, deci planul P taie baza superioară după segmentul HK paralel cu EF. La fel, planul P taie fața din stînga după un segment KL paralel cu FG. Intersecția este hexagonul $EFGHKL$. Urmează să demonstrăm că e regulat.

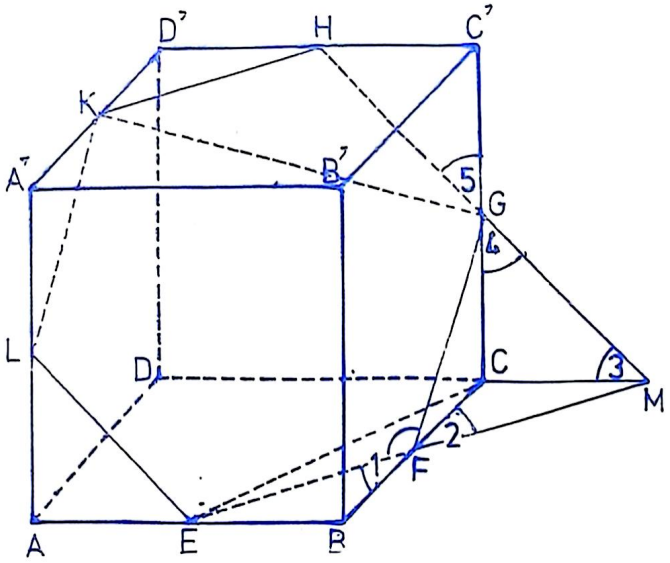


Fig. 67

Fie a latura și d diagonala unei fețe a cubului; $EF \parallel AC$ și $EF = \frac{d}{2}$ de asemenea $FG \parallel BC'$ și $FG = \frac{d}{2}$. Apoi $\hat{1} = 45°$, deci $\hat{2} = 45°$, deci triunghiul FCM este isoscel. $CM = CF = \frac{a}{2}$ și $CG = \frac{a}{2}$, deci triunghiul GCM este isoscel, deci $\hat{3} = \hat{4} = 45°$, deci $\hat{5} = 45°$, deci $GH \parallel CD'$ și $GH = \frac{CD'}{2} = \frac{d}{2}$. Apoi $HK \parallel EF \parallel AC \parallel A'C'$, deci $HK \parallel A'C'$, deci HK este linie mijlocie în triunghiul $D'A'C'$, deci $HK = \frac{A'C'}{2} = \frac{d}{2}$. La fel, $KL = \frac{D'A}{2} = \frac{d}{2}$ și $LE = \frac{A'B}{2} = \frac{d}{2}$. Deci toate laturile hexagonului au aceeași lungime, $\frac{d}{2}$.

Comparăm unghiurile hexagonului, de exemplu unghiurile EFG și GHK. Primul este unghiul de la vîrf al triunghiului isoscel EFG în care $EF = FG = \frac{d}{2}$ și EG este ipotenuza triunghiului ECG în care $CG = \frac{a}{2}$ și EC unește un vîrf (C) al pătratului cu mijlocul laturii opuse (E). GHK este unghiul de la vîrf al triunghiului isoscel HKG, în care $HK = HG = \frac{d}{2}$ și GK este ipotenuza triunghiului $GD'K$ în care $KD' = \frac{a}{2}$ și GD' unește un vîrf al pătratului (D') cu mijlocul laturii opuse (G), deci $GK \equiv EG$. Rezultă că $\triangle EFG \equiv \triangle GHK$ (LLL), deci unghiul $EFG \equiv$ unghiul GHK. La fel se arată că oricare două unghiuri ale hexagonului sînt congruente.

Observări. 1) Dacă în locul cubului se ia un paralelipiped oarecare și E, F și G sînt puncte oarecare ale muchiilor AB, BC și CC', aceeași construcție dă intersecția paralelipipedului cu planul determinat de punctele E, F și G. Deci se obține tot un hexagon, dar care nu este regulat.

2) Intersecția unui paralelipiped cu un plan nu poate avea mai mult decît 6 laturi, căci paralelipipedul are numai 6 fețe.

13.1.1. a) Fie R şi i raza şi înălţimea unui cilindru, iar kR şi i raza şi înălţimea unui alt cilindru. Volumele lor sînt: $\mathcal{V}_1 = \pi R^2 i$, $\mathcal{V}_2 = \pi(kR)^2 i$; deci $\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = \frac{\pi k^2 R^2 i}{\pi R^2 i} = k^2$; $\mathcal{V}_2 = k^2 \mathcal{V}_1$.

Dacă raza şi înălţimea cilindrului al doilea sînt R şi ki, $\mathcal{V}_1 = \pi R^2 i$, $\mathcal{V}_2 = \pi R^2 ki$, deci $\frac{\mathcal{V}_2}{\mathcal{V}_1} = k$; $\mathcal{V}_2 = k\mathcal{V}_1$.

b) Cu 18. c) Cu 12. d) Cu 3. e) Cînd înmulţim raza. Creşterea razei are o influenţă mai mare asupra creşterii volumului.

13.1.2. Volumele cilindrilor sînt:

$$\mathcal{V}_1 = \frac{a^2 b}{4\pi}, \quad \mathcal{V}_2 = \frac{ab^2}{4\pi}; \quad \frac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \frac{a}{b};$$

$$\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2.$$

Se obţine un volum mai mare cînd latura mai mare a dreptunghiului se transformă în cerc. (v. ultimul punct de la problema precedentă.)

13.1.3. Ariile laterale sînt egale. Raportul volumelor este $\frac{a}{b}$. Se obţine un volum mai mare cînd raza cilindrului este latura mai mare a dreptunghiului.

13.1.4. Fie R şi i raza şi înălţimea unui cilindru, iar kR şi i raza şi înălţimea unui alt cilindru. Raportul dintre ariile lor totale este

$$\frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{A}} = \frac{2\pi kR(kR+i)}{2\pi R(R+i)} = \frac{k(kR+i)}{R+i}.$$

Acest raport depinde de R şi i. Răspuns: nu.

Exemplu: Dacă $R = 3$, $i = 5$ şi $k = 2$, rezultatul obţinut arată că raportul ariilor totale este $\frac{11}{8} \neq 2$. Deci, dacă dublăm raza, aria totală nu se dublează. La fel se arată că aria totală a cilindrului nu este proporţională cu înălţimea lui.

13.1.5. a) Din relaţia $\pi R^2 I = \pi r^2 i$ se obţine proporţia cerută. b) Lichidul care intră în cazan într-un minut formează un cilindru cu raza de 20 cm şi înălţimea de 50 cm. Volumul său este 20π litri. Lichidul care se scurge din rezervor formează un cilindru cu acelaşi volum şi cu raza de 10 dm. Înălţimea sa este 2 cm. c) În proporţia de mai sus se pune $i = 50$, $R = 100$, $r = 20$ şi se află I.

13.1.6. a) Fie M' proiecţia punctului M pe planul bazei. Cîte grade are unghiul $M'OP$? $M'P$ este latura triunghiului echilateral înscris în cerc, $M'P = R\sqrt{3}$. Teorema lui Pitagora dă $MP = \sqrt{3R^2 + i^2}$. b) Fie N' proiecţia punctului N pe planul bazei $\widehat{N'P} = 90° - 30° = 60°$, deci $N'P = R$; $NP = \sqrt{R^2 + i^2}$.

13.1.7. a) Cînd tirbuşonul face o rotaţie completă, el înaintează cu 8 mm, cît este pasul elicei, deci el trebuie să facă $40 : 8 = 5$ rotaţii complete; $5 \cdot 3 = 15$ mişcări. b) Arcul de elice $ABCD$ din figura 2-a provine de la segmentul AD din figura 2-b unde AA' corespunde cercului de la baza cilindrului. $AA' = 2\pi R$. Triunghiul $AA'D$ dă $A'D = \sqrt{4\pi^2 R^2 + p^2}$.

c) Acelaşi triunghi dă $\operatorname{tg} u = \frac{p}{2\pi R}$.

d) Acestor puncte din figura 2-a, le corespund două puncte M şi N din figura 2-b. Drumul cel mai scurt dintre aceste puncte este segmentul MN; rezultă că drumul cerut este arcul de elice MN din figura 2-a. Arcul $M'N'$ corespunde unui segment $M'N' = \frac{R\pi v}{180} \cdot M'M = a$, $N'N = b$, deci $PN = b - a$. Teorema lui Pitagora dă $MN = \sqrt{\left(\frac{R\pi v}{180}\right)^2 + (b-a)^2}$.

13.1.8. Apa pe care o dă robinetul într-un minut poate forma un cilindru cu raza de 6 mm și înălțimea de 500 metri. Se împarte volumul bazinului la volumul acestui cilindru. 40 minute.

13.1.9. a) Apa se ridică în ambele vase pînă la același nivel. b) Apa care se adaugă formează doi cilindri cu razele de 50 cm și 5 cm și înălțimea de 10 cm. Volumul $= 25{,}250\pi =$ $= 79$ litri. c) Fie x înălțimea. $\pi \cdot 50^2 \cdot x + \pi \cdot 5^2 \cdot x = 100\,000$; $x =$ $= 12{,}6$ cm.

13.1.10. $\dfrac{\pi(D^2 - d^2)g}{4\,000}$; 9,757 kg.

13.1.11. Aria laterală este πR^2, adică egală cu aria unui cerc de rază R. Dintr-o fîșie de hîrtie a cărei lățime este egală cu înălțimea cilindrului se taie o bucată necesară pentru a înfășura cilindrul, se măsoară lungimea ei și se calculează aria ei.

13.1.12. Fie a și i latura bazei și înălțimea bidonului și R raza cilindrului. Volumele și înălțimile celor două corpuri fiind egale, bazele lor trebuie să aibă aceeași arie, deci $a^2 = \pi R^2$,

$$R^2 = \frac{a^2}{\pi}, \quad R = \frac{a}{\sqrt{\pi}}.$$

Ariile laterale sînt

$$\mathcal{A}_1 = 4ai, \quad \mathcal{A}_2 = 2ai\sqrt{\pi} = 3{,}54ai.$$

$\mathcal{A}_2 < \mathcal{A}_1$, deci cilindrul este mai avantajos.

13.1.13. a) Cilindrul care se obține are raza r și înălțimea $2\pi R$. $\mathcal{A} =$ $= 4\pi^2 Rr$, $\mathcal{V} = 2\pi^2 r^2 R$. b) Cantitatea de aer pe care o introduce în cameră trebuie să aibă de 3 ori volumul ei. $\dfrac{6\pi^2 \cdot 64 \cdot 30}{\pi \cdot 16 \cdot 60} = 38$ mișcări.

13.1.14. Fie $\mathcal{V}$ volumul lichidului din rezervor, $\mathcal{V} = \pi R^2 \cdot MN$. Trebuie aflată lungimea segmentului AN. Triunghiurile asemenea MAN și BAC dau

$$\frac{MN}{BC} = \frac{AN}{AC}.$$

Înlocuind aici MN prin $\dfrac{\mathcal{V}}{\pi R^2}$, BC prin i și AC prin $\sqrt{4R^2 + i^2}$, se obține

$$AN = \frac{\mathcal{V}\sqrt{4R^2 + i^2}}{\pi R^2 i}.$$

Dacă raza și înălțimea se măsoară în decimetri, $\mathcal{V}$ reprezintă volumul în dm^3, adică în litri. Dacă volumul este 1 hl, trebuie să punem $\mathcal{V} = 100$ și obținem în dm; deci

$$k = \frac{100\sqrt{4R^2 + i^2}}{\pi R^2 i}.$$

În exemplul numeric, avem, în dm: $R = 15$, $i = 40$. Deci

$$k = \frac{100 \cdot 50}{\pi \cdot 225 \cdot 40} = \frac{5}{9\pi} =$$

$$= 0{,}17 \text{ dm} = 1{,}7 \text{ cm}.$$

13.2.1. v. problema 13.1.1.

13.2.2. $\dfrac{\mathcal{V}_1}{\mathcal{V}_2} = \dfrac{b}{a}$.

13.2.3. Prin desfășurare, cercul de la baza conului devine arcul sectorului, deci aceste linii au aceeași lungime, deci $2\pi R = \dfrac{\pi G v^1}{180}$. De aici se deduce $360\pi R = \pi G v$, $360R = Gv$ și de aici proporția cerută. Altfel: Aria sectorului este egală cu aria laterală a conului $\dfrac{\pi G^2 v}{360} = \pi RG$, deci...

---

[1] Se amintește că lungimea unui arc de cerc este $\dfrac{\pi Rn}{180}$; unde R este lungimea razei și n măsura în grade a unghiului la centru corespunzător. Aria sectorului circular este $\dfrac{\pi R^2 n}{360}$.

13.2.4 (fig. 5). Fie G generatoarea conului. Din triunghiul VOB se scoate $OB = VB \sin \frac{u}{2}$, $R = G \sin \frac{u}{2}$, deci

lungimea cercului $= 2\pi G \sin \frac{u}{2}$;

lungimea arcului sectorului $= \frac{\pi G v}{180}$.

Se scrie că aceste expresii sînt egale și se fac toate simplificările. a) 180°. b) 93°. c) 97°.

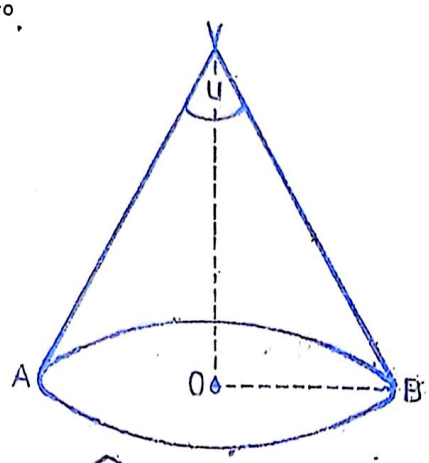
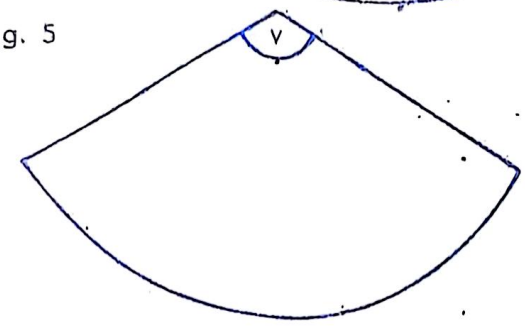


Fig. 5



13.2.5. Fie G generatoarea conului. Atunci raza conului este $\frac{G}{2}$, deci lungimea cercului de la baza lui este πG. Aceasta este totodată lungimea arcului sectorului, a cărui rază este G. Dar $\pi G = \frac{2\pi G}{2}$, deci arcul este un semicerc; unghiul său este de 180°.

13.2.6 a) $AB = a$, $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$. b) Punctele B și D trebuie să coincidă, deci foaia de hîrtie trebuie să aibă forma de pătrat. c) Foaia de hîrtie trebuie să aibă forma de sector circular. Se trasează un arc de cerc cu centrul într-un vîrf al pătratului și cu raza egală cu latura lui, și partea de dincolo de el se taie. d) Partea rămasă este un sfert de cerc cu raza a; lungimea arcului său este $\frac{\pi a}{2}$. Prin înfășurare, el devine cercul de la baza conului; raza acestui cerc este $R = \frac{\pi a}{2} : 2\pi = \frac{a}{4}$. (v. problema 13.2.3.) Generatoarea conului este a. Înălțimea lui se află prin teorema lui Pitagora, $i = \frac{a\sqrt{15}}{4}$. Volumul $= \frac{\pi a^3 \sqrt{15}}{192}$.

13.2.7 (fig. 7). Fie R și i raza și înălțimea cilindrului și x distanța de la planul secțiunii la planul bazei cilindrului. Înălțimile conurilor sînt x și $i - x$. Suma volumelor este

$$\frac{\pi R^2 x}{3} + \frac{\pi R^2 (i - x)}{3} = \frac{\pi R^2 i}{3}.$$

Ea este o treime din volumul cilindrului, oriunde am face secțiunea.

Fig. 7

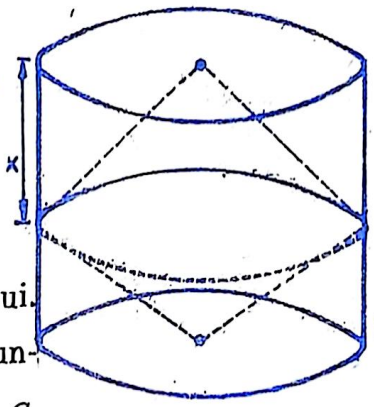
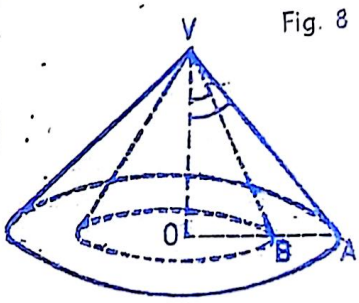


Fig. 8



13.2.8 (fig. 8). Fie i înălțimea celor două conuri. $\widehat{OVA} = 45°$, deci raza conului inițial $R = i$ și volumul său este $\mathcal{V}_1 = \frac{\pi i^3}{3}$. $\widehat{OVB} = 30°$, deci raza $OB = i \operatorname{tg} 30° = \frac{i\sqrt{3}}{3}$. Volumul conului care se scoate este $\mathcal{V}_2 = \frac{\pi i^3}{9}$. Volumul părții rămase este $\mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 = \frac{2\pi i^3}{9}$. Raportul este $\frac{2}{3}$.

13.2.9. Apa din vas are forma unui con (fig. 9). Cîte grade are unghiul OVA? Deci înălțimea conului este egală cu raza lui, $i = R$. Volumul este

$$\mathcal{V} = \frac{\pi i^3}{3}.$$

a) Pentru $i = 1$, $\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} = 1{,}05$ litri.

b) Pentru $i = 2$, $\mathcal{V} = \frac{8\pi}{3}$, deci trebuie adăugați $\frac{7\pi}{3} = 7{,}33$ litri de apă.

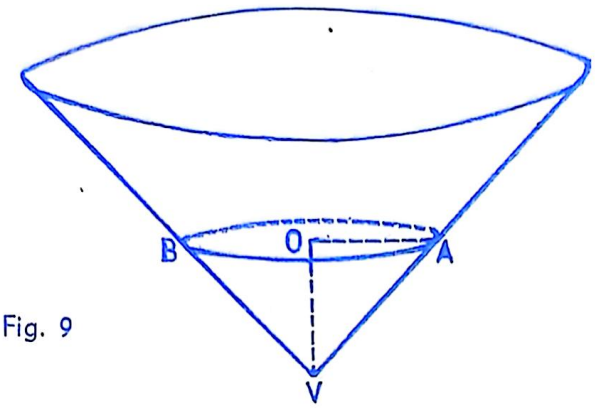


Fig. 9

13.2.10 (fig. 9). Fie R și i raza și înălțimea conului. Unghiul $OVA = 60°$, deci $R = i\,\mathrm{tg}\,60° = i\sqrt{3}$. Volumul conului este $\mathcal{V} = \pi i^3$. a) Pentru $i = 1$, $\mathcal{V}_1 = \pi$, deci trebuie să turnăm π litri de apă. b) Pentru $i = 2$, $\mathcal{V}_2 = 8\pi$, deci trebuie să adăugăm $\mathcal{V}_2 - \mathcal{V}_1 = 7\pi$ litri de apă. c) Pentru $i = 3$, $\mathcal{V}_3 = 27\pi$, deci trebuie să adăugăm $\mathcal{V}_3 - \mathcal{V}_2 = 19\pi$ litri de apă. d) A n-a oară, înălțimea conului de apă trebuie să fie n, deci $\mathcal{V}_n = \pi n^3$. Înainte de aceasta volumul lui a fost $\mathcal{V}_{n-1} = \pi(n-1)^3$. Deci, cantitatea de apă care trebuie adăugată este

$$\mathcal{V}_n - \mathcal{V}_{n-1} = \pi[n^3 - (n-1)^3] = \pi(3n^2 - 3n + 1).$$

13.2.11 (fig. 10). Fie P un plan paralel cu baza conului, VA și VB două generatoare, $VA \cap P = A'$ și $VB \cap P = B'$. Planul VAB taie baza și planul P după două drepte paralele, $A'B' \parallel AB$, deci $\triangle VA'B' \sim \triangle VAB$. Triunghiul VAB fiind isoscel, triunghiul $VA'B'$ este de asemenea isoscel, $VB' \equiv VA'$. Dacă VC este o altă generatoare și $VC \cap P = C'$ se demonstrează la fel că $VC' \equiv VA'$, deci toate punctele intersecției sînt egal depărtate de vîrful conului. Fie O centrul bazei conului și $VO \cap P = O'$; $VO' \perp P$. Oblicele VA', VB', VC' etc. fiind congruente, picioarele lor sînt egal depărtate de piciorul perpendicularei, deci $O'A' \equiv O'B' \equiv O'C' \equiv \ldots$ Punctele A', B', C' etc. aparțin cercului cu centrul în O' și cu raza $O'A'$. Reciproc, fie D' un punct oarecare al acestui cerc și D intersecția dreptei VD' cu planul bazei. $O'D' \parallel OD$, deci $\triangle VO'D' \sim \triangle VOD$, deci

$$\frac{O'D'}{OD} = \frac{VO'}{VO}.$$

Pe de altă parte $\triangle VO'A' \sim \triangle VOA$, deci

$$\frac{VO'}{VO} = \frac{O'A'}{OA}.$$

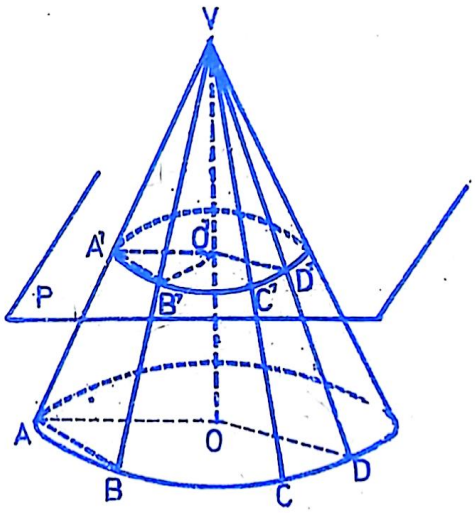


Fig. 10

Din aceste două proporții rezultă

$$\frac{O'D'}{OD} = \frac{O'A'}{OA}.$$

Dar $O'D' = O'A'$, deci $OD = OA$, deci punctul D aparține cercului de la baza conului, ceea ce înseamnă că VD este o generatoare, deci D' aparține suprafeței conului. Totodată $D' \in P$. Deci D' aparține intersecției conului cu planul P.

13.2.12. Fie R, I şi G raza, înălţimea şi generatoarea conului dat şi r, i şi g ale conului mic. Triunghiurile asemenea VOA şi voa (fig. 11) dau:

$$\frac{oa}{OA} = \frac{Va}{VA} = \frac{Vo}{VO}; \quad \frac{r}{R} = \frac{g}{G} = \frac{i}{I} = \frac{1}{2};$$

$$r = \frac{R}{2}, \quad i = \frac{I}{2}.$$

a) Volumele celor două conuri sînt: $\frac{\pi R^2 I}{24}$ şi $\frac{\pi R^2 I}{3}$; raportul este $\frac{1}{8}$.

b) Ariile sînt $\frac{\pi R(R+G)}{4}$ şi $\pi R(R+G)$; raportul este $\frac{1}{4}$.

(Această problemă este un caz particular al problemei 13.5.3.)

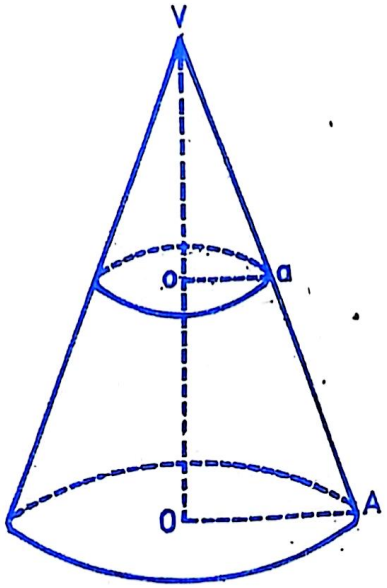


Fig. 11

13.2.13. $(R+x)^2 i = R^2(i+x)$; $x = \frac{R(R-2i)}{i}$. Cînd $R > 2i$, raza şi înălţimea trebuie mărite; cînd $R < 2i$, ele trebuie micşorate. Cînd $R = 2i$, nu trebuie făcută nici o schimbare.

Observare. S-ar părea că rezultatul este în contradicţie cu faptul că volumul conului este proporţional cu pătratul razei şi cu înălţimea, deci raza joacă un rol mai mare decît înălţimea. De aici ar urma că, dacă mărim raza obţinem un volum mai mare decît dacă mărim înălţimea. Totuşi problema de mai sus are o soluţie. Problema ar fi într-adevăr imposibilă dacă s-ar cere să înmulţim raza şi înălţimea cu acelaşi număr astfel ca volumul să nu se schimbe; dar în problemă s-a cerut, nu să le înmulţim cu acelaşi număr, ci să le adăugăm acelaşi număr — ceea ce este altceva.

13.3.1. Se obţine: a) volumul conului; b) volumul cilindrului.

13.3.2. Expresia din formula obişnuită se înmulţeşte şi se împarte cu $R - r$.

13.3.3. Lungimile bazelor sînt $2\pi R$ şi $2\pi r$. Se obţine formula care dă aria laterală a trunchiului de con.

13.3.4. Triunghiul CEB (fig. 12) dă înălţimea $CE = CB \sin 30° = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$.

$\mathcal{V} = 49\pi$ cm^3.

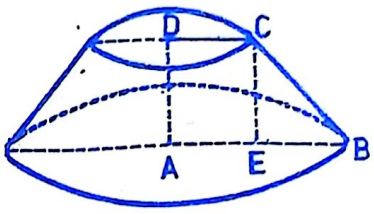


Fig. 12

13.3.5. Triunghiul CEB (fig. 13) este dreptunghic, deci $CB > EB$, $G > R - r$.

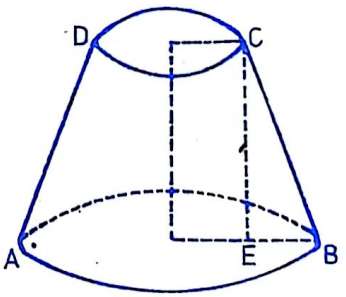


Fig. 13

13.3.6. Fie R, r şi G razele şi generatoarea unui trunchi de con. Calculăm raportul

$$\frac{\pi G(R+r)}{\pi R^2 - \pi r^2} = \frac{G(R+r)}{(R+r)(R-r)} = \frac{G}{R-r}.$$

Dar $G > R - r$ (v. problema 13.3.5), deci aria laterală este mai mare.

13.3.7 (fig. 14). Unghiul AVB de la vîrful conului care se obţine dintr-un semicerc este de 60° (v. problema 13.2.4) deci triunghiul AVB este echilateral, unghiul $VAO = 60°$.

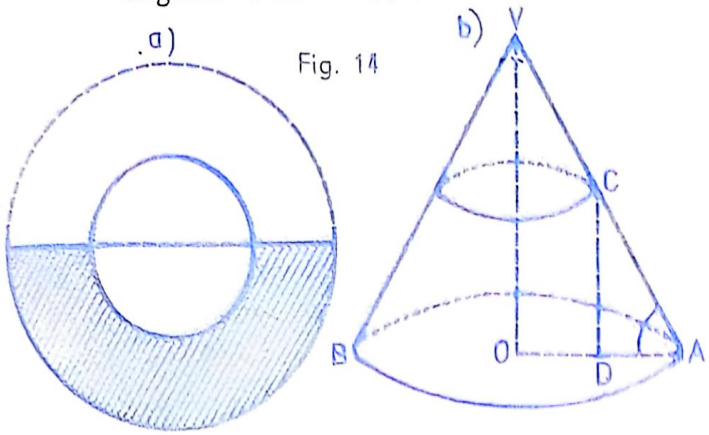


Fig. 14

13.3.8 (fig. 15). Intersecţia este un cerc (v. problema 13.2.11). a) Fie A_1 mijlocul generatoarei AA' şi CC' o generatoare oarecare. Planele bazelor şi planul P fiind paralele, planul $A'AC$ le taie după drepte paralele, deci $A'ACC'$ este un trapez şi A_1C_1 este linie mijlocie, deci C_1 este mijlocul generatoarei CC'. Aceasta fiind o generatoare oarecare, rezultă că planul P trece prin mijloacele tuturor generatoarelor. În trapezul $ABB'A'$, A_1B_1 este linie mijlocie, deci

$$A_1B_1 = \frac{AB + A'B'}{2},$$

deci raza secţiunii este $\frac{R+r}{2}$.

b) $\frac{\pi G(R-r)}{2}$. c) $\frac{\pi i(R+r)(R-r)}{4}$.

Observare. În ambele rezultate apare factorul $R - r$, ceea ce înseamnă că diferenţele sînt cu atît mai mari cu cît diferenţa razelor este mai mare.

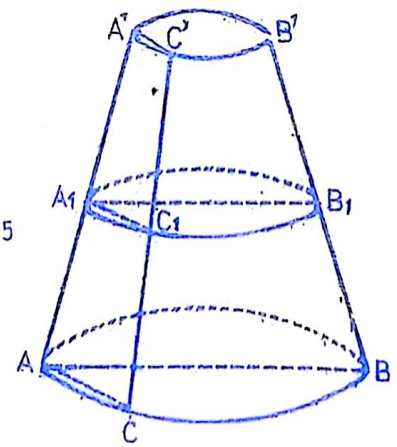


Fig. 15

13.3.9 (fig. 16). Fie R şi i raza şi înălţimea conului. În prima poziţie, lichidul are forma de trunchi de con şi în poziţia a doua de con.

a) Volumul trunchiului de con este

$$\mathcal{V}_1 = \frac{7\pi R^2 i}{24}.$$

Fie r şi x raza şi înălţimea conului de apă în poziţia a doua. Triunghiurile asemenea VMN şi VOA dau

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{i};\ r = \frac{Rx}{i}.$$

Volumul conului de apă este

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\pi R^2 x^3}{3i^2}.$$

Ecuaţia este

$$\frac{\pi R^2 x^3}{3i^2} = \frac{7\pi R^2 i}{24};\ 8x^3 = 7i^3;$$

$$(2x)^3 = 7i^3;\ 2x = i\sqrt[3]{7}[1];\ x = \frac{i\sqrt[3]{7}}{2}.$$

b) Se obţine

$$\mathcal{V}_1 = \frac{\pi i R^2(3n^2 - 3n + 1)}{3n^3};$$

$$x = \frac{i\sqrt[3]{3n^2 - 3n + 1}}{n}.$$

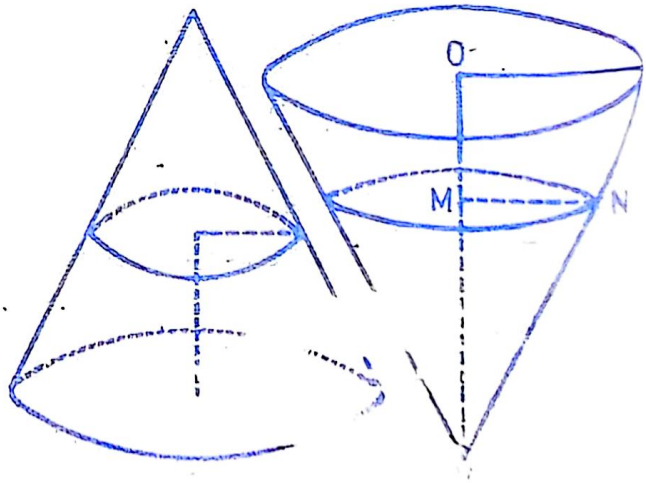


Fig. 16

[1] Prin $\sqrt[3]{7}$ se înţelege numărul care, ridicat la cub, dă 7. $\sqrt[3]{7} \approx 1{,}9$.

13.3.10. Se obține cel puțin un con cu raza R și înălțimea i, care are volumul $\frac{\pi R^2 i}{3}$, deci $\frac{\pi R^2 i}{n} \geqslant \frac{\pi R^2 i}{3}$, deci $n \leqslant 3$.

13.3.11. a) Fie R, r și i razele și înălțimea unui trunchi de con și x lungimea care se adaugă și se scade. Razele devin $R + x$ și $r - x$. Calculăm diferența volumelor:

$$\frac{\pi i}{3}[(R + x)^2 + (r - x)^2 + (R + x)(r - x)] - \frac{\pi i}{3}(R^2 + r^2 + Rr).$$

După ce se efectuează calculele, se obține

$$\frac{\pi i x}{3}(R - r + x).$$

Deoarece $R > r$, $R - r > 0$, deci paranteza este pozitivă, deci toți factorii acestei expresii sînt pozitivi, deci diferența este pozitivă. Volumul crește. b) Acum se face schimbarea în sens invers, deci volumul scade. c) Razele trebuie să fie egale.

Observare. Dacă întrebarea a doua se tratează întîi, se obține diferența

$$\frac{\pi i x}{3}(-R + r + x),$$

care trebuie discutată. Dacă $-R + r + x < 0$, adică $x < R - r$, diferența este negativă, deci volumul scade; dacă $x > R - r$, volumul crește; dacă $x = R - r$, diferența este nulă, deci volumul rămîne neschimbat. S-ar părea că rezultatul este altul decît cel obținut prima oară, dar este numai o aparență. Din cele trei cazuri care au apărut în discuție, numai primul prezintă interes și el concordă cu cel obținut mai înainte. În adevăr, acum razele devin $R - x$ și $r + x$. Cînd $x > R - r$, scădem din R mai mult decît diferența razelor, deci R devine rază mică; tot așa, dacă la r adăugăm mai mult decît diferența razelor, r devine raza mare, deci ne găsim în situația din prima întrebare. Iar dacă $x = R - r$, raza mare devine $R - (R - r) = r$ și raza mică devine $r + (R - r) = R$. Trunchiul de con rămîne același, deci volumul nu se schimbă.

13.3.12. a) Lungimea cu care poate fi micșorată raza mică este cel mult 7. Atunci trunchiul de con devine con; fie x raza lui. Volumul lui este $\frac{\pi x^2 i}{3}$. Acest volum trebuie să fie egal cu volumul trunchiului inițial, care este $\frac{169\pi i}{3}$. Ecuația este

$$\frac{\pi x^2 i}{3} = \frac{169\pi i}{3}; \quad x = 13.$$

Raza mare se poate mări cu cel mult $13 - 8 = 5$ cm.

b) Rezultatul este

$$\sqrt{R^2 + r^2 + Rr} - R.$$

13.3.13. a) Da. b) Fie $\mathcal{V}$ volumul trunchiului de con și $\mathcal{V}_1$ volumul cilindrului:

$$\mathcal{V} = \frac{\pi i}{3}(R^2 + r^2 + Rr),$$

$$\mathcal{V}_1 = \pi i\left(\frac{R + r}{2}\right)^2.$$

Se calculează diferența lor și se obține $\mathcal{V} - \mathcal{V}_1 = \frac{\pi i}{12}(R - r)^2$. Ea este pozitivă, deci $\mathcal{V}_1 < \mathcal{V}$. Rezultatul este mai mic decît cel adevărat. c) Media ariilor bazelor trunchiului de con este $\frac{\pi R^2 + \pi r^2}{2}$, deci volumul cilindrului este

$$\mathcal{V}_2 = \frac{\pi i(R^2 + r^2)}{2}.$$

Calculînd diferența, se obține

$$\mathcal{V}_2 - \mathcal{V} = \frac{\pi i}{6}(R - r)^2.$$

$\mathcal{V}_2 > \mathcal{V}$, rezultatul este mai mare decît cel adevărat.

d) Primul.

13.3.14. a) Se obține $\mathcal{V} = C^2 l \cdot \frac{1}{4\pi}$ și fracția $\frac{1}{4\pi}$ se înlocuiește cu 0,08.

b) Raportul este $\frac{6\pi}{19} = 0{,}99$.

13.4.1. v. problema 13.1.1.

13.4.2. a) 8 sfere mici; raportul este 2. b) n^3 sfere mici; raportul este n.

13.4.3. Raportul prețurilor trebuie să fie egal cu raportul volumelor $\left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot 1{,}30 = 0{,}75$ lei.

13.4.4. Din volumul unei sfere cu raza de 21 mm se scade volumul unei sfere cu raza de 20 mm. 5,281 cm^3.

13.4.5. a) 3,6 litri. b) 1,435 kg.

13.4.6. a) Diferența dintre valoarea exactă a volumului și cea dată de formula aproximativă este

$$\frac{4\pi(R+g)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3} - 4\pi R^2 g = \frac{4\pi g^2(3R+g)}{3}.$$

Ea este pozitivă. b) 95%; 98%.

13.4.7. a) $k = \frac{(R-g)^3}{R^3}$. b) Raportul se pune sub forma

$$k = \left(\frac{R-g}{R}\right)^3 = \left(1 - \frac{g}{R}\right)^3.$$

Cînd R crește, $\frac{g}{R}$ scade, deci k crește. c) Portocale mari. d) În cazul portocalelor mari, volumul părții comestibile este $\frac{A(R-g)^3}{R^3}$, și în cazul portocalelor mici $\frac{A(r-g)^3}{r^3}$. Raportul dintre părțile comestibile este $\left[\frac{R(r-g)}{r(R-g)}\right]^3$.

e) Raportul prețurilor trebuie să fie egal cu raportul părților comestibile. Prețul unui kilogram de portocale ar trebui să fie de

$$\left[\frac{R(r-g)}{r(R-g)}\right]^3 \cdot 13 \text{ lei.}$$

e) Pentru $R = 30$, $g = 6$, această expresie devine

$$\left[\frac{5(r-6)}{24r}\right]^3 \cdot 13.$$

Pentru $r = 25$; $r = 20$ și $r = 35$ se obține: 11,18 lei, 8,71 lei și 14,43 lei.

13.4.8. a) $k = \frac{R^3 - s^3}{R^3}$. b) Raportul se pune sub forma $k = \left[1 - \frac{s}{R}\right]^3$. v. problema precedentă. c) Cireșe mari. d) Dacă A reprezintă două cantități egale de cireșe, una de cireșe cu raza R și cealaltă de cireșe cu raza r, greutățile părților comestibile sînt

$$\frac{A(R^3 - s^3)}{R^3} \text{ și } \frac{A(r^3 - s^3)}{r^3};$$

raportul lor este

$$\frac{R^3(r^3 - s^3)}{r^3(R^3 - s^3)}.$$

e) Acesta trebuie să fie și raportul dintre prețurile a două kilograme de cireșe, de raze R și r. Dacă 1 kg de cireșe cu raze de 12 mm costă 7 lei, 1 kg de cireșe cu raza r trebuie să coste

$$\frac{12^3(r^3 - 3^3)}{r^3(12^3 - 3^3)} \cdot 7 = \frac{12^3(r^3 - 27)}{r^3(1\,701)} \text{ lei.}$$

Pentru $r = 6$ și $r = 15$, se obține 6,22 lei respectiv 7,06 lei.

Observare. Situația este aceeași la piersici, caise ș.a. Rezultatele nu corespund întocmai realității, deoarece sîmburii acestor fructe sînt mai grei decît carnea lor.

13.4.9. Volumul sferei este media aritmetică a celorlalte două.

13.4.10 (fig. 18). Triunghiul ABC este echilateral. Centrele ambelor sfere sînt centrul triunghiului. Razele lor sînt raza arcului înscris și a celui circumscris triunghiului (v. nota de la problema 12.1.27).

$$r = OD = \frac{a\sqrt{3}}{3},\quad R = OA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

a) $\mathcal{V} = \frac{4\pi a^3\sqrt{3}}{27}$; $\mathcal{A} = \frac{4\pi a^2}{3}$.

b) $\mathcal{V} = \frac{32\pi a^3\sqrt{3}}{27}$. $\mathcal{A} = \frac{16\pi a^2}{3}$.

Observare. Răspunsurile la întrebarea a doua se deduc ușor din primele dacă se ține seamă de problema 13.4.1. Raportul razelor celor două sfere fiind 2, volumul al doilea este de 8 ($= 2^3$) ori mai mare decît primul și aria a doua este de 4 ($= 2^2$) ori mai mare decît prima.

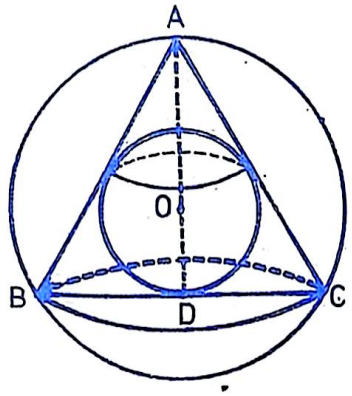


Fig. 18

13.4.11 (fig. 19). Latitudinea unui punct de pe pămînt este unghiul format de raza care trece prin el cu planul ecuatorului. În 24 de ore punctul descrie un cerc cu raza AM. $\widehat{OMA} = u$, deci $AM = R\cos u$. Viteza $= \frac{\pi R\cos u}{12}$ km/oră. a) 1 185 km/oră. b) 838 km/oră. c) Viteza lui trebuie să fie egală cu viteza unui punct care are acea latitudine

$$\frac{\pi R\cos u}{12} = 600;\ u = 69°.$$

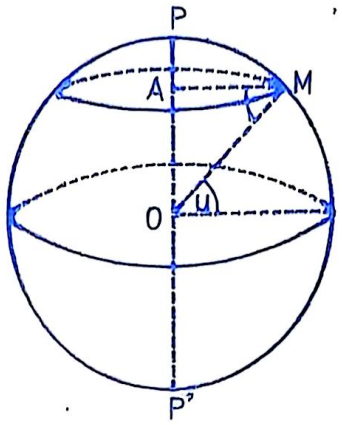


Fig. 19

13.4.12. Se obține: a) aria unei hemisfere; b) aria sferei întregi.

13.4.13. Ele sînt egale.

13.4.14. $\widehat{AOB} = \widehat{OBD} = 23°$ și $\widehat{AOC} = \widehat{OCE} = 67°$.

Se calculează înălțimile zonelor. R fiind raza pămîntului, $OD = R\sin 23°$; $ED = OE - OD = R(\sin 67° - \sin 23°)$;

$$EP = OP - OE = R(1 - \sin 67°)$$

Este suficient să ne limităm la o hemisferă. Dacă înălțimea unei zone sau calote este i, raportul dintre aria ei și aria unei hemisfere este $\frac{2\pi Ri}{2\pi R^2} = \frac{i}{R}$. Deci rapoartele cerute sînt:

$$\frac{OD}{R} = \sin 23° = 0{,}391;\ \frac{ED}{R} = \sin 67° - \sin 23° = 0{,}530;\ \frac{EP}{R} = 0{,}079.$$

13.4.15. a) Fie R raza balonului și i înălțimea calotei. Cînd umflăm balonul, ele devin kR și ki. Aria calotei este la început $2\pi Ri$ și devine $2\pi\cdot kR\cdot ki = 2\pi Ri\cdot k^2$. Ea s-a înmulțit cu k^2. b) Fie x și kx două distanțe $k \neq 1$. Înălțimile corespunzătoare ale calotelor sînt $R - x$ și $R - kx$, deci raportul dintre ariile calotelor este

$$\frac{2\pi R(R-x)}{2\pi R(R-kx)} = \frac{R-x}{R-kx}.$$

Condiția ca ariile să fie invers proporționale cu distanțele este

$$\frac{R-x}{R-kx}=\frac{1}{k};\quad kR-kx=R-kx;$$
$$kR=R;\quad k=1.$$

Dar s-a presupus că $k\neq 1$. Răspuns: nu.

13.4.16 (fig. 21). Fie $OC=x$ distanța; înălțimea calotei este $CB=OB-OC=R-x$. Ecuația este

$$2\pi R(R-x)=\pi R^2;\quad x=\frac{R}{2}.$$

13.4.17 (fig. 21). Fie $OC=x$. Triunghiul AOC dă $CA=\sqrt{R^2-x^2}$ și înălțimea calotei este $BC=OB-OC=R-x$. a) Cele două arii sînt

$$\pi R\sqrt{R^2-x^2}\ \text{și}\ 2\pi R(R-x).$$

Raportul lor este

$$k=\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{2(R-x)}.$$

Ca să scăpăm de radical, ridicăm la pătrat:

$$k^2=\frac{R^2-x^2}{4(R-x)^2}=\frac{(R+x)(R-x)}{4(R-x)^2}.$$

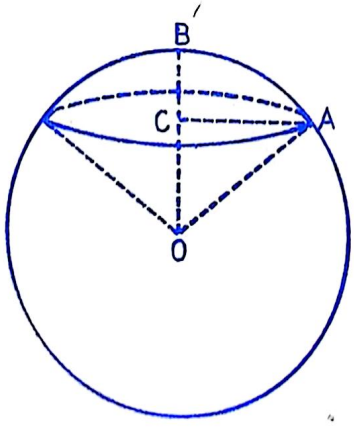


Fig. 21

Deoarece $x\neq R$, $R-x\neq 0$, deci putem simplifica cu $R-x$:

$$k^2=\frac{R+x}{4(R-x)}.$$

Raportul k va fi mai mare sau mai mic decît 1 după cum k^2 va fi mai mare sau mai mic decît 1. El depinde de x. Punem condiția ca aria laterală a conului să fie mai mare:

$$\frac{R+x}{4(R-x)}>1,\quad R+x>4R-4x,$$
$$x>\frac{3R}{5}.$$ La fel, $k<1$ cînd $x<\frac{3R}{5}$; și $k=1$ cînd $x=\frac{3R}{5}$.

13.4.18 (fig. 22). Fie r raza secțiunii și O centrul ei. Suma volumelor conurilor este

$$\frac{\pi r^2 OA}{3}+\frac{\pi r^2 OB}{3}=\frac{\pi r^2(OA+OB)}{3}=$$
$$=\frac{\pi r^2\cdot 2R}{3},$$

unde R este raza sferei. Această sumă va fi maximă cînd r^2, adică r va fi maxim. În triunghiul dreptunghic POM, $MP=R$ și $MO=r$. În general, $MO<MP$. MO, adică r este maxim cînd punctele O și P coincid, adică planul de secțiune trece prin centrul sferei. Suma volumelor este $\frac{2\pi R^3}{3}$, adică jumătate din volumul sferei.

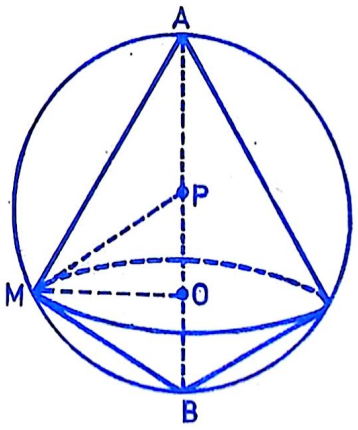


Fig. 22

13.5.1. Fie R și i raza și înălțimea unui cilindru; volumul său este $\mathcal{V}_1=\pi R^2 i$. Dacă baza dreptunghiului se

împarte în n părți, lungimea cercului de la baza unui cilindru mic este $\frac{2\pi R}{n}$; deci raza sa este $\frac{R}{n}$; volumul său este $\frac{\pi R^2 i}{n^2}$ și suma volumelor celor n cilindri este $\mathcal{V}_2 = \frac{\pi R^2 i}{n}$. Raportul este $\frac{1}{n}$. Aceasta înseamnă că, dacă din același material facem mai multe corpuri, volumul total scade.

13.5.2. Aceeași soluție ca la problema precedentă.

13.5.3. a) Dacă două poligoane sînt asemenea raportul lor de asemănare fiind k, raportul dintre ariile lor este k^2 (v. problema 10.3.1). Fețele laterale ale celor două prisme sînt dreptunghiuri asemenea, căci laturile lor sînt proporționale, raportul de asemănare fiind tot k. Rezultă că aria fiecărei fețe a prismei a doua se obține înmulțind aria feței corespunzătoare a primei fețe cu k^2, deci raportul cerut este k^2. Apoi, fie $\mathcal{B}$ și i aria bazei și înălțimea primei prisme; volumul ei este $\mathcal{V}_1 = \mathcal{B}i$. Aria bazei și înălțimea prismei a doua sînt $\mathcal{B}k^2$ și ik, deci volumul ei este $\mathcal{V}_2 = \mathcal{B}k^2 \cdot ik = \mathcal{B}i \cdot k^3 = \mathcal{V}_1 k^3$. Deci, raportul volumelor este k^3.

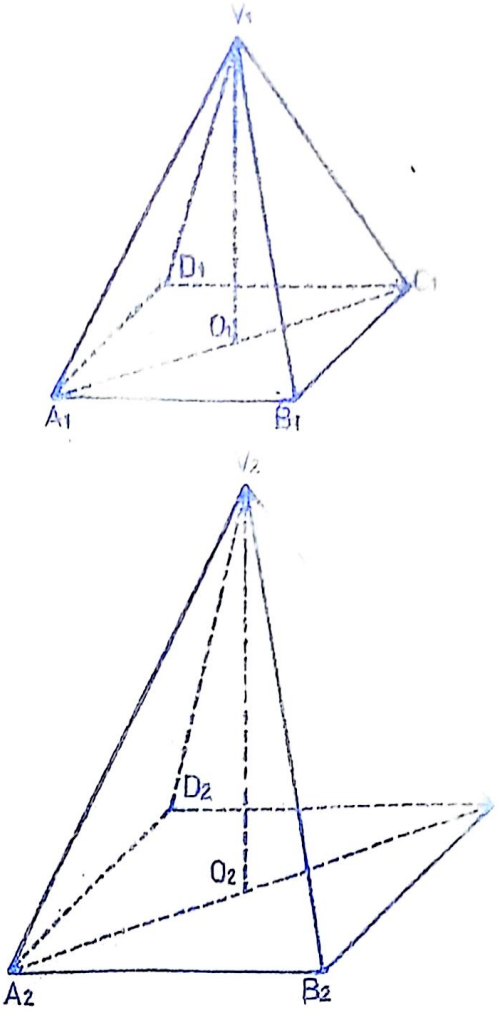
b) Pentru arii, demonstrația decurge la fel. Pentru volume, luăm, de exemplu, cazul unor piramide pătrate (fig. 23). Raportul diagonalelor pătratelor este egal cu raportul laturilor, deci $\frac{O_2C_2}{O_1C_1} = k$. Acum $\triangle V_2O_2C_2 \sim \triangle V_1O_1C_1$ (v. probl. 8.4.4), deci

$$\frac{V_2O_2}{V_1O_1} = \frac{O_2C_2}{O_1C_1} = k, \text{ deci}$$

$$O_2C_2 = kO_1C_1, \text{ adică } i_2 = ki_1.$$

De acum înainte se procedează exact ca la prismă și se obține același rezultat.

c) Fie R_1, i_1, R_2 și i_2 razele și înălțimile a doi cilindri, $R_2 = kR_1$ și $i_2 = ki_1$.



Ariile lor totale sînt:

$$\mathcal{A}_1 = 2\pi R_1(R_1 + i_1)$$

și

$$\mathcal{A}_2 = 2\pi R_2(R_2 + i_2).$$

Se înlocuiește R_2 cu kR_1 și i_2 cu ki_1 și se obține $\mathcal{A}_2 = k^2\mathcal{A}_1$, deci raportul ariilor este k^2.

Volumele lor sînt:

$$\mathcal{V}_1 = \pi R_1^2 i_1 \text{ și } \mathcal{V}_2 = \pi R_2^2 i_2 =$$
$$= \pi k^2 R_1^2 k i_2 = \pi k^3 R_1^2 i_1 = k^3 \mathcal{V}_1,$$

deci raportul volumelor este k^3.

d) În cazul a două conuri, se demonstrează întîi că raportul generatoarelor este egal cu raportul înălțimilor și demonstrația decurge la fel.

Observare. Cîte două corpuri ca cele considerate aici se numesc corpuri asemenea. Cînd două corpuri sînt asemenea, raportul de asemănare fiind k, raportul dintre ariile lor este k^2 și raportul dintre volumele lor este k^3.

13.5.4. *Soluția I* (fig. 24). Sfera se taie cu două plane paralele egal depărtate de centru, în fiecare din ele se înscrie un pătrat astfel încît ele să formeze bazele unui paralelipiped. Condiția ca să se obțină un cub este ca înălțimea paralelipipedului să fie egală cu latura bazei sale. Fie $OP = x$ distanța de la centrul sferei la planele de secțiune. Se calculează raza AP a secțiunii, apoi latura pătratului înscris în cercul de secțiune și se pune condiția ca această latură să fie egală cu $2x$.

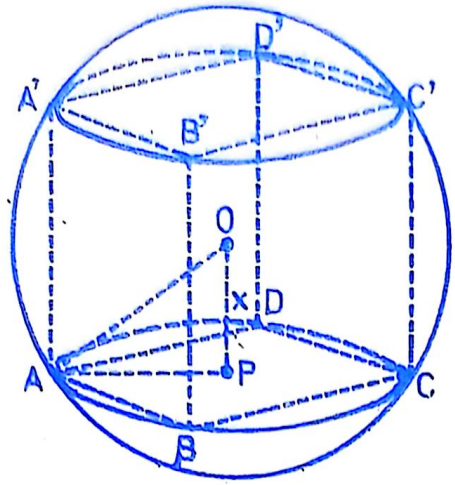


Fig. 24

Fie R raza sferei

$$\sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{2} = 2x;\ x = \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Latura cubului este $2x = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$.

Soluția II. Diagonala cubului este egală cu diametrul sferei, deci

$$x\sqrt{3} = 2R;\ x = \ldots$$

13.5.5 (fig. 25). Tăiem sfera cu un plan și în cercul de secțiune înscriem un triunghi echilateral ABC. Fie O centrul sferei, P centrul secțiunii și V unul din punctele în care dreapta OP taie sfera. Piramida $VABC$ este regulată, căci $VA \equiv VB \equiv VC$ (deoatrece $PA \equiv PB \equiv PC$). Urmează să determinăm distanța OP astfel încît VA să fie congruent cu VB. Fie $OP = x$. Se calculează latura bazei AB și muchia VA și se pune condiția ca ele să fie congruente. Triunghiul OAP dă $AP = \sqrt{R^2 - x^2}$, unde R este raza sferei. AP este raza cercului circumscris triunghiului ABC, deci $AB = AP\sqrt{3}$.

$$AB = \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3R^2 - 3x^2}.$$

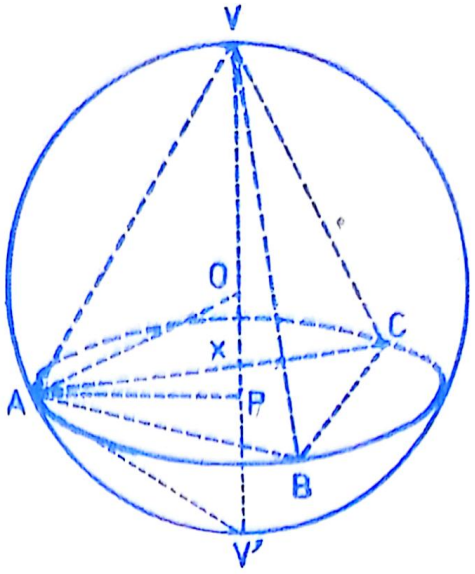


Fig. 25

Teorema catetei, aplicată în triunghiul VAV', dă $VA^2 = VV' \cdot VP = 2R(R + x)$,

$$VA = \sqrt{2R(R + x)}.$$

Condiția $VA = VB$ dă ecuația

$$\sqrt{3R^2 - 3x^2} = \sqrt{2R(R + x)};$$

$$3x^2 + 2Rx - R^2 = 0,\ x = \frac{R}{3}.$$

Observare. Pentru a înscrie într-un cerc un triunghi regulat (echilateral), ducem o coardă a cărei distanță de la centru este $\dfrac{R}{2}$; pentru a înscrie în sferă un tetraedru regulat, ducem un plan a cărui distanță de la centru este $\dfrac{R}{3}$.

13.5.6. a) Cilindru la care se adaugă două hemisfere (o sferă).

$$\mathcal{V} = \frac{\pi a^2(4a + 3b)}{3} \cdot \mathcal{A} = 2\pi a(2a + b).$$

b) Cilindru din care se scot două hemisfere (o sferă). $\mathcal{V} = \dfrac{5\pi a^3}{3}$. $\mathcal{A} = 10\pi a^2$. c) Trunchi de con la care se adaugă două hemisfere $\mathcal{V} = \dfrac{25\pi a^3}{3}$. $\mathcal{A} = \pi a^2(10 + 3\sqrt{2})$.

13.5.7 (fig. 27). Corpul este format din două conuri care au aceeași bază. Fie $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ și AD înălțimea triunghiului. Raza comună a conurilor este AD. a) Nu se calculează volumul fiecărui con în parte.

$$\mathcal{V} = \frac{\pi AD^2 \cdot DC}{3} + \frac{\pi AD^2 \cdot BD}{3} = \frac{\pi AD^2(DC + BD)}{3} = \frac{\pi AD^2 \cdot BC}{3};$$

$BC = a$ și $AD = \frac{bc}{a}$ (v. probl. 9.1.7), deci $AD^2 = \frac{b^2c^2}{a^2}$.

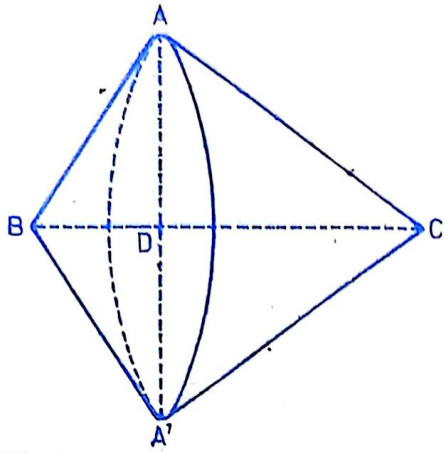


Fig. 27

Rezultă că

$$\mathcal{V} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{b^2c^2}{a^2} \cdot a = \frac{\pi b^2c^2}{3a} = \frac{\pi b^2c^2}{3\sqrt{b^2+c^2}}.$$

b) Aria este suma ariilor laterale ale celor două conuri.

$$\mathcal{A} = \pi AD \cdot AC + \pi AD \cdot AB = \pi AD(AC + AB) = \frac{\pi bc(b+c)}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

13.5.8 (fig. 28). Corpul este un cilindru din care s-au scos două conuri

$$\mathcal{V} = \frac{2\pi b^2c^2}{3a}, \quad \mathcal{A} = \frac{\pi bc(b+c+2a)}{a}$$

unde $a = \sqrt{b^2+c^2}$.

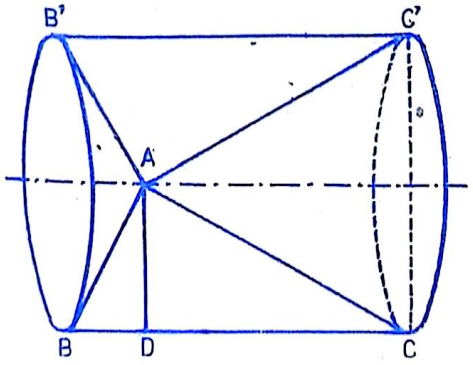


Fig. 28

13.5.9 (fig. 29). Corpul este format dintr-un cilindru și două conuri. Pentru a afla raza lor ducem (fig. 30) CE paralel cu AD. Triunghiul CEB este echilateral, deci $BF = \frac{a}{2}$ și $CF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

a) Volumul este

$$\pi CF^2 \cdot CD + 2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot CF^2 \cdot BF = \pi a^3.$$

b) Aria este

$$2\pi CF \cdot DC + 2\pi CF \cdot BC = 2\pi a^2\sqrt{3}.$$

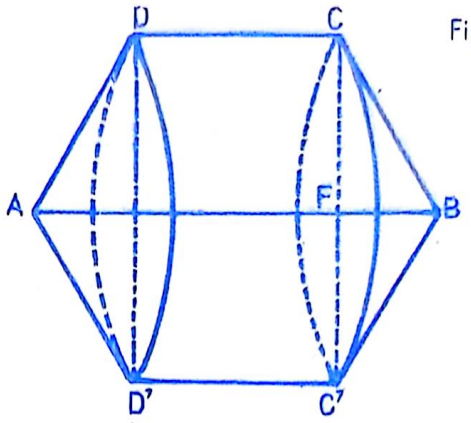


Fig. 29

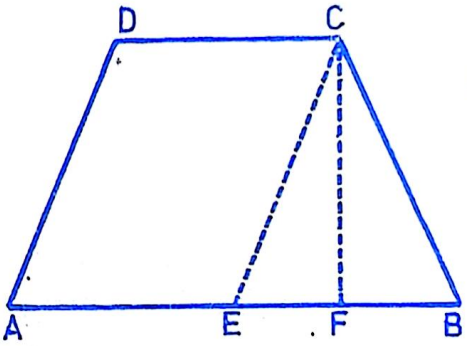


Fig. 30

13.5.10 (fig. 31). Corpul este un cilindru din care s-au scos două conuri.

$$\mathcal{V} = \frac{5\pi a^3}{4}, \quad \mathcal{A} = 3\pi a^2\sqrt{3}.$$

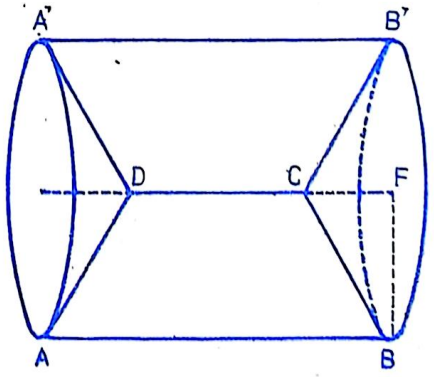


Fig. 31

13.5.11 (fig. 32). Fie $ABCD$ un dreptunghi. După o rotație cu 180° în jurul diagonalei BD, vîrful A ajunge în punctul A' și vîrful C ajunge în C', punctele A' și C' fiind simetrice cu A și C față de dreapta BD. Raza cutiei trebuie să fie cel puțin egală cu AE și înălțimea sa trebuie să fie cel puțin egală cu BD. Triunghiul ABD dă $AE = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (v. problema 10.1.8). $BD = \sqrt{a^2+b^2}$.

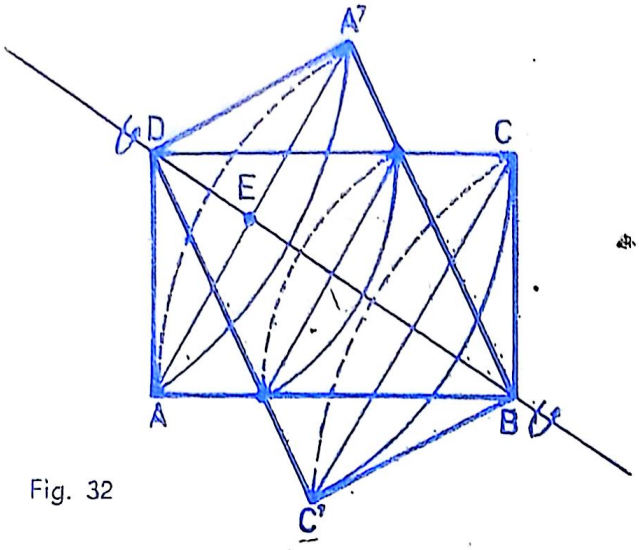


Fig. 32

13.5.12 (fig. 34) Cilindru la care se adaugă două calote.

$$\mathcal{A} = \pi a^2(3 - \sqrt{2}).$$

13.5.13. Con la care se adaugă o calotă. $OE = OA = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ (v. nota de la problema 12.1.27). $DE = \frac{OE}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ($OBEC$ este romb).

Aria laterală a conului $= \pi DC \cdot AC = \frac{\pi a^2}{2}$;

Aria calotei $= 2\pi OE \cdot DE = \frac{\pi a^2}{3}$;

Aria corpului $= \frac{5\pi a^2}{6}$.

Altfel: Fie R raza cercului circumscris triunghiului. Atunci $DE = \frac{R}{2}$.

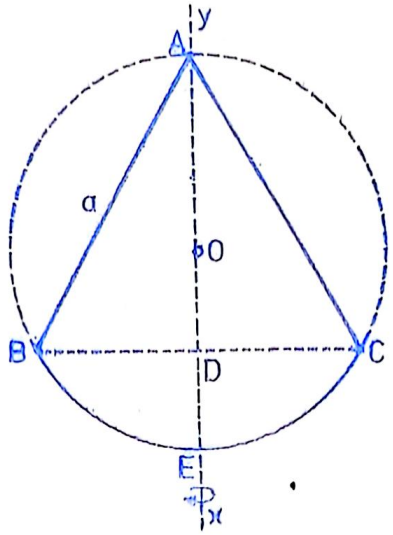


Fig. 34

Aria calotei este $2\pi R \cdot \frac{R}{2} \quad \pi R^2$. Se înlocuiește R prin $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

13.5.14. Fie O centrul cercului circumscris triunghiului și E, F, G picioarele perpendicularelor coborîte din O pe laturile triunghiului $OE = OF = OG$, deci cercul cu centrul în O și cu raza OE trece prin F și G, deci este înscris triunghiului. Raza lui este

$$OE = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

(v. nota de la problema 12.1.27). Fie $GF \cap AE = H$. FG este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci și în triunghiul AEC, deci $HF = \frac{EC}{2} = \frac{a}{4}$ și $EH = \frac{AE}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Aria calotei $= 2\pi \cdot EO \cdot EH = \frac{\pi a^2}{4}$;

aria laterală a conului $= \pi \cdot FH \cdot AF = \frac{\pi a^2}{8}$; aria corpului $= \frac{3\pi a^2}{8}$.

13.5.15. În figura 36 cercul reprezintă un meridian al Pămîntului. Din M s-au dus tangentele la cerc. Partea vizibilă este calota care are ca bază cercul de diametru BC. a) Teorema catetei, aplicată în triunghiul OMC, dă

$$OP = \frac{OC^2}{OM} = \frac{R^2}{R+i}.$$

Înălțimea calotei este

$$AP = OA - OP = R - \frac{R^2}{R+i} = \frac{Ri}{R+i}.$$

$$\mathcal{A} = \frac{2\pi R^2 i}{R+i}; \quad \frac{\mathcal{A}}{S} = \frac{i}{2(R+i)}.$$

b) $\frac{1}{4}$. c) $i = 2R$. d) Ecuația

$$\frac{i}{2(R+i)} = \frac{1}{2}$$

dă $i = R + i$, ceea ce este imposibil. Geometric: Calota devine o emisferă cînd baza ei este un cerc mare al sferei, cînd BC este un diametru. Atunci tangentele sînt paralele, deci punctul M nu există. e) $\cos u = \frac{OB}{OM} = \frac{1}{2}$; $u = 60°$; $AB = \frac{\pi R}{3}$.

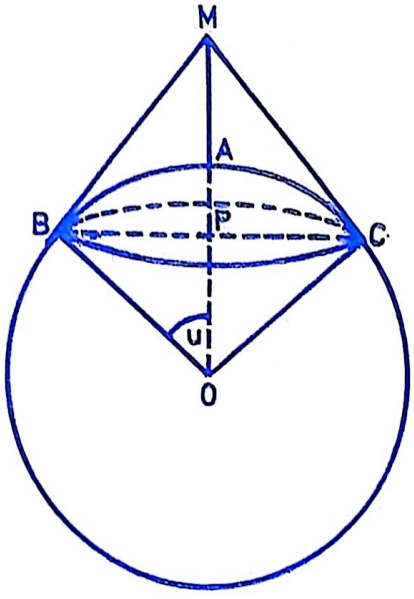


Fig. 36

f) S-a dat că $AB = 530$ km. Formula $\widehat{AB} = \frac{\pi R u}{180}$ dă $u = 5°$. Triunghiul OBM dă $OM = \frac{6\,300}{\cos 5°} = 6\,325$ km, deci $AM = 25$ km.

13.5.16. Fie x cealaltă rază a trunchiului de con. Ecuația este

$$x^2 + Rx + R^2 - 3a^2 = 0.$$

Realizantul este $3(2a + R)(2a - R)$. Primii doi factori sînt pozitivi, deci condiția ca ecuația să aibă rădăcini reale este $2a - R \geqslant 0$; $a \geqslant \frac{R}{2}$. Atunci rădăcinile ecuației sînt

$$x_1, x_2 = \frac{-R \pm \sqrt{3(4a^2 - R^2)}}{2}.$$

b) Ca să convină problemei, x trebuie să fie pozitiv. De aceea trebuie luat în fața radicalului semnul plus. Condiția $x \geqslant 0$ dă

$$\sqrt{3(4a^2 - R^2)} \geqslant R; \quad 12a^2 - 3R^2 \geqslant R^2;$$

$$3a^2 \geqslant R^2; \quad a \geqslant \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

În cazul extrem, cînd $a = \frac{R\sqrt{3}}{3}$, ecuația devine $x^2 + Rx = 0$ și dă $x = 0$ (soluția $x = -R$ nu convine). Aceasta înseamnă că se obține un con. c) R va fi raza mare cînd rădăcina ecuației va fi mai mică decît R. Condiția este

$$\frac{-R + \sqrt{3(4a^2 - R^2)}}{2} < R;$$

$$\sqrt{3(4a^2 - R^2)} < 3R; \quad 12a^2 - 3R^2 < 9R^2;$$

$$a < R.$$

La fel se găsește că R este raza mică cînd $a > R$ și cele două raze sînt egale, adică se obține un cilindru, cînd $a = R$. Și invers. d) Raza R și înălțimea i a trunchiului de con fiind date, trunchiul de con cel mai mic care se poate forma este conul cu raza R și înălțimea i; volumul său este $\frac{\pi R^2 i}{3}$. Problema admite o soluție cînd volumul cilindrului, $\pi a^2 i$, este cel puțin egal cu acesta, deci condiția este

$$\pi a^2 i \geqslant \frac{\pi R^2 i}{3}; \quad a^2 \geqslant \frac{R^2}{3}; \quad a \geqslant \frac{R\sqrt{3}}{3}.$$

Totodată se putea prevedea că a nu are maxim, căci, luînd cealaltă rază destul de mare, putem obține un trunchi de con cu un volum oricît de mare.

Fie R raza de jos a trunchiului de con. Cînd $a < R$, adică $R > a$ (fig. 37), partea de jos a trúnchiului de con este mai groasă decît a cilindrului; ca volumele să fie egale, trunchiul de con trebuie să fie mai subțire în partea de sus, deci R este raza mare a conului; ș.a.m.d.

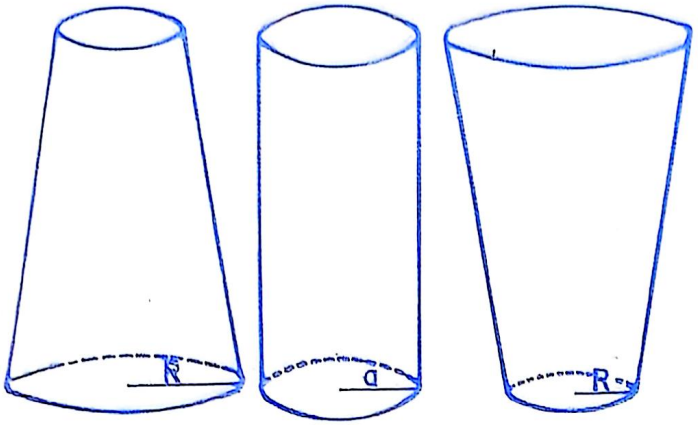


Fig. 37

13.5.17 (fig. 38). Fie $MP = r$ raza secțiunii. Suma volumelor este

$$\frac{\pi r^2 AP}{3} + \frac{\pi r^2 PO}{3} = \frac{\pi r^2 (AP + PO)}{3} = \frac{\pi r^2 R}{3}$$

($AP + PO = R$). Punem $OP = x$. Triunghiul OPM dă $r^2 = R^2 - x^2$.

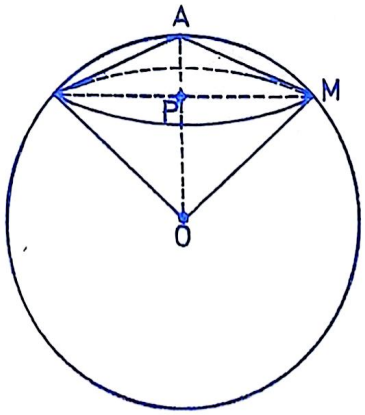


Fig. 38

a) Ecuația este

$$\frac{\pi(R^2 - x^2)R}{3} = \frac{3}{16} \cdot \frac{4\pi R^3}{3}; x = \frac{R}{2}.$$

b) În ecuația precedentă se înlocuiește $\frac{3}{16}$ cu k; $x = R\sqrt{1 - 4k}$. c) Condiția este $1 - 4k \geqslant 0$; $k \leqslant \frac{1}{4}$. d) Volumul este maxim cînd k este maxim adică atunci cînd $k = \frac{1}{4}$. Atunci $x = 0$, planul trece prin centrul sferei.

Observare. Cu aceasta am rezolvat și următoarea problemă de maxim: O sferă se taie cu un plan. Se consideră cele două conuri care au ca bază intersecția sferei cu planul și ca vîrfuri centrul sferei și capătul razei perpendiculare pe plan. Să se determine distanța de la centrul sferei la plan astfel încît suma volumelor conurilor să fie maximă. Am aflat că planul trebuie dus prin centrul sferei. Se formează un singur con. (Soluția este evidentă, căci suma înălțimilor conurilor este aceeași, egală cu raza sferei, oriunde am face secțiunea. Atunci suma volumelor va fi maximă cînd aria bazei va fi maximă, adică...)

13.5.18. a) Se obține un trunchi de con cu razele $6 + x$ și $6 - x$ și aceeași înălțime i. Ecuația problemei este

$$\frac{\pi i}{3}[(6 + x)^2 + (6 - x)^2 + (6 + x)(6 - x)] = \frac{5}{4} \cdot 36\pi i; x = 3\sqrt{3}.$$

b) Se obține ecuația

$$3R^2 + x^2 = 3kR^2; x = R\sqrt{3(k - 1)}.$$

Condiția ca ecuația să aibă o soluție este $k - 1 \geqslant 0$; $k \geqslant 1$.

c) Ca să convină problemei, x trebuie să fie pozitiv și cel mult egal cu raza, deci $R\sqrt{3(k - 1)} \leqslant R$. Se ridică la pătrat și se rezolvă în raport cu k. Condiția este $k \leqslant \frac{4}{3}$. Așadar, k trebuie să fie cuprins între 1 și $\frac{4}{3}$ inclusiv. d) Volumul este maxim cînd k are valoarea maximă, $k = \frac{4}{3}$. Atunci soluția ecuației devine $x = R$, deci razele devin $R + R = 2R$ și $R - R = 0$;

cilindrul devine un con cu raza $2R$, volumul maxim este $\frac{4\pi R^2 i}{3}$.

13.5.19. Fie $VC = x$ distanța cerută. Raza cilindrului se află din triunghiurile asemenea VCB și VOA; $r = CB = \frac{Rx}{i}$. Aria laterală a cilindrului este

$$(1) \qquad \mathcal{A} = \frac{2\pi Rx}{i}(i - x).$$

Scriind că ea este egală cu πa^2, se obține ecuația

$$(2) \qquad 2Rx^2 - 2Rix + a^2 i = 0.$$

Realizantul este $Ri(Ri - 2a^2)$. Condiția ca rădăcinile ecuației să fie reale este $Ri - 2a^2 \geqslant 0$;

$$(3) \qquad a^2 \leqslant \frac{Ri}{2}.$$

Atunci rădăcinile ecuației sînt

$$(4) \quad x_1, x_2 = \frac{Ri \pm \sqrt{Ri(Ri - 2a^2)}}{2R}.$$

b) Ca să convină problemei x trebuie să fie pozitiv și mai mic decît i. Rădăcina x_1 (semnul plus) este pozitivă. Condiția $x_1 < i$ dă

$$\sqrt{Ri(Ri - 2a^2)} < Ri.$$

Se ridică la pătrat și se obține

$$Ri(Ri - 2a^2) < R^2 i^2;$$
$$Ri - 2a^2 < Ri; \quad -2a^2 < 0.$$

Această condiție este îndeplinită oricare ar fi a, deci rădăcina x_1 convine. La fel se vede că și x_2 convine. Așadar, cînd condiția (3) este îndeplinită, problema admite două soluții, date de (4). c) Condiția (3) arată că valoarea maximă a lui a este $\sqrt{\frac{Ri}{2}}$. Aria maximă este $\pi a^2 = \frac{\pi Ri}{2}$.

Condiția (3) s-a obținut scriind că realizantul este egal cu zero. Atunci (4) dă $x_1 = x_2 = \frac{Ri}{2R} = \frac{i}{2}$. Maximul este atins cînd secțiunea se face la mijlocul înălțimii conului.

Observări. 1) Forma condiției (3) se putea prevedea, căci cilindrul fiind în interiorul conului, aria lui laterală nu poate fi oricît de mare, deci a trebuie să fie mai mic decît un număr anumit.

2) Relația (4) se poate pune sub forma

$$x_1, x_2 = \frac{i}{2} \pm E,$$

unde $E = \frac{\sqrt{Ri(Ri - 2a^2)}}{2R}$. Se vede astfel că cele două rădăcini se obțin adăugînd la $\frac{i}{2}$ sau scăzînd din $\frac{i}{2}$ același număr. Aceasta înseamnă că cele două secțiuni care dau arii egale sînt simetrice față de mijlocul înălțimii conului.

3) Rezolvînd această problemă, am rezolvat și următoarea problemă de maxim: Să se înscrie într-un con cilindrul de arie laterală maximă. Am aflat că secțiunea în con trebuie făcută la mijlocul înălțimii conului.

Cap. 14

14.1.1 (fig. 1). Trebuie examinate toate pozițiile posibile ale punctului M. a) Presupunem că $M \notin xy$. Atunci punctele A, B și M formează un triunghi. Ce relație există între $MA + MB$ și AB? Dar cînd $M \in Ax$ și $M \neq A$, de exemplu $M = D$? Dar dacă $M \in By$ și $M \neq B$, de exemplu $M = E$? Dar dacă $M \in AB$, de exemplu $M = F$? Numai în acest caz $MA + MB = AB$; în toate celelalte

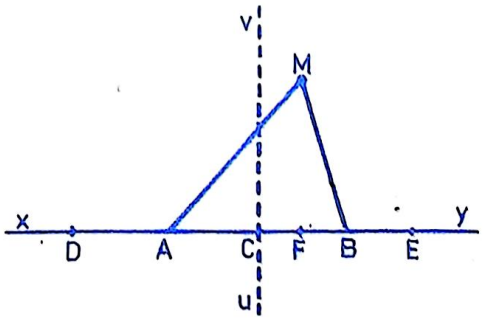


Fig. 1

cazuri, $MA + MB > AB$. Suma este minimă cînd punctul M aparţine segmentului AB, inclusiv punctele A şi B. b) Nu. Dacă luăm punctul M destul de departe, suma poate deveni oricît de mare. c) Dacă $MA > MB$, trebuie examinată diferenţa $MA - MB$, iar dacă $MA < MB$ diferenţa $MB - MA$. De aceea ducem mediatoarea uv a segmentului AB şi considerăm deocamdată numai semiplanul din dreapta ei, în care $MA > MB$ (v. probl. 4.4.6). Dacă $M \notin xy$, ce relaţie există între $MA - MB$ şi AB? Dar dacă M aparţine segmentului CB şi $M \neq B$, de exemplu $M = F$? Dar dacă $M \in By$? Numai în acest caz $MA - MB = AB$; în toate celelalte cazuri $MA - MB < AB$. Diferenţa $MA - MB$ este maximă cînd punctul M aparţine semidreptei By inclusiv punctul B. Examinînd semiplanul din stînga, se arată la fel că diferenţa $MB - MA$ este maximă cînd punctul M aparţine semidreptei Ax inclusiv punctul A. d) Da. Cînd $M \in uv$, $MA = MB$, deci $MB - MA = 0$.

În rezumat, suma $MA + MB$ este minimă, egală cu AB, cînd $M \in AB$ şi nu are maxim; diferenţa dintre MA şi MB este maximă, egală cu AB, cînd $M \in Ax$ sau $M \in By$ şi este minimă cînd M aparţine mediatoarei segmentului AB.

Observare. Suma nu este minimă pentru o anumită poziţie a punctului M; ea rămîne aceeaşi cînd punctul parcurge segmentul AB. Observaţie analoagă cu privire la diferenţă.

14.1.2 (fig. 2). Ducem diametrul BC care trece prin A. După aprecierea din ochi, punctele căutate sînt B şi C.

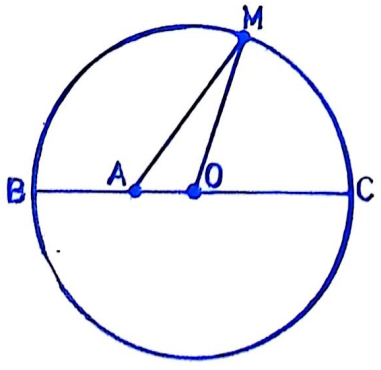


Fig. 2

Fie R raza şi M un punct oarecare al cercului. a) Trebuie să demonstrăm că $AB < AM$. $AB = OB - AO$, adică

(1) $\qquad AB = R - AO.$

În triunghiul OMA, $AM > OM - AO$, adică

(2) $\qquad AM > R - AO.$

Din (1) şi (2) rezultă că $AB < AM$.

b) Trebuie să demonstrăm că $AC > AM$. $AC = AO + OC$, adică

(3) $\qquad AC = AO + R.$

În triunghiul AMO, $AM < AO + OM$, adică

(4) $\qquad AM < AO + R.$

Din (3) şi (4) rezultă că $AC > AM$.

Cînd punctul A este în exteriorul cercului, demonstraţia se poate repeta cuvînt cu cuvînt, numai că în relaţiile (1) şi (2) apare $AO - R$ în loc de $R - AO$. Cînd punctul A aparţine cercului, punctul cercului cel mai apropiat de el este chiar el; iar punctul cel mai depărtat este cealaltă extremitate B a diametrului care trece prin A, căci, M fiind un punct oarecare al cercului, AM este o coardă, AB este diametru şi diametrul este mai mare decît coarda. Exemplu: Mîncarea trebuie aşezată la capătul diametrului care trece prin A.

14.1.3 (fig. 3). Ducem din centrul cercului perpendiculara OB pe dreaptă şi fie M şi N cîte un punct oarecare al dreptei şi al cercului. a) Oricare ar fi punctele M şi N, $AB < MN$. În adevăr, în triunghiul OMN, $MN > ON - OM$, adică, R fiind raza cercului,

(1) $\qquad MN > ON - R.$

Pe de altă parte, $AB = OB - OA$, adică

$$AB = OB - R.$$

$OB < ON$, căci perpendiculara este mai scurtă decît oblica. Dacă în ultima relaţie înlocuim OB cu ON, partea dreaptă creşte, deci partea stîngă rămîne mai mică,

(2) $\qquad AB < ON - R.$

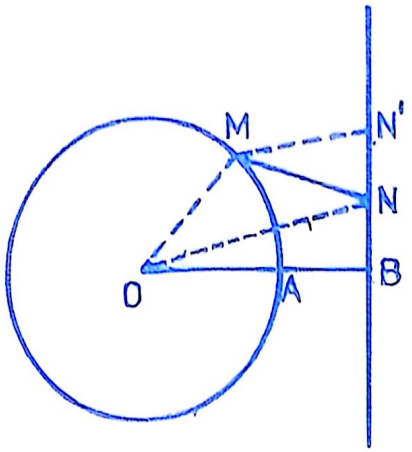


Fig. 3

Din (1) și (2) rezultă că $AB < MN$. Punctele A și B au distanța minimă.

Dacă dreapta taie cercul sau este tangentă la cerc, punctele lor comune sau punctul lor comun dă distanța minimă, egală cu zero. b) Nu există maxim. Căci, M fiind un punct oarecare al cercului, punctul N' al dreptei poate fi luat astfel încît segmentul MN' să fie oricît de mare vrem.

14.1.4. $EG \equiv OD$ și $HF \equiv OB$, ca diagonale ale aceluiași dreptunghi, deci condiția este ca suma $OD + OB$ să fie minimă. Pentru aceasta trebuie ca punctele D, O și B să fie coliniare, adică punctul O trebuie luat pe diagonala BD.

Observare. Punctul O nu este determinat, el poate fi orice punct al diagonalei BD, dar oricum l-am lua pe diagonală, suma $DG + EF$ va fi egală cu diagonala dreptunghiului (v. probl. 5.3.12).

14.1.5. Fie O intersecția diagonalelor (fig. 5). Suma distanțelor sale de la vîrfuri este $OA + OC + OB + OD = AC + BD$, adică suma diagonalelor. Fie acum P un punct oarecare din interiorul patrulaterului. Triunghiul PAC dă

$$PA + PC > AC$$

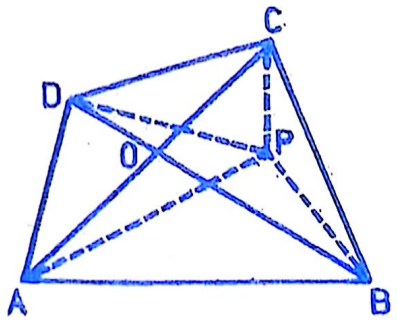


Fig. 5

și triunghiul PDB dă

$$PB + PD > BD.$$

Adunînd aceste neegalități, se obține

$$PA + PC + PB + PD > AC + BD.$$

Aceasta înseamnă că, dacă P nu este intersecția diagonalelor, suma distanțelor sale de la vîrfuri este mai mare decît suma diagonalelor. Rezultă că punctul căutat este intersecția diagonalelor.

Aeroportul trebuie construit la intersecția diagonalelor.

14.1.6 (fig. 6). Se folosește faptul că vîrfurile poligonului sînt diametral opuse două cîte două (v. probl. 7.15). Considerăm, de exemplu, cazul hexagonului $AD = BE = CF = 2R$, R fiind raza cercului circumscris. Fie M un punct oarecare diferit de centru. Triunghiurile MAD, MBE și MCF dau

$$MA + MD > 2R, \quad MB + ME > 2R,$$
$$MC + MF > 2R,$$

(cînd punctul M este pe AD, BE sau CF, în una din relații semnul „$>$" trebuie înlocuit cu „$=$").

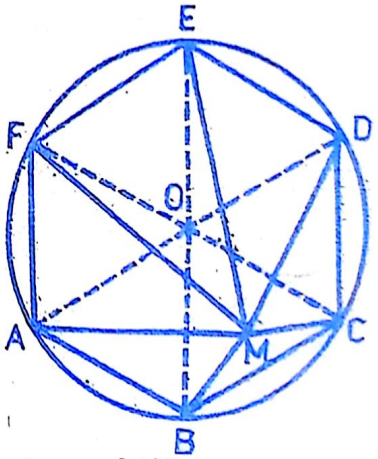


Fig. 6

Adunînd, se obține

$$S_1 = MA + MB + MC + MD + ME + MF > 6R,$$

Cînd punctul M este centrul poligonului, $M = O$, suma distanțelor este

$$S_2 = 6R.$$

Din aceste două relații rezultă că $S_2 < S_1$, adică atunci cînd punctul M este centrul poligonului, suma este mai

mică decît atunci cînd punctul M nu este centrul. Suma este minimă cînd punctul M este centrul; atunci ea este egală cu $6R$. În cazul unui poligon cu n laturi, suma minimă este nR.

Observare. Rezultatul rămîne valabil și cînd poligonul nu este regulat. Este suficient să fie înscris într-un cerc și vîrfurile sale să fie diametral opuse două cîte două.

14.1.7. a) Considerăm că baza AB este fixă (fig. 7) și latura AC se rotește în jurul punctului A. Baza fiind constantă, aria triunghiului este direct proporțională cu înălțimea sa și va fi maximă cînd înălțimea va fi maximă. Cînd unghiul A este ascuțit (fig. 7-a) sau obtuz (fig. 7-b) înălțimea $CD < CA$, căci $CD \perp AB$ și CA este o oblică dusă din punctul C pe AB. Numai cînd unghiul A este drept (fig. 7-c), înălțimea este chiar CA. Aria triunghiului este maximă cînd unghiul A este drept. b) Unghiurile trebuie să fie drepte.

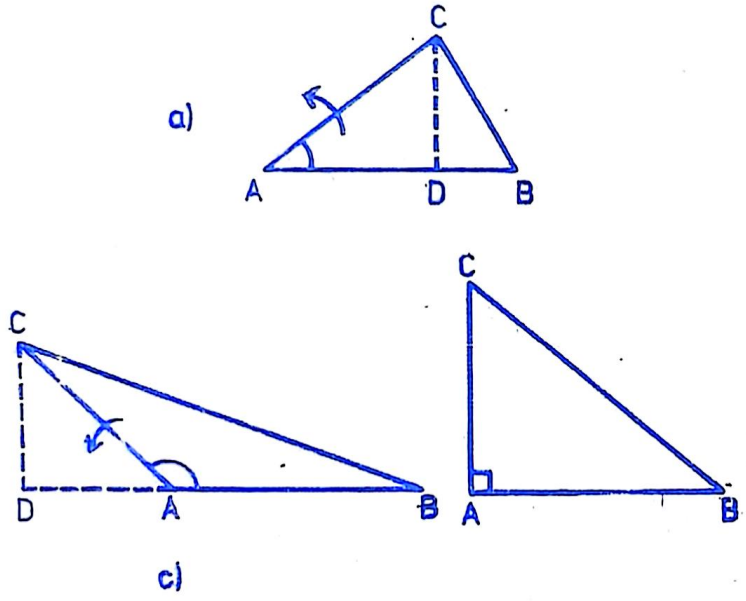


Fig. 7

14.1.8. a) Fie O și P (fig. 8) centrele celor două cercuri și MN o dreaptă care trece prin punctul A. Ducem OC și PD perpendiculare pe MN. Atunci $AC = \frac{AM}{2}$ și $AD = \frac{AN}{2}$, deci $CD = \frac{MN}{2}$, deci MN este maxim în

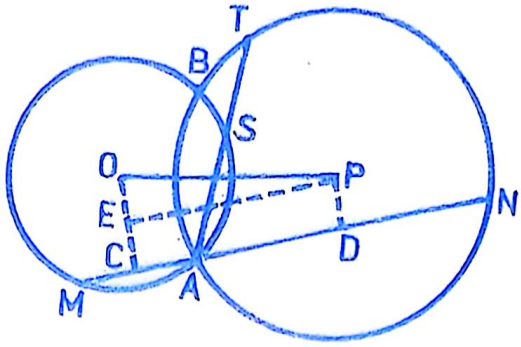


Fig. 8

același timp cu CD. Ducem PE paralel cu MN; atunci $PE \equiv CD$ (paralele cuprinse între paralele). Or, în general $PE < OP$, căci $PE \perp OC$ și PO este oblic față de OC. PE va fi maxim cînd va fi congruent cu PO, ceea ce se întîmplă cînd $MN \parallel PO$. Așadar, segmentul MN este maxim cînd dreapta MN este paralelă cu linia centrelor.

b) Dacă ducem secanta AT, în locul segmentului MN apare segmentul ST, care este mic; dacă ducem o secantă mai apropiată de AB, apare un segment și mai mic. Putem duce secanta astfel încît segmentul ST să fie oricît de mic dorim. Nu există minim.

14.1.9 (fig. 9). Fie A' simetricul punctului A față de dreapta d și M un punct oarecare al acestei drepte. Datorită simetriei, $AM \equiv A'M$, deci linia frîntă AMB are aceeași lungime ca $A'MB$. Acum problema se pune astfel: să se determine un punct M al dreptei d astfel încît drumul de la A' la B trecînd prin M să fie cît mai scurt. Răspunsul este imediat: drumul cel mai scurt este segmentul $A'B$ și punctul căutat este intersecția lui cu dreapta d. Construcție: Se ia simetricul A' al punctului A față de dreapta d și se unește punctul A' cu punctul B; fie $A'B \cap d = C$. Punctul C este punctul căutat.

În adevăr, fie M un punct oarecare al dreptei d. Datorită simetriei, $A'C \equiv AC$ și $A'M \equiv AM$, deci

$$ACB = A'CB \text{ și } AMB = A'MB.^1$$

[1] Prin ACB, $A'CB$ etc. se înțelege lungimea liniei respective.

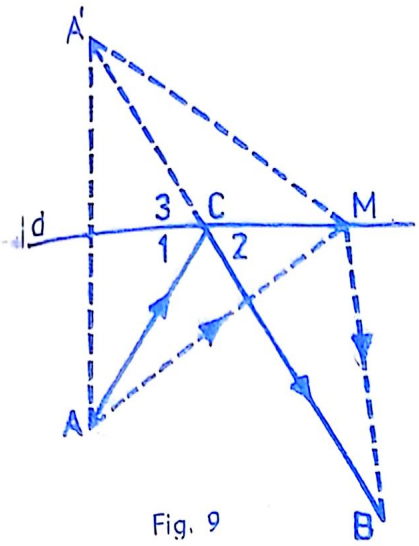


Fig. 9

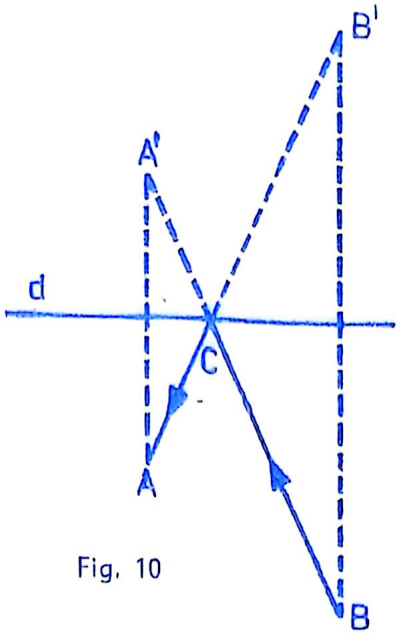


Fig. 10

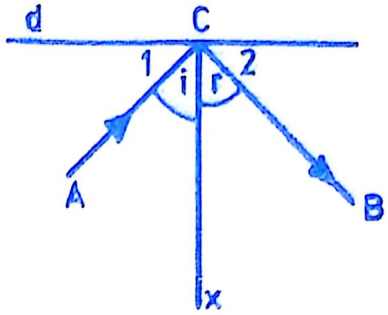


Fig. 11

$A'CB$ este un segment de dreaptă și $A'MB$ este o linie frîntă care are aceleași extremități, deci $A'CB < A'MB$, deci $ACB < AMB$.

Observări. 1) Subliniem faptul că pentru a rezolva problema am folosit simetria față de o axă. Prin această transformare se rezolvă și alte probleme de minim (v. probl. 14.1.10 — 14.1.12).

2) Punem problema următoare: Barca trebuie să plece din B, să atingă malul într-un punct oarecare M și apoi să meargă pînă la A. Care este acum drumul minim? Lungimea liniei frînte AMB nu depinde de sensul în care o parcurgem, $AMB = BMA$. Rezultă că punctul căutat C este același cu cel găsit mai înainte. Dar acum acest punct se găsește astfel (fig. 10): Fie B' simetricul punctului B față de dreapta d. $AB' \cap d = C$. Cele două puncte C trebuind să coincidă, rezultă că dreptele AB', $A'B$ și d sînt concurente. Am dedus astfel, prin considerații de minim, un adevăr geometric, și anume: Într-un trapez isoscel, diagonalele și mediatoarea bazelor sînt concurente.

3) Una din legile reflexiei luminii spune că, dacă dreapta d (fig. 11) reprezintă o oglindă, $Cx \perp d$, AC este o rază incidentă și CB este raza reflectată, $\hat{i} \equiv \hat{r}$ (unghiul de incidență este „egal" cu unghiul de reflexie). Atunci și complementele acestor unghiuri sînt congruente, $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Revenind la figura 9, $\hat{1} \equiv \hat{3}$ datorită simetriei și $\hat{3} \equiv \hat{2}$ (op. la vîrf), deci $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Aceasta înseamnă că, dacă dreapta d reprezintă o oglindă și AC o rază de lumină care pleacă din A, raza reflectată este tocmai CB. Dar linia frîntă ACB reprezintă drumul cel mai scurt de la A la B care atinge dreapta D. Rezultă că, dintre toate razele de lumină care pleacă din punctul A, în punctul B ajunge acea rază pentru care drumul total ACB este cel mai scurt (v. probl. 15.3.9).

14.1.10 (fig. 12). Considerăm întîi cazul cînd punctele A și B sînt luate la întîmplare. Fie N și P simetricele punctului M în raport cu dreptele Ox și Oy. Atunci $MA \equiv AN$, $MB \equiv BP$ și $AB \equiv AB$, deci perimetrul triunghiului MAB este egal cu lungimea liniei frînte $NABP$. Or, capetele acestei linii, N și P, nu depind de punctele A și B, ci numai de punctul M. (Dacă

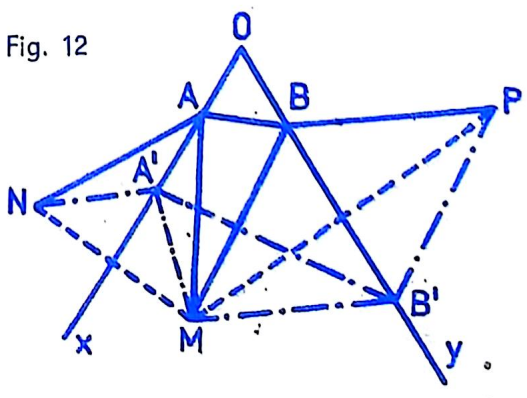


Fig. 12

în locul punctelor A și B luăm punctele A' și B', se formează triunghiul $MA'B'$ și perimetrul acestui triunghi este egal cu lungimea liniei frînte $NA'B'P$, care are aceleași capete cu prima.) Perimetrul triunghiului MAB va fi minim cînd linia $NABP$, care unește punctele N și P, va fi minimă și acest lucru se întîmplă cînd punctele N, A, B și P sînt în linie dreaptă. Construcție (fig. 13): Se determină simetricele punctului M față de Ox și Oy; fie N și P aceste puncte. Se unește N cu P; fie $NP \cap Ox = A$ și $NP \cap Oy = B$. Punctele A și B sînt cele căutate. Dintre toate triunghiurile care au un vîrf în M și celelalte două vîrfuri pe laturile Ox și Oy, triunghiul MAB are perimetrul cel mai mic.

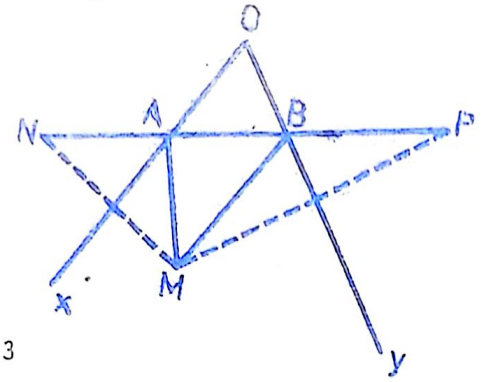


Fig. 13

Observări. 1) S-ar putea încerca soluția următoare (fig. 14). Se duce MA perpendicular pe Ox, în felul acesta latura MA va fi cît mai scurtă; apoi ducem AB perpendicular pe Oy, ca și latura AB să fie cît mai scurtă; dar BM? Din soluția problemei se vede că triunghiul MAB care se obține astfel nu este cel căutat. Ca perimetrul triunghiului să fie minim, nu este necesar ca fiecare latură în parte să fie minimă.

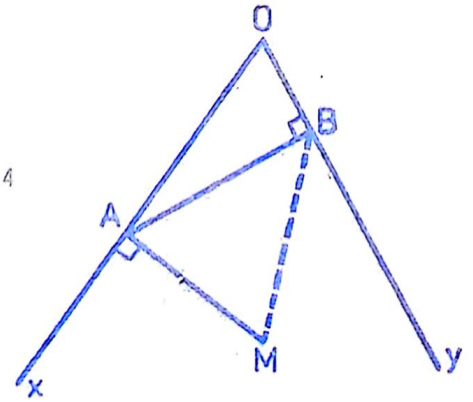


Fig. 14

În general, ca o sumă să fie minimă, nu este necesar ca fiecare termen în parte să fie minim. Se poate întîmpla ca, făcînd unul din termeni cît mai mic, ceilalți să devină prea mari, încît suma să nu fie minimă. Situația este aceeași în cazul unui maxim.

2) Această problemă se poate rezolva folosind rezultatul celei precedente. Luăm, pentru început, punctul A pe Ox după voie (fig. 15). Urmează să găsim un punct B al dreptei Oy astfel încît lungimea liniei frînte ABM să fie minimă. Pentru aceasta, determinăm simetricul P al punctului M față de Oy; $AP \cap Oy$ este punctul căutat B și triunghiul de perimetru minim este ABM. Atunci $BM \equiv BP$, deci $AB + BM = AP$, deci perimetrul triunghiului este

$$MA + AP.$$

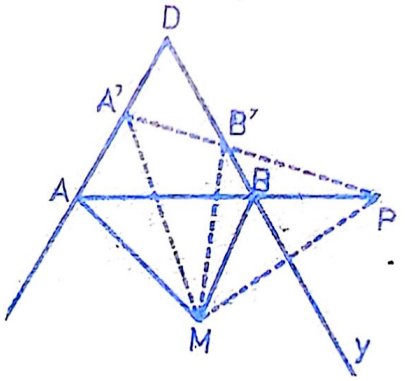


Fig. 15

Dacă în locul punctului A luăm pe Ox în alt punct, A', obținem prin aceeași construcție un alt triunghi de perimetru minim, $MA'B'$, care are perimetrul

$$MA' + A'P.$$

Dacă luăm pe Ox încă un punct, A'', obținem un triunghi de perimetru minim $MA''B''$, care are perimetrul

$$MA'' + A''P$$

ș.a.m.d. Urmează ca din toate triunghiurile acestea minime să determinăm pe cel mai mic. Or, în toate construcțiile acestea, punctele M și P sînt aceleași, deci problema se pune astfel: Se dau dreapta Ox și punctele M și P. Să se determine un punct A al dreptei Ox astfel încît suma $MA + AP$ să fie

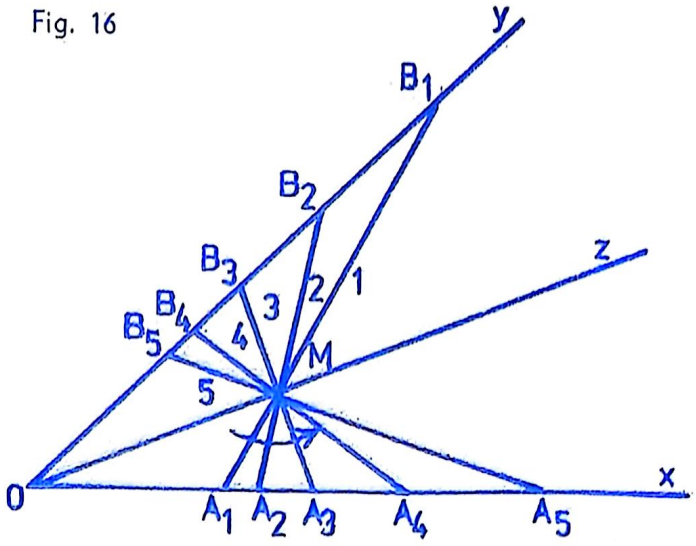
minimă. Pentru aceasta, determinăm simetricul N al punctului M față de Ox. Intersecția dreptei NP cu Ox este punctul căutat A. S-a ajuns tocmai la soluția de mai sus (v. probl. 15.3.9 problema biliardului).

3) Am rezolvat problema în două etape. Întîi am luat punctul A la întîmplare și am găsit triunghiul de perimetru minim corespunzător acestui punct, apoi am determinat puntul A astfel încît triunghiul minim care-i corespunde să aibă perimetrul minim. Acest procedeu se folosește și în problemele 14.1.15 și 14.2.7.

14.1.11. a) Fie xOy un unghi (fig. 16), Oz bisectoarea lui, M un punct al ei și A_1B_1 o dreaptă care trece prin M. Ea determină linia frîntă A_1OB_1. Figura arată cum variază lungimea acestei linii cînd dreapta se rotește în jurul punctului M în sensul indicat de săgeată. Cînd dreapta ocupă poziția 1, OA crește și OB scade. Se vede că $A_1A_2 < B_1B_2$, deci segmentul care se adaugă este mai mic decît cel care se scade, lungimea liniei frînte AOB scade pînă se ajunge în poziția 3, cînd $OA_3 \equiv OB_3$. De acum înainte lucrurile se inversează, $A_3A_4 > B_3B_4$, OA crește cu mai mult decît scade OB, deci lungimea liniei frînte AOB crește. Se pare că lungimea AOB este minimă cînd $AB \perp Oz$.

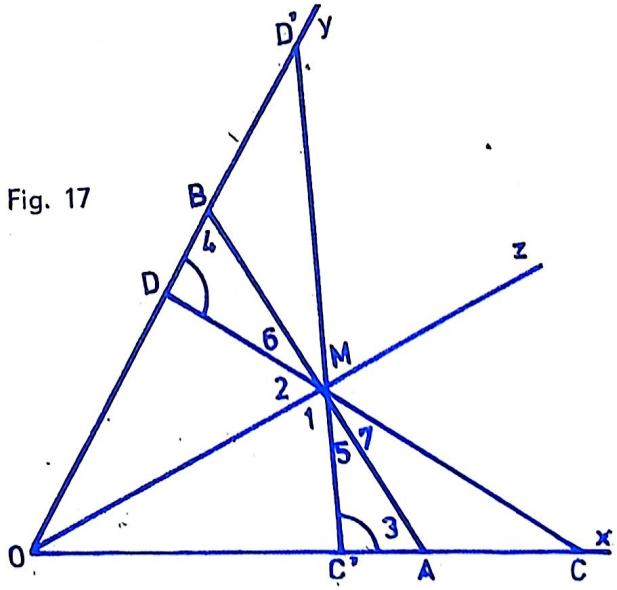
Fie deci (fig. 17) $AB \perp Oz$ și CD o dreaptă oarecare dusă prin punctul M. Trebuie să demonstrăm că linia frîntă AOB este mai scurtă decît COD. Prin trecerea de la prima dintre aceste linii la cea de a doua, se adaugă segmentul AC și se scade BD, deci trebuie să comparăm aceste segmente. Ca să găsim o relație între ele, ducem dreapta $C'D'$ simetrică cu CD față de Oz, adică ducem $C'D'$ astfel încît unghiul 1 să fie congruent cu 2. Obținem o figură simetrică față de Oz, $\triangle MDB \equiv \triangle MC'A$, în special $\hat{5} \equiv \hat{6}$, $DB \equiv C'A$ și urmează să comparăm $C'A$ cu AC. Triunghiul $MC'C$ ne dă soluția problemei. Am văzut că $\hat{5} \equiv \hat{6}$; $\hat{6} \equiv \hat{7}$

Fig. 16



(op. la vîrf), deci $\hat{5} \equiv \hat{7}$, MA este o bisectoare a triunghiului $MC'C$ și urmează să comparăm segmentele AC' și AC în care împarte baza $C'C$. Teorema bisectoarei (v. probl. 10.4.3) spune că aceste segmente sînt proporționale cu laturile MC' și MC, deci urmează să comparăm aceste laturi; vom compara unghiurile C' și C. Unghiul C este un unghi al triunghiului OCD și D este un unghi exterior al aceluiași triunghi, deci $\hat{D} > \hat{C}$. Pe de altă parte $\hat{D} \equiv \hat{C}'$ (din triunghiurile congruente $MC'A$ și MDB), deci $\hat{C}' > \hat{C}$, $\hat{C} < \hat{C}'$. Problema este rezolvată. În adevăr, din $\hat{C} < \hat{C}'$ rezultă că $MC' < MC$, de aici rezultă că $AC' < AC$, deci $DB < AC$, segmentul care se scade este mai mic decît cel

Fig. 17



care se adaugă, deci lungimea $AOB <$ < lungimea COD. Lungimea AOB este mai mică decît lungimea oricărei alte linii frînte determinată de o dreaptă care trece prin M; AOB reprezintă un minim. Ea se obține ducînd prin M perpendiculara pe bisectoarea Oz.

b) Prin trecerea de la AB la CD, triunghiul AOB devine COD, se adaugă triunghiul MAC și se scade triunghiul MBD, care este congruent cu $MC'A$, deci trebuie să comparăm ariile triunghiurilor $MC'A$ și MAC. Aceste triunghiuri au aceeași înălțime și $AC' < AC$, deci aria $MC'A <$ aria MAC. Rezultă că aria $MDB <$ aria MAC. Triunghiul AOB are aria minimă, el se obține ducînd prin M perpendiculara pe Oz.

Observări. 1) Problema se poate rezolva și fără a folosi teorema bisectoarei. Fie (fig. 18) ABC un triunghi în care $AB < AC$ și AD bisectoarea unghiului A. Trebuie să comparăm DB cu DC. Purtăm pe AC un segment AE congruent cu AB. Atunci $\triangle ADE \equiv \triangle ADB$ (LUL), deci $\hat{1} \equiv \hat{B}$, $DE \equiv DB$ și $\hat{2} \equiv \hat{3}$. Acum, $\hat{4} > \hat{2}$ căci $\hat{4}$ este un unghi exterior al triunghiului ADE, $\hat{2} \equiv \hat{3}$ și $\hat{3} > \hat{C}$, căci $\hat{3}$ este un unghi exterior al triunghiului ADC. Așadar, avem lanțul $\hat{4} > \hat{2} \equiv \hat{3} > \hat{C}$, deci $\hat{4} > \hat{C}$, deci $DC > DE$, deci $DC > DB$. De partea laturii mai mari AC, se găsește partea mai mare a bazei BC.

2) Ideea care a dus la rezolvarea problemei a fost de a duce dreapta $C'D'$ simetrică cu CD față de Oz, de aceea am dedus celelalte relații tot din faptul că Oz este o axă de simetrie a figurii, dar ele se pot obține și fără a folosi această transformare.

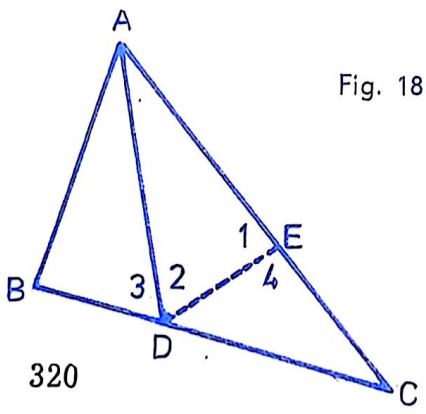


Fig. 18

$\triangle MOA \equiv \triangle MOB$ (ULU), căci MO este latură comună, unghiurile din O sînt congruente, căci OM este bisectoare și $\widehat{OMA} = \widehat{OMB} = 90°$. Rezultă că $MA \equiv MB$ și $\hat{3} \equiv \hat{4}$. Apoi $\triangle MC'A \equiv \triangle MDB$ (ULU), căci $MA \equiv$ $\equiv MB$, $\hat{3} \equiv \hat{4}$ și $\hat{5} \equiv \hat{6}$, aceste unghiuri fiind complementele unghiurilor 1 și 2. Rezultă că $AC' \equiv DB$ etc.

Această cale este mai lungă și greoaie, căci, din multitudinea de triunghiuri congruente care există în figură, trebuie alese cele utile. Avem aici încă un exemplu care arată că, folosind transformările geometrice, se obțin soluții mai ușoare și mai frumoase decît prin metoda triunghiurilor congruente (v. observarea de la probl. 6.9.5 și 7.19).

14.1.12 (fig. 16). Fie $d \cap Ox = A$ și $d \cap Oy = B$. Desenul arată că, dacă dreapta d se rotește în jurul punctului M, ocupînd pe rînd pozițiile 1, 2, 3 ș.a.m.d., segmentul AB scade, apoi începe să crească și ia din nou aceleași valori. Se pare că segmentul AB este minim cînd $d \perp Oz$.

Fie deci $AB \perp Oz$ (fig. 17) și CD o poziție oarecare a dreptei d. Trebuie să demonstrăm că $AB < CD$. Ducem simetrica dreptei CD față de Oz; fie C' și D' intersecțiile ei cu Ox și Oy. Judecînd ca la problema precedentă se vede că MA este bisectoarea unghiului CMC'. Urmează să comparăm bisectoarea unui triunghi cu suma laturilor care pleacă din același vîrf. Fie ABC un triunghi (fig. 19) în care $AB < AC$ și AD o bisectoare. Ducem și mediana AE. Teorema bisectoarei (v. probl. 10.4.3) spune că segmentele DB și DC sînt proporționale cu AB și AC. Cum $AB < AC$, rezultă că $BD < DC$, deci

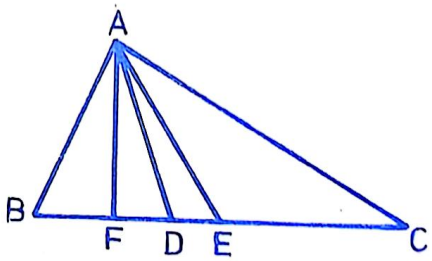


Fig. 19

$BD <$ jumătate din BC, adică $BD < BE$. Fie AF înălțimea triunghiului. Admitem pe baza figurii că $FD < FE$ (v. observarea de la problema 15.2.9). AF este perpendiculara, AD și AE sînt două oblice duse din punctul A pe dreapta AB și $FD < FE$. Rezultă că $AD < AE$, adică bisectoarea este mai mică decît mediana. Pe de altă parte, mediana este mai mică decît media laturilor care pleacă din același vîrf (v. probl. 4.4.2), deci

$$AD < \frac{AB + AC}{2}.$$

Revenind la problema noastră, rezultă că

$$MA < \frac{MC + MC'}{2};$$

$$2MA < MC + MC'.$$

Înlocuind aici $2MA$ cu AB și MC' cu MD, se obține...

Aplicație. Fie $x'x$ și $y'y$ (fig. 20) două maluri ale canalului. Presupunem că vaporul merge de la dreapta spre stînga (în sensul indicat de săgeată) și trebuie să cotească spre dreapta. Cînd ajunge la intersecție, ca să aibă cît mai mult loc, el se va plasa astfel încît să treacă prin punctul M. Ca vaporul să poată trece, maximul lungimii sale trebuie să fie mai mic decît minimul segmentului AB.

Deoarece canalele au aceeași lățime, intersecția lor este un pătrat, deci OM este bisectoarea unghiului xOy. Vaporul va putea trece dacă lungimea sa este cel mult egală cu minimul segmentului AB. S-a demonstrat că acest segment este minim cînd $AB \perp OM$. Atunci triunghiul AOB este dreptunghic și isoscel. Dacă $ON = NM = a$, $OM = a\sqrt{2}$, $MB = OM$, $AB = 2MB = 2a\sqrt{2}$. Așadar, lungimea maximă a vaporului este $2a\sqrt{2} = 2{,}8\,a$.

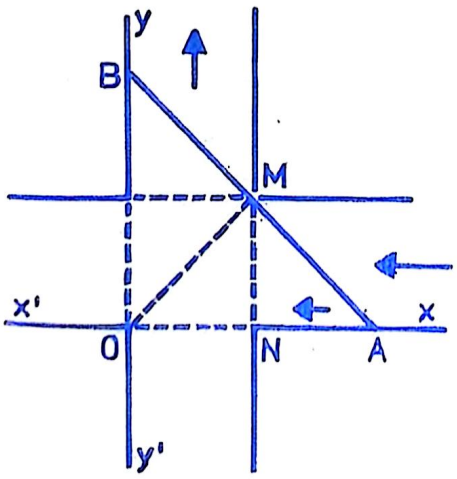


Fig. 20

14.1.13 (fig. 21). Ce fel de patrulater este $ADME$? Diagonalele unui dreptunghi fiind congruente, $DE \equiv AM$, deci segmentul DE este minim cînd AM este minim, adică atunci cînd $AM \perp BC$. Punctul M trebuie să fie piciorul înălțimii.

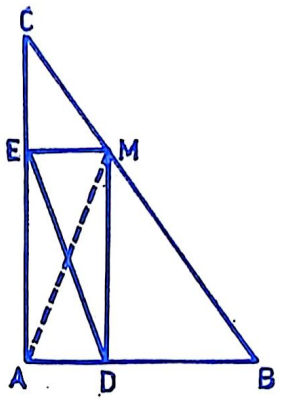


Fig. 21

14.1.14. Baza AB (fig. 22) fiind constantă, aria triunghiului AMB este maximă cînd înălțimea sa, ME, este maximă. Ducem diametrul CD perpendicular pe AB. Figura arată că înălțimea este maximă cînd punctul M coincide cu punctul C. Acest lucru trebuie demonstrat, adică trebuie demonstrat că $CF > ME$.

Ducem OG perpendicular pe ME. Atunci

(1) $\qquad OF \equiv GE.$

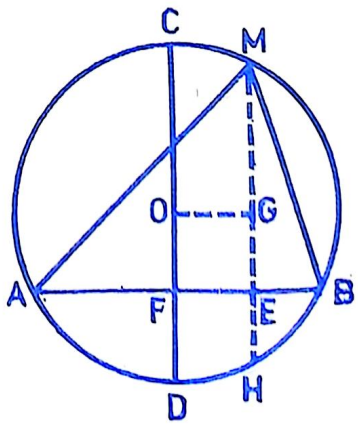


Fig. 22

Apoi $OC = \frac{CD}{2}$ și $GM \quad \frac{MH}{2}$.

CD este un diametru și MH este o coardă oarecare. Se știe că diametrul este mai mare decît orice coardă care nu este diametru, deci $CD > MH$, deci

$$(2) \qquad OC > GM.$$

Din (1) și (2) rezultă că $OF + OC > GE + GM$, adică $CF > ME$.

Rezultă că aria triunghiului MAB este maximă cînd punctul M coincide cu C (fig. 23). Deoarece arc $CA \equiv$ $\equiv$ arc CB, $CA \equiv CB$, deci triunghiul CAB este isoscel. Rezultatul se poate enunța scurt astfel: *Din toate triunghiurile înscrise în același cerc care au aceeași bază, triunghiul isoscel are aria maximă.* (Bineînțeles, este vorba de triunghiul CAB, nu DAB).

În cazul particular cînd AB este un diametru, unghiul M este drept și, cînd punctul M descrie semicercul AMB, se obțin toate triunghiurile dreptunghice care au ipotenuza AB. Deci: *Din toate triunghiurile care au aceeași ipotenuză, triunghiul isoscel are aria cea mai mare.*

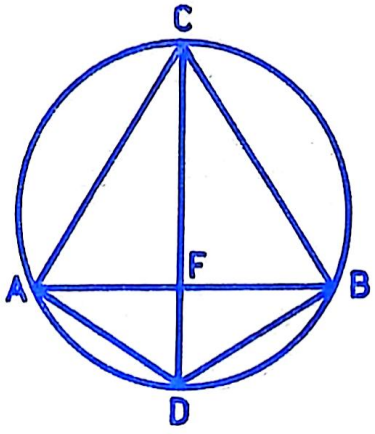


Fig. 23

Altă soluție. Acest rezultat se poate demonstra și astfel. Fie x și y catetele și a ipotenuza unui triunghi. Pornim de la relația $(x - y)^2 \geqslant 0$ și deducem pe rînd

$$x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0, \quad x^2 + y^2 \geqslant 2xy,$$

$$xy \leqslant \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

Înlocuind $x^2 + y^2$ cu a^2, se obține

$$xy \leqslant \frac{a^2}{2}; \quad \frac{xy}{2} \leqslant \frac{a^2}{4}$$

$\frac{xy}{2}$ este aria triunghiului, deci aria triunghiului este cel mult egală cu $\frac{a^2}{4}$.

În relația $(x - y)^2 \geqslant 0$, are loc egalitatea cînd $x = y$, deci tot atunci are loc egalitatea în ultima relație, deci aria triunghiului este maximă cînd $x = y$.

Această demonstrație se poate ilustra astfel.

Considerăm două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele congruente. Decupăm din hîrtie cîte patru triunghiuri congruente cu fiecare, desenăm pătratele care au ca latură ipotenuzele lor și așezăm triunghiurile așa cum arată figura 24. Cîtă vreme triunghiurile nu sînt isoscele, unghiurile lor sînt diferite de 45° (fig. 24-*a*), ele nu acoperă tot pătratul; rămîne o parte (hașurată) neacoperită. Și această parte este cu atît mai mică cu cît unghiurile triunghiurilor sînt mai apropiate de 45°, cu cît catetele lor cad mai aproape de diagonala pătratului (fig. 24-*b*). Numai cînd unghiurile triunghiurilor au cîte 45°, se acoperă tot pătratul (fig. 24-*c*), niciodată ele nu vor acoperi mai mult decît pătratul, căci suma unghiurilor de la vîrfurile lor nu trece de 360°. Rezultă că triunghiurile au aria maximă cînd sînt isoscele.

Observare. Problema de a afla triunghiul dreptunghic de arie maximă cînd ipotenuza este dată se poate pune și sub forma următoare.

Capetele unui segment AB de lungime constantă alunecă pe laturile unui unghi drept xOy. Ce poziție trebuie să ocupe segmentul ca aria triunghiului AOB să fie maximă?

Atunci problema se poate rezolva astfel (fig. 25). Se ia ca bază ipotenuza AB. Cînd triunghiul este isoscel, $OA \equiv$ $\equiv OB$, înălțimea sa OD este și mediană, deci $OD = \frac{AB}{2}$ (v. probl. 5.3.17). Cînd

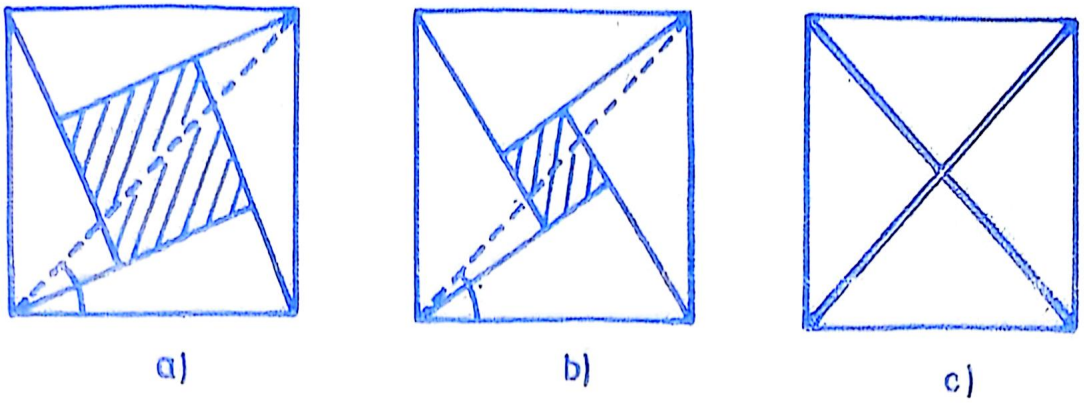


Fig. 24

segmentul ocupă o altă poziție, de exemplu MN, mediana $OQ = \frac{AB}{2}$ și înălțimea $OP < OQ$, căci $OP \perp MN$ și OQ este oblic față de MN. Rezultă că aria $OMN. <$ aria OAB. Deci aria triunghiului este maximă cînd $OA \equiv OB$.

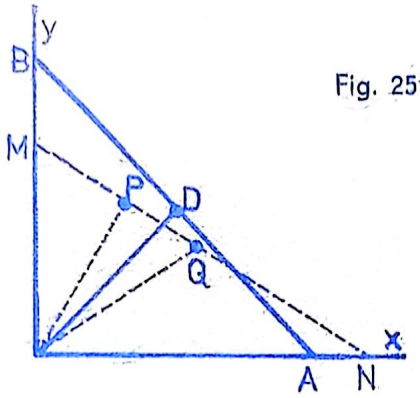


Fig. 25

14.1.15. Pentru a înscrie într-un cerc un patrulater, ducem mai întîi o coardă oarecare AB (fig. 26) care să fie o diagonală a patrulaterului. Atunci patrulaterul de arie maximă înscris în cerc este $CADB$, căci atunci triunghiurile CAB și DAB au aria maximă. Aria lui este

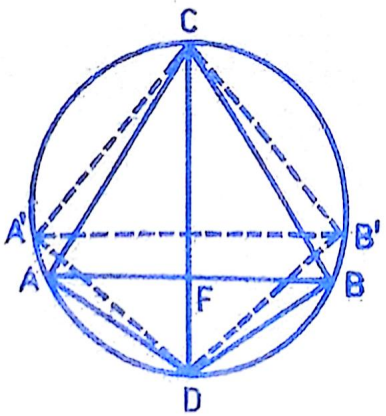


Fig. 26

$$\frac{AB \cdot CF}{2} + \frac{AB \cdot DF}{2} = \frac{AB(CF + DF)}{2} =$$

$$= \frac{AB \cdot CD}{2} = AB \cdot r$$

unde r este raza cercului. Dacă pornim de la o altă coardă, $A'B'$, obținem pe aceeași cale un patrulater de arie maximă, cu aria $A'B' \cdot r$. Aria patrulaterului înscris va fi maximă cînd vom porni de la o coardă AB cît mai mare, adică atunci cînd AB este un diametru. Atunci $ABCD$ este un pătrat. Așadar, patrulaterul de arie maximă înscris într-un cerc este pătratul.

Aplicație: Baza bîrnei trebuie să fie un pătrat (fig. 27).

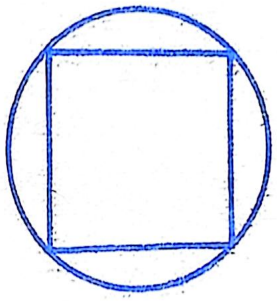


Fig. 27

Observare. S-ar părea că acest raționament conține tocmai greșeala semnalată în observarea 1 de la problema 14.1.10. Acolo am arătat că, pentru ca o sumă să fie maximă, nu este necesar ca fiecare din termenii ei să fie maxim. Totuși, aici am spus că aria patrulaterului $CADB$ este maximă cînd ariile triunghiurilor CAB și DAB sînt maxime. De data aceasta, raționamentul este corect deoarece ariile triunghiurilor nu depind una de cealaltă: alegerea punctului C nu are nici o influență asupra punctului D.

14.1.16. *Soluția I.* Dreptunghiurile din figura 28 au același perimetru. Se vede că, dacă baza dreptunghiului este mare în comparație cu înălțimea sau invers, aria sa este mică. Se pare că aria dreptunghiului este maximă cînd laturile sale sînt congruente, adică dreptunghiul este pătrat.

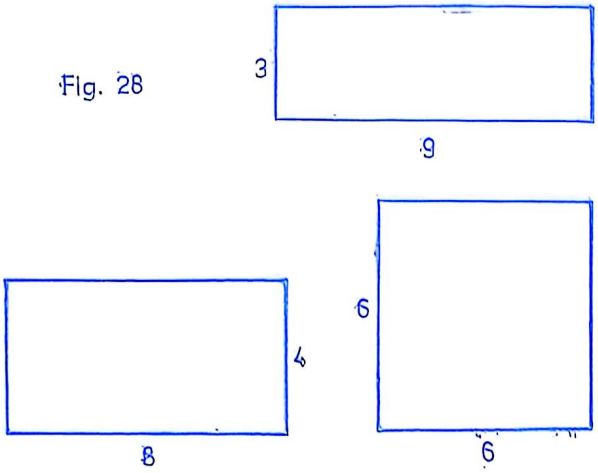


Fig. 28

Fie p perimetrul dat. Dacă laturile dreptunghiului sînt x și y, $2x + 2y = p$, deci $x + y = \frac{p}{2}$. Aria dreptunghiului este xy. Trebuie să determinăm x și y astfel încît xy să fie maxim sau, ceea ce este același lucru, astfel încît $\sqrt{xy}$, adică media proporțională a numerelor x și y să fie maximă. Se știe (v. probl. 9.1.6) că media proporțională a două numere este cel mult egală cu media lor aritmetică,

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2}$$

și egalitatea are loc cînd $x = y$. În cazul de față x și y sînt legați prin relația $x + y = \frac{p}{2}$. Înlocuind aici $x + y$ prin $\frac{p}{2}$, rezultă că $\sqrt{xy} \leqslant \frac{p}{4}$ și $\sqrt{xy}$ este maxim cînd $x = y$, adică atunci cînd dreptunghiul este pătrat.

Soluția II. Trebuie să demonstrăm că, dacă un pătrat și un dreptunghi au același perimetru, pătratul are aria mai mare. Fie deci $ABCD$ un pătrat (fig. 29) și $AEFG$ un dreptunghi care are același perimetru ca el. Pentru a construi dreptunghiul, am mărit baza cu segmentul BE; ca perimetrul să nu se schimbe, am micșorat înălțimea cu un segment DG congruent cu el, $DG \equiv BE$. Să comparăm ariile. Pătratul și dreptunghiul au o parte comună (hașurată). Pătratul are în plus partea 1 și dreptunghiul partea 2. Dreptunghiurile 1 și 2 au cîte o latură congruentă, $GD \equiv BE$; cît despre celelalte laturi, DC este latura pătratului și EF este mai mic decît latura pătratului, deci $DC > EF$. Rezultă că aria 1 > aria 2, deci...

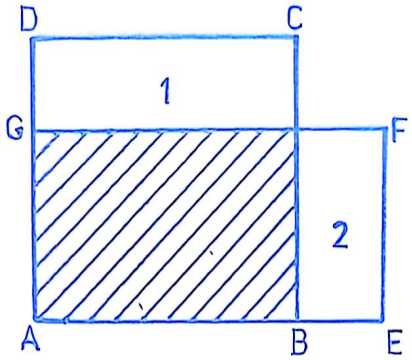


Fig. 29

Soluția III. Demonstrația este foarte scurtă dacă se folosește calculul algebric. Fie a lungimea unui segment. Dacă împărțim segmentul în două părți congruente, lungimea fiecărei părți este $\frac{a}{2}$, deci produsul este

$$(1) \qquad P_1 = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}.$$

Dacă-l împărțim în părți necongruente, una va fi mai mare decît $\frac{a}{2}$, iar cealaltă mai mică; dacă lungimea uneia este $\frac{a}{2} + x$, lungimea celeilalte este $\frac{a}{2} - x$, deci produsul este

$$(2) \quad P_2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)\left(\frac{a}{2} - x\right) = \frac{a^2}{4} - x^2.$$

Din (1) și (2) rezultă că

$$P_2 = P_1 - x^2$$

deci $P_2 < P_1$.

Observație. Rezolvînd această problemă, am demonstrat o propoziție independentă de semnificația geometrică a numerelor a, x și y, și anume: Dacă suma a două numere pozitive este constantă, produsul lor este maxim cînd ele sînt egale.

14.1.17. a) Diametrul care trece prin punctul M. b) Fie AB o coardă oarecare dusă prin punctul M (fig. 30) și $OP = x$ distanța ei de la centrul cercului. $AP = PB = \frac{AB}{2}$, deci coarda AB va fi minimă cînd PB va fi minim. Triunghiul OPB dă $PB^2 = R^2 - x^2$, R fiind raza cercului. PB sau PB^2 va fi minim, cînd x^2 sau x va fi maxim (cînd din R^2 se scade cît mai mult). Cîtă vreme AB este o coardă oarecare $x < OM$, căci OP și OM sînt perpendiculara și o oblică duse din O pe AB. Distanța de la centru la coardă este maximă cînd OP coincide cu OM. Aceasta are loc cînd coarda este EF, perpendiculară pe diametrul care trece prin M (v. probl. 9.2.21).

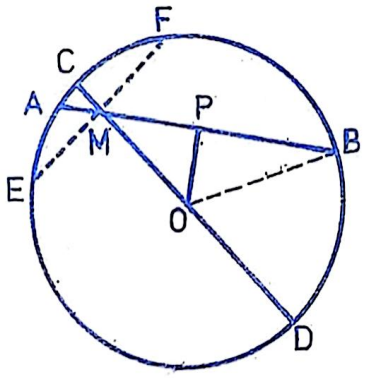


Fig. 30

14.1.18 (fig. 31). Presupunem că punctul M este mai aproape de By, adică, NP fiind perpendicular pe Ax, $MP < MN$.

Ducem prin punctul fix M două drepte, CD și EF. Se formează trapezele $ACDB$ și $AEFB$. Trebuie să comparăm ariile lor. Cînd se trece de la primul dintre aceste trapeze la al doilea, se scade triunghiul MDF și se adaugă triunghiul MCE. Pentru a compara ariile lor (figura arată că prima este mai mică) comparăm bazele și înălțimilor lor. $\triangle MDF \sim \triangle MCE$, deci

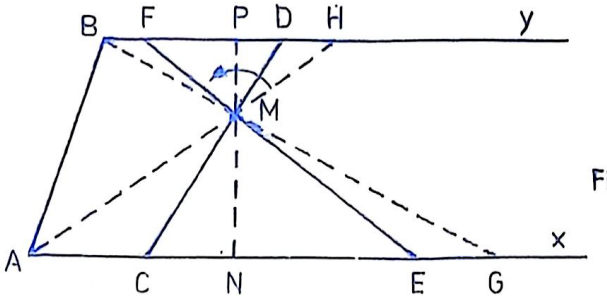


Fig. 31

raportul dintre bazele lor este egal cu raportul dintre înălțimile lor, $\frac{FD}{EC} = \frac{MP}{MN}$ (v. probl. 8.4.20). Prin ipoteză, ultimul raport este mai mic decît 1, căci $MP < MN$, deci $\frac{FD}{EC} < 1$, $FD < EC$. Triunghiul MDF avînd baza și înălțimea mai mici decît triunghiul MCE, are o arie mai mică. Rezultă că aria care se scade este mai mică decît cea care se adaugă, deci aria $AEFB <$ aria $ACDB$. Aceasta înseamnă că dacă dreapta CD se rotește în jurul punctului M în sensul indicat de săgeată, astfel ca intersecția ei cu By să se apropie de punctul B, aria trapezului crește. a) Această arie este maximă, cînd punctul F coincide cu B, deci se obține triunghiul ABG. b) Din cele de mai sus rezultă că dacă dreapta se rotește în sensul invers celui indicat de săgeată, adică astfel încît punctul C să se apropie de A, aria scade. Ea este minimă cînd punctul C coincide cu A. Atunci trapezul devine triunghiul ABH. c) Dacă $MN \equiv MP$, $\triangle MDF \equiv \triangle MCE$ (ULU), triunghiul care se scade și cel care se adaugă au aceeași arie, deci aria trapezului rămîne constantă, nu există nici maxim nici minim.

Observare. Trapezele avînd aceeași înălțime, aria lor atinge valorile extreme în același timp cu suma bazelor. Rezultă că suma $AC + BD$ este maximă ($= BG$) cînd $D = B$ și minimă ($= AH$) cînd $C = A$.

14.2.1. a) Fie AEF drumul căutat (fig. 32). Cînd desfășurăm piramida, segmentele AE și EF nu se deformează, deci drumul minim de la A la

VC devine drumul minim pe desfășurare de la A la VC, el este perpendiculara dusă din A pe VC (fig. 33). Triunghiul VAF dă: $\widehat{VAF} = 60°$, $AF = \frac{m}{2}$. Musca trebuie să pornească din punctul A astfel încît drumul ei să formeze cu AV un unghi de 60° și cînd ajunge la muchia VB să-și continue drumul pe perpendiculara dusă din E pe VC. b) Acum drumul este AG, $AG \perp VD$ (fig. 33). Drumul minim este determinat de unghiurile $\widehat{VAH} = 45°$, $\widehat{VHK} = 60°$ și $\widehat{VKG} = 75°$. Lungimea sa este $AG = VA \sin 45° = \frac{m\sqrt{2}}{2}$. c) Drumul minim este AA'. $\widehat{AVA'} = 4 \cdot 15° = 60°$, deci triunghiul VAA' este echilateral, $\widehat{VAA'} = 60°$, $AA' = m$. Drumul minim face cu VB un unghi de 75°, cu VC un unghi de 90° și cu VD un unghi de 75°. Se constată că $\widehat{VAF} = \widehat{VAA'} = 60°$, deci dreapta AF coincide cu AA'. (Este remarcabil faptul că drumul cel mai scurt nu este conturul $ABCD$; este mai avantajos să urce pînă cînd ajunge la muchia VC și apoi să coboare pînă în A.) d) Este adevărat că AM este drumul cel mai scurt de la punctul A la muchia VB și MN este drumul cel mai scurt de la punctul M la muchia VC, dar de aici nu rezultă că AMN este drumul cel mai scurt de la A la muchia VC (v. observarea 1 de la probl. 14.1.10).

Fig. 32

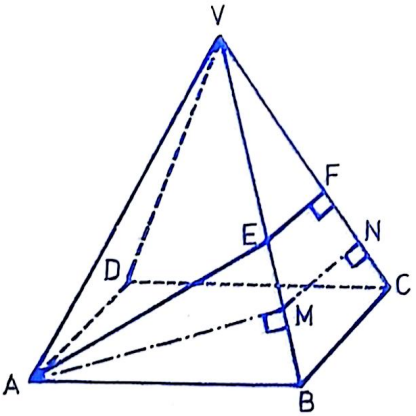
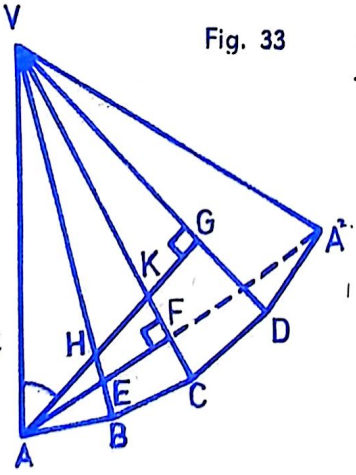


Fig. 33



14.2.2. Fie $ADD'A'$ (fig. 34) o parte din desfășurarea paralelipipedului.
a) Pe desfășurare, drumul cel mai scurt de la punctul A la dreapta CC' este perpendiculara AC, deci pe prismă drumul minim este linia frîntă ABC.
b) $\operatorname{tg} u = \frac{c}{a+b}$, $AC' = \sqrt{(a+b)^2+c^2}$.
c) Drumul este AED, $E \in VB$, $D \in VC$, $\widehat{VAE} = 30°$, $\hat{D} = 90°$, lungimea $= \frac{m\sqrt{3}}{2}$.

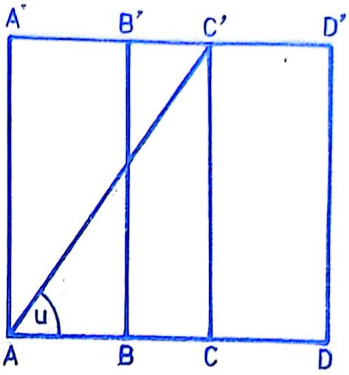


Fig. 34

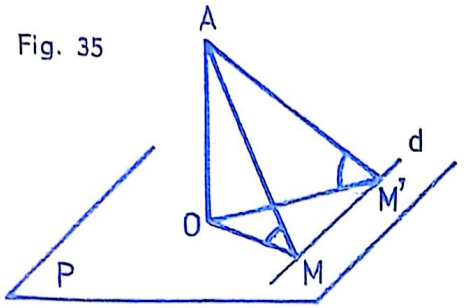
d) Drumul este $AFGA$, $F \in VB$, $G \in VC$, $\widehat{VAF} = 45°$, $\widehat{VFG} = 75°$, lungimea $= m\sqrt{2}$.

14.2.3. a) Fețele laterale fiind congruente, trebuie ca fiecare din ele să aibă aria maximă. Fie VAB una din ele. Lungimile laturilor VA și VB fiind fixe, aria triunghiului VAB este maximă cînd $VB \perp VA$ (v. probl. 14.1.7). Atunci $b = a\sqrt{2}$.

14.2.4. a) Se obține și acum condiția $VA \perp VB$, adică $\widehat{AVB} = 90°$. Dar acest unghi trebuie să aibă mai puțin decît 90° (v. probl. 12.2.90), deci nu există maxim. Unghiul AVB trebuie să fie ascuțit și cu cît acest unghi este mai mare, cu atît aria laterală este mai mare.

14.2.5 (fig. 35). Considerăm triunghiul OAM. Cînd punctul M se mișcă pe dreapta d, cateta OA rămîne fixă, dar cateta OM și unghiul M variază. Figura 36 reprezintă mai multe triunghiuri dreptunghice care au o catetă comună. Dacă $OM' < OM$, unghiul M'

Fig. 35



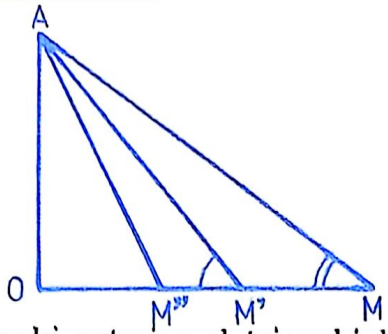


Fig. 36

este un unghi exterior al triunghiului AMM', deci unghiul $M' >$ unghiul M; tot așa, unghiul $M'' >$ unghiul M'; ș.a.m.d. Cînd cateta OM scade, unghiul M crește. Revenind la figura 35, unghiul M este maxim cînd OM este minim, adică atunci cînd $OM \perp d$. Altfel: $\operatorname{tg} AMO = \dfrac{OA}{OM}$. În acest raport, OA este constant, deci raportul este maxim cînd OM este minim, adică $OM \perp d$.

14.2.6 (fig. 37). Fie $B'C'$ proiecția laturii BC pe planul P, $\widehat{BAB'} = u$ și $\widehat{CAC'} = v$. Se cer maximele unghiurilor u și v. Vom compara unghiul u cu unghiul B. Ducem înălțimea AD; fie D' proiecția punctului D pe planul P. DD' și DA sînt perpendiculara și o oblică duse din punctul D pe planul P, deci $DD' < DA$. Pe de altă parte $DD' \equiv BB'$, deci $BB' < DA$. Triunghiurile BAB' și ABD dau:

$$\sin u = \frac{BB'}{AB}, \quad \sin B = \frac{DA}{AB}.$$

Deoarece $BB' < DA$, $\sin u < \sin B$, deci $\hat{u} < \hat{B}$. Aceasta cîtă vreme planul triunghiului este înclinat pe planul P. Cînd triunghiul ABC se rotește în jurul dreptei d, dreapta BC rămîne paralelă cu d și cînd planele sînt perpendiculare, apare situația din figura 38: $\hat{u} \equiv \hat{B}$ (alt. int.). Rezultă că $\hat{u} \leqslant \hat{B}$, maximul lui u este B. La fel se arată că maximul lui v este C. În cazul triunghiului echilateral, $u \equiv v$ și maximul este de 60°.

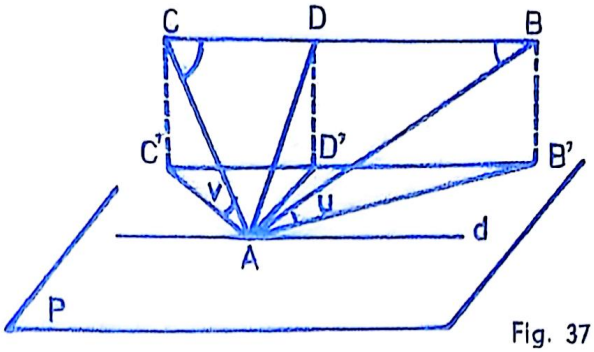


Fig. 37

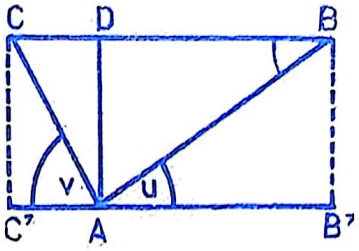


Fig. 38

Observare. Folosirea funcțiilor trigonometrice se poate evita. Considerăm două coarde AM și AN ale aceluiași semicerc (fig. 39). Dacă $AM < AN$, $\widehat{ABM} < \widehat{ABN}$, căci unghiurile sînt înscrise și $\widehat{AM} < \widehat{AN}$. Pe de altă parte, două triunghiuri care au aceeași ipotenuză pot fi înscrise în același semicerc. Deci, cînd două triunghiuri au aceeași ipotenuză și o catetă a unuia este mai mică decît o catetă a celuilalt, unghiul opus acelei catete este mai mic. Tocmai aceasta este situația triunghiurilor ABB' și ABD din figura 37.

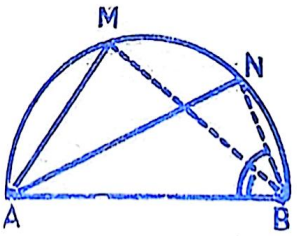
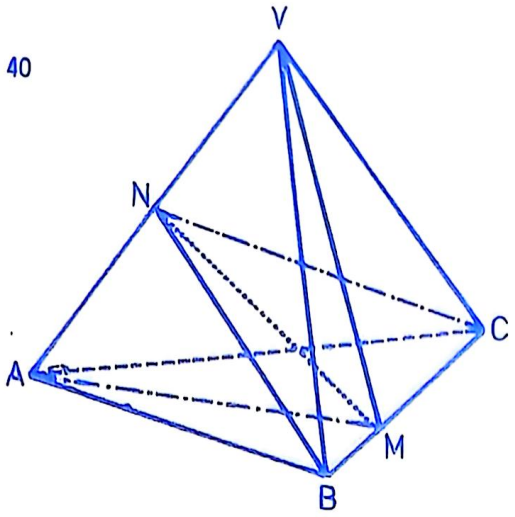


Fig. 39

14.2.7 (fig. 40). Luăm întîi un punct oarecare M al muchiei BC; atunci MN trebuie să fie perpendiculara coborîtă din M pe VA, adică o înălțime a tri-

Fig. 40



unghiului MAV. Dar acest triunghi este isoscel, $MA \equiv MV$, căci $\triangle ABM \equiv \triangle VBM$ (LUL), deci N este mijlocul laturii VA. Rezultă că, oricum am lua punctul M ($M \in BC$), distanța MN este minimă cînd N este mijlocul muchiei VA. Acum urmează să mutăm punctul M astfel ca distanța MN să fie minimă. Dar punctul N este fix, el rămîne același oricare ar fi punctul M, deci NM este minim cînd $NM \perp BC$. Triunghiul BNC fiind isoscel, M este mijlocul muchiei BC. Așadar, punctele cerute sînt mijloacele muchiilor BC și VA. Atunci MN este înălțimea triunghiului MAV în care $MA = MV = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul VMN, dă $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Observări. 1) $MN \perp BC$ și $MN \perp VA$. Dreapta MN este perpendiculara comună a dreptelor BC și VA și segmentul MN reprezintă distanța dintre aceste drepte.

2) În locul muchiilor VA și BC se puteau lua muchiile opuse VB și AC sau VC și AB; rezultatul ar fi fost același. El reprezintă distanța dintre două muchii opuse ale tetraedrului.

3) Cu privire la schema demonstrației (se ia întîi punctul M după voie și se determină punctul N, apoi se determină punctul M) v. observarea 3 de la problemele 14. 1.10 și 14.1.15.

Cap. 15

15.1.1. a) Se știe că, într-un triunghi isoscel, unghiurile de la bază sînt congruente. Considerăm un triunghi ABC în care $\hat{B} \ncong \hat{C}$ și ne întrebăm: $AB \equiv AC$? Dacă laturile AB și AC ar fi congruente, triunghiul ar fi isoscel, deci, conform teoremei amintite, unghiurile B și C ar fi congruente. Dar s-a dat că $\hat{B} \ncong \hat{C}$, deci $AB \ncong AC$.
b) Dacă diagonalele patrulaterului s-ar împărți în părți congruente, patrulaterul ar fi paralelogram și atunci unghiurile sale opuse ar fi congruente. Dar s-a dat că două unghiuri opuse ale paralelogramului nu sînt congruente, deci...

Observări. 1) În fiecare din aceste probleme s-a cerut să se demonstreze o propoziție care se obține într-un anumit fel dintr-o propoziție cunoscută și se numește *contrapusa* sau *contrar-reciproca* acelei propoziții. Pentru a explica cum se obține acea propoziție reluăm acum prima problemă:

Propoziția:		Contrapusa:
Ipoteza:	$AB \equiv AC$	$\hat{B} \ncong \hat{C}$
Concluzia:	$\hat{B} \equiv \hat{C}$	$AB \ncong AC$

În cazul exercițiului f), situația este:

Propoziția:		Contrapusa:
Ipoteza:	$ABCD$ este un paralelogram	$\hat{A} \ncong \hat{C}$
Concluzia:	$\hat{A} \equiv \hat{C}$	$ABCD$ nu este paralelogram

Contrapusa unei propoziții se obține astfel: se înlocuiește ipoteza cu negația concluziei și concluzia cu negația ipotezei. Contrapusa unei propoziții adevărate este o propoziție adevărată, căci raționamentul care s-a făcut în cazurile care preced se poate face totdeauna.

2) Judecata din aceste probleme se foloseşte deseori în judecăţile din viaţa de toate zilele. Exemplu: Sun la uşa locuinţei unui prieten şi nu vine nimeni să deschidă. Trag concluzia că nu e nimeni acasă. Judecata a fost următoarea: Dacă ar fi cineva acasă, mi-ar deschide uşa. Dar n-a venit nimeni, deci nimeni nu e acasă.

15.1.2. a) Dacă două drepte formează cu o secantă unghiuri alterne interne care nu sînt congruente, ele nu sînt paralele. Căci, dacă ar fi paralele, unghiurile alterne interne ar fi congruente. b) Dacă $x + y + z \neq 180°$, x, y şi z nu sînt măsurile unghiurilor unui triunghi.

15.1.3. Fie d o dreaptă şi A un punct exterior, $A \notin d$ (fig. 1). Presupunem că din punctul A s-ar putea duce două perpendiculare pe dreapta d, AB şi AC. Atunci s-ar forma un triunghi ABC cu două unghiuri drepte. Suma acestor unghiuri este de 180°. Adăugînd şi unghiul A, s-ar obţine o sumă mai mare decît 180°, ceea ce este în contradicţie cu teorema care spune că suma unghiurilor unui triunghi este de 180°. Această contradicţie dovedeşte că...

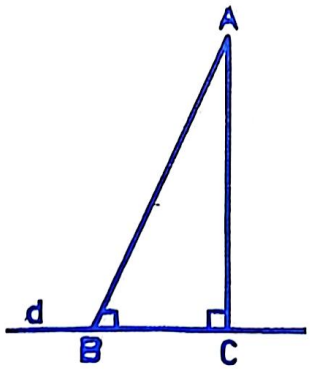


Fig. 1

15.1.4. Fie A şi B punctele de contact şi O centrul cercului (fig. 2). Unim A cu B; trebuie să demonstrăm că $O \in AB$. Presupunem că $O \notin AB$ şi unim O cu A şi B. Atunci $\widehat{OAA'} = 90°$ (unghi format de tangenta cu raza) şi $\widehat{BAA'} > \widehat{OAA'}$, deci

(1) $\qquad \widehat{BAA'} > 90°.$

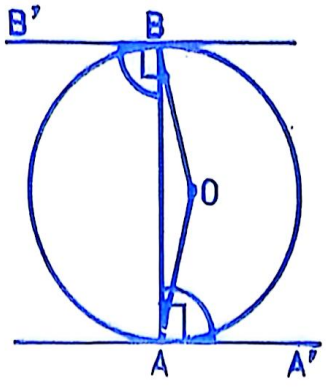


Fig. 2

Tot aşa, $\widehat{B'BO} = 90°$ şi $\widehat{B'BA} < \widehat{B'BO}$, deci

(2) $\qquad \widehat{B'BA} < 90°.$

Din (1) şi (2) rezultă că

(3) $\qquad \widehat{BAA'} > \widehat{B'BA}.$

Pe de altă parte, aceste unghiuri sînt alterne interne, deci

(4) $\qquad \widehat{BAA'} \equiv \widehat{B'BA}.$

Relaţiile (3) şi (4) se contrazic, deci presupunerea că $O \notin AB$ este greşită, deci...

15.1.5 *Soluţia I* (fig. 3). Presupunem că punctele B, O şi D nu ar fi coliniare. Atunci diagonala BD ar tăia diagonala AC într-un punct P diferit de O, deci am avea

(*) $\qquad AP \not\equiv AO$

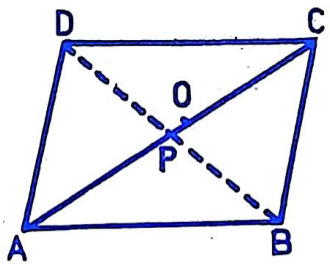


Fig. 3

Deoarece diagonalele unui paralelogram se împart în părţi congruente, punctul P ar fi mijlocul diagonalei AC, deci am avea $AP = \frac{AC}{2}$. Deoarece şi $AO = \frac{AC}{2}$, ar urma că $AP \equiv AO$, ceea ce este în contradicţie cu relaţia (*). Rezultă că presupunerea de la

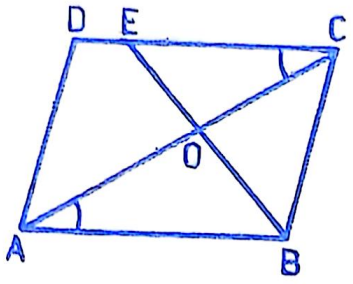
început, că punctele B, O și D nu ar fi coliniare, este greșită, aceste puncte sînt coliniare.

Soluția II. Presupunem că punctele B, O și D nu ar fi coliniare. Atunci dreapta BO (fig. 4) nu ar conține punctul D și ar tăia dreapta CD într-un punct E diferit de D, deci am avea

(*) $\qquad CE \equiv CD.$

Triunghiurile AOB și COE ar fi congruente (ULU), căci $OA \equiv OC$, unghiurile din O sînt opuse la vîrf și

Fig. 4

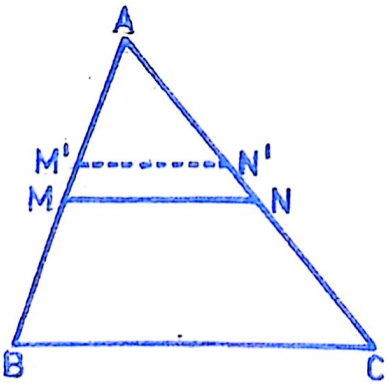


unghiurile $\widehat{OAB}$ și $\widehat{OCE}$ sînt alterne interne. Ar rezulta că $AB \equiv CE$. Dar $AB \equiv CD$, deci ar urma că $CE \equiv CD$, ceea ce este în contradicție cu relația (*), deci...

15.1.6. Presupunem că mijlocul laturii AB nu ar fi punctul M, ci un alt punct, pe care-l notăm cu M' (fig. 5). Atunci paralela dusă prin M' la latura BC ar fi linie mijlocie și ar avea loc relația $M'N' = \frac{BC}{2}$. Ar rezulta că

(1) $\qquad M'N' \equiv MN.$

Fig. 5



Pe de altă parte, $\triangle AMN \sim \triangle AM'N'$, deci $\frac{M'N'}{MN} = \frac{AM'}{AM}$. Deoarece $M' \neq M$, $\frac{AM'}{AM} \neq 1$, deci $\frac{M'N'}{MN} \neq 1$, deci

(2) $\qquad M'N' \neq MN.$

Relațiile (1) și (2) se contrazic. Rezultă că presupunerea că M nu este mijlocul laturii AB este greșită; punctul M este mijlocul laturii AB.

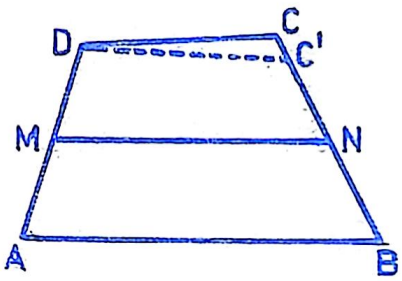
15.1.7 (fig. 6). Presupunem că DC nu este paralel cu AB. Atunci ducem prin vîrful D paralela la AB; fie C' intersecția ei cu dreapta BC. Patrulaterul $ABC'D$ este un trapez, punctul M este mijlocul laturii AD și $MN \parallel AB$, deci N este mijlocul laturii BC', deci $BN \equiv NC'$. Și, deoarece $BN \equiv NC$,

$$NC \equiv NC'.$$

Pe de altă parte, punctul C' fiind diferit de C,

$$NC \not\equiv NC'.$$

Fig. 6



Aceste două relații se contrazic, deci presupunerea că dreptele AB și CD nu sînt paralele este greșită; $AB \parallel CD$.

Observare. Rezultă că este imposibil ca dreapta care trece prin mijloacele a două laturi ale unui patrulater să fie paralelă cu o singură latură a patrulaterului. Ori nu este paralelă cu nici o latură a patrulaterului ori cu două.

15.1.8. a) Dacă fiecare unghi al unui triunghi ar avea mai puțin decît 60°, suma unghiurilor triunghiului ar fi mai mică decît $60 \cdot 3 = 180°$ — ceea ce este imposibil. d) Cel puțin un unghi al unui poligon cu n laturi $\geqslant \frac{(n-2)\,180°}{n}$.

Căci, în cazul contrar, suma tuturor unghiurilor poligonului ar fi mai mică decît $(n-2)180°$, ceea ce este imposibil.

15.1.9. Trebuie să demonstrăm propoziţiile următoare: a) Dacă $d \cap k = \emptyset$, $x > R$. b) Dacă $d \cap k = T$, $x = R$. c) Dacă $d \cap k = \{A, B\}$, $x < R$.

Între x şi R pot exista numai următoarele trei relaţii:

1) $x > R$, 2) $x = R$, 3) $x < R$.

Trebuie să vedem care din ele are loc cînd dreapta are faţă de cerc cele trei poziţii posibile.

a) Presupunem că dreapta nu are nici un punct comun cu cercul, $d \cap k = \emptyset$. Dacă ar avea loc relaţia a doua, atunci, conform propoziţiei b) de mai sus, dreapta ar avea un singur punct comun cu cercul, ceea ce ar fi în contradicţie cu ipoteza că dreapta nu are nici un punct comun cu cercul; deci $x \neq R$; dacă ar avea loc relaţia a treia, atunci, conform propoziţiei c) de mai sus, dreapta ar tăia cercul în două puncte, ceea ce este de asemenea în contradicţie cu ipoteza, deci relaţia a treia este exclusă. Relaţia a doua şi a treia fiind excluse, rămîne prima, $x > R$. Deci, dacă dreapta nu are nici un punct comun cu cercul, $x > R$.

b) Presupunem că dreapta are un singur punct comun cu cercul. Dacă ar avea loc prima relaţie, $x > R$, atunci, conform propoziţiei c) de mai sus, dreapta nu ar avea nici un punct comun cu cercul, ceea ce ar contrazice ipoteza, deci această relaţie nu poate avea loc; dacă ar avea loc relaţia a treia, atunci conform propoziţiei c), dreapta ar avea două puncte comune cu cercul, nu unul singur, deci această relaţie nu poate avea loc. Prima şi a treia relaţie fiind excluse, rămîne relaţia a doua, $x = R$. Deci, dacă dreapta are un singur punct comun cu cercul, $x = R$.

c) Presupunem că dreapta are două puncte comune cu cercul. Acest caz se tratează la fel ca cele precedente. Se arată că primele două relaţii sînt imposibile, aşa că rămîne relaţia a treia, $x < R$. Deci, dacă dreapta are două puncte comune cu cercul, $x < R$.

În concluzie, numărul punctelor comune unei drepte cu un cerc este:

0 1 2

dacă şi numai dacă

$$x > R \quad x = R \quad x < R.$$

15.1.10. Considerăm un triunghi ABC, în care $\hat{B} > \hat{C}$. Trebuie să demonstrăm că $AC > AB$. Între aceste laturi trebuie să existe una singură dintre relaţiile

$$AC < AB, \quad AC \equiv AB, \quad AC > AB.$$

Demonstraţia continuă ca la problema precedentă.

15.2.1. Am presupus că există un triunghi în care fiecare înălţime este egală cu jumătate din latura pe care cade. Calculele făcute sînt corecte, dar ele au sensul următor: dacă există un triunghi care îndeplineşte condiţiile problemei, el este echilateral. Rezultă că un triunghi care nu este echilateral nu îndeplineşte condiţiile, singurul triunghi care ar putea îndeplini condiţiile ar fi cel echilateral. Dar înălţimea unui triunghi echilateral cu latura a este $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, nu $\frac{a}{2}$, deci triunghiul echilateral nu îndeplineşte condiţiile. Singura concluzie care se poate trage de aici este că nu există triunghi care să îndeplinească condiţiile din problemă.

15.2.2. S-a folosit pe nedrept faptul că, pentru a afla aria unui triunghi, putem lua ca bază orice latură a triunghiului. Este adevărat că dacă înmulţim baza cu înălţimea corespunzătoare se obţine acelaşi rezultat, oricare ar fi latura luată ca bază, dar acest lucru nu este de la sine înţeles. Este greşit să se spună, ca în cazul de faţă, $\frac{AE \cdot DG}{2} = \frac{AD \cdot EF}{2}$ pentru că

ambele expresii reprezintă aria triunghiului; dimpotrivă, numai după ce s-a demonstrat că aceste expresii sînt egale, se poate spune că, pentru a afla aria triunghiului ADE, putem lua ca bază fie latura AD, fie AE. Fără această demonstrație însăși regula după care se află aria triunghiului nu este completă, pentru că ea nu spune care dintre laturile triunghiului este baza lui. Și această egalitate cum se demonstrează? Folosind faptul că triunghiurile AEF și ADG sînt asemenea, deci folosind un caz de asemănare. Or, cazurile de asemănare se demonstrează folosind teorema fundamentală a asemănării, care, la rîndul ei, se demonstrează folosind teorema lui Tales. Așadar, am demonstrat teorema lui Tales bazîndu-ne, indirect, pe teorema lui Tales.

Observare. S-ar putea proceda și astfel. Se calculează ariile aceloraşi triunghiuri, ABE și ACD, luînd ca baze tot AB și AC, dar înălțimile EF și DG se calculează folosind unghiul A. Triunghiul ADG dă $DG = AD \sin A$, deci aria triunghiului ACD este $\frac{AC \cdot AD \sin A}{2}$. Tot așa, triunghiul AFE dă $EF = AE \sin A$, deci aria triunghiului ABE este $\frac{AB \cdot AE \sin A}{2}$. Cele două arii fiind egale,

$$\frac{AC \cdot AD \sin A}{2} = \frac{AB \cdot AE \sin A}{2}.$$

Eliminînd numitorii și simplificînd cu $\sin A$, se obține $AC \cdot AD = AB \cdot AE$ sau

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC},$$

adică teorema lui Tales. Nici demonstrația aceasta nu este corectă, pentru că s-a folosit funcția sinus. Or, în definiția acestei funcții, ca și a celorlalte funcții trigonometrice, se folosește asemănarea triunghiurilor și după cum am arătat, cazurile de asemănare se bazează pe teorema lui Tales.

15.2.3. Totul este corect pînă la simplificarea cu $x - z$. Căci, din proporția (1) se deduce, adăugînd numărătorii la numitori:

$$\frac{x}{x+y+z} = \frac{z}{x+y+z};$$

$$x = z; \quad x - z = 0.$$

Relația (2) s-a simplificat cu zero, ceea ce nu este permis. De fapt, ținînd seamă că $x - z = 0$, relația (2) este $0 \cdot (x + z) = -y \cdot 0$. De aici nu rezultă că $x + z = -y$. În general, din $0 \cdot a = 0 \cdot b$ nu rezultă că $a = b$ (din $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$ nu rezultă că $1 = 2$). Din relația (2) se poate deduce corect că:

$$(x - z)(x + z) + y(x - z) = 0;$$

$$(x - z)(x + z + y) = 0.$$

Cel puțin unul dintre factorii acestui produs trebuie să fie egal cu zero; cum $x + y + z \neq 0$, rezultă că $x - z = 0$; $x = z$. Nu apare nici o contradicție (v. probl. 8.7.10).

15.2.4. Relațiile (2) și (3) sînt corecte, deci și relația (4), dedusă din ele. Tot răul se trage de la relația (1), care este greșită. Punctele D, T și O nu sînt coliniare. Situația reală este cea din figura 11. Este adevărat că triunghiurile AOT și DOC sînt dreptunghice și $OT = CO$; dar ele nu au nici un unghi comun, $\widehat{AOT} \neq \widehat{COD}$. Odată cu relația (1) cade și (5); $CD \neq AD$. De asemenea, triunghiul ADT este în adevăr isoscel, dar unghiul ATD nu

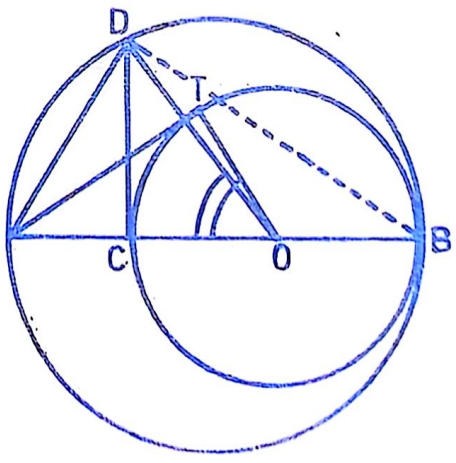


Fig. 11

este drept, căci TD nu este prelungirea razei OT.

Pentru a elucida complet problema trebuie demonstrat că punctele D, T și O nu sînt coliniare. Pentru aceasta calculăm unghiurile DOC și TOA. Teorema înălțimii, aplicată în triunghiul ADB, dă $CD = 2\sqrt{r(R-r)}$. Triunghiul DOC dă

$$\operatorname{tg} DOC = \frac{CD}{CD} = \frac{2\sqrt{r(R-r)}}{r}$$

și triunghiul TOA dă

$$\operatorname{tg} TOA = \frac{AT}{OT} = \frac{2\sqrt{R(R-r)}}{r}$$

Se vede că $\operatorname{tg} DOC \neq \operatorname{tg} TOA$, deci $\widehat{DOC} \neq \widehat{TOA}$.

15.2.5. Greșeala constă în faptul că s-a admis că suma unghiurilor este aceeași în toate triunghiurile.

15.2.6. Demonstrația are două vicii. Primul: se pornește de la faptul că cele patru unghiuri ale unui dreptunghi sînt drepte, care nu a fost demonstrat. Al doilea: demonstrația s-a făcut pentru cazul unui triunghi dreptunghic care se obține ducînd o diagonală într-un dreptunghi, dar de aici nu rezultă că teorema este adevărată pentru orice triunghi dreptunghic; mai trebuie demonstrat că orice triunghi dreptunghic se poate obține ducînd o diagonală într-un dreptunghi.

Observare. Problema de a ști dacă există un patrulater cu patru unghiuri drepte a jucat un rol important în istoria matematicii. Problema s-a pus astfel: Fie AB un segment (fig. 15).

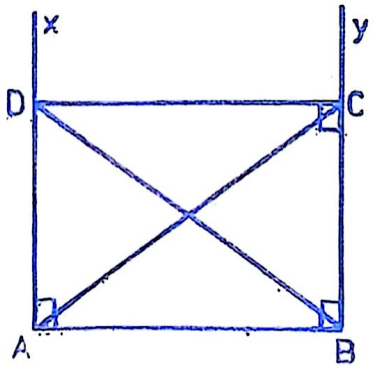


Fig. 15

În A și B se ridică perpendicularele Ax și By pe AB, se poartă pe ele două segmente congruente AD și BC și se formează patrulaterul $ABCD$ (patrulaterul lui Sacchieri). $\triangle ABC \equiv \triangle ABD$ (LUL), deci $AC \equiv BD$. Apoi $\triangle DCA \equiv \triangle CDB$ (LLL). Rezultă că $\widehat{DCB} \equiv \widehat{CDA}$, adică unghiurile C și D ale patrulaterului $ABCD$ sînt congruente, dar, fără a folosi axioma paralelelor, nu se poate stabili dacă ele sînt drepte, ascuțite sau obtuze.

15.2.7. Dreptunghiul de pe hartă și cel din realitate sînt asemenea, raportul de asemănare fiind dat de scara hărții, $k = \frac{1}{10^6}$. Raportul dintre ariile lor nu este k, ci k^2 (v. probl. 10.3.1), deci aria calculată trebuie înmulțită nu cu 10^6, ci cu 10^{12}. Se obține 910 000 ha.

15.2.8. Este adevărat că triunghiurile ABC și ABD au o latură comună și toate unghiurile congruente două cîte două, dar unghiurile congruente nu sînt la fel așezate față de latura congruentă ($\hat{C} \equiv \hat{1}$; unghiul C este opus laturii AB, iar unghiul 1 este alăturat acestei laturi). De aceea triunghiurile nu sînt congruente.

15.2.9. S-a demonstrat că punctul D nu poate să cadă pe prelungirea bazei dincolo de B și din acest fapt s-a dedus, fără temei, că el cade pe semidreapta BC. Concluzia ar fi întemeiată, dacă s-ar fi stabilit în prealabil o propoziție ca: Dacă B este un punct al dreptei xy și un punct D deosebit de B nu aparține semidreptei Bx, el aparține semidreptei By. Mai scurt: Orice punct al unei drepte împarte dreapta în două părți, numite semidrepte. În geometria clasică nu există nici o propoziție, axiomă sau teoremă, care să afirme acest lucru. De altfel, nu orice linie are această proprietate; de exemplu, un punct al unui cerc nu împarte cercul în două semicercuri.

Observare. Dificultatea care a apărut în demonstrația de mai sus scoate în evidență una dintre principalele lipsuri ale Geometriei clasice. Tot ce se exprimă prin locuțiuni ca: la stînga, la dreapta, între, de o parte, de cealaltă parte, interior, exterior ș.a. se scoate din figură. Lipsesc axiomele de ordine. De aceea propozițiile în care intervin aceste relații nu se pot demonstra corect, v. observațiile de la problemele 15.2.10—11.

15.2.10. S-a folosit o figură greșită; corectă este figura 19. Dacă $AB < AC$, punctul D cade pe prelungirea laturii AB și punctul E cade pe AC, deci una dintre relațiile (4) este greșită (în cazul de față, a doua). Totul pînă la această relație este corect.

Observare. Greșeala din demonstrație a fost descoperită, nu prin raționament, folosind teoreme, ci pe baza figurii. Mai precis, pentru a ști dacă punctul D se află între A și B sau pe prelungirea laturii AB, nu am aplicat nici o teoremă; am făcut apel la figură. S-ar putea încerca demonstrația următoare (fig. 19). Considerăm cercul circumscris triunghiului ABC. Bisectoarea unghiului A împarte arcul BC în părți congruente, de asemenea și mediatoarea laturii BC. Rezultă că punctul O aparține acestui cerc, patrulaterul $ABOC$ este înscris în cerc, deci unghiurile opuse ABO și ACO sînt suplementare. Pe de altă parte, deoarece $AB < AC$, $\widehat{ABC} > \widehat{ACB}$; deoarece $\widehat{OB} \equiv \widehat{OC}$, $\widehat{OBC} \equiv \widehat{OCB}$; de aici rezultă prin adunare că $\widehat{ABO} > \widehat{ACO}$.

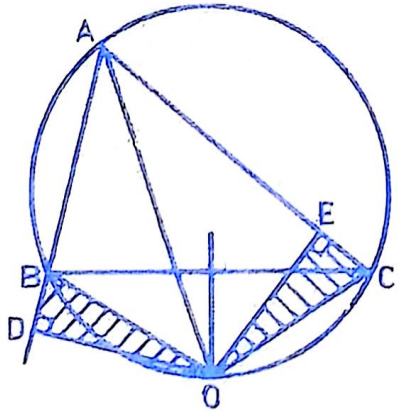


Fig. 19

Aceste unghiuri fiind suplementare, unul din ele, ABO, este obtuz și celălalt, ACO, este ascuțit. Aceasta înseamnă că triunghiul ABO este obtuzunghic și triunghiul ACO este ascuțitunghic, deci înălțimea OD cade pe prelungirea bazei AB, iar înălțimea OE cade între vîrfurile A și C. De aici rezultă că relația a doua (4), $AE - CE \neq AC$, este greșită. Această explicație nu este satisfăcătoare, datorită faptului că s-a folosit propoziția cu privire la poziția piciorului înălțimii, a cărei demonstrație nu este completă. (v. observarea de la problema 15.2.9.)

Problema de față poate fi considerată ca celebră. Ea este dată în mai multe cărți pentru a pune în evidență una dintre lipsurile Geometriei clasice.

15.2.11. Și în cazul figurii 21 se deduce din relația dată că triunghiurile ABD și CDA au două laturi proporționale, dar ele nu au nici un unghi comun, deci afirmația că ele sînt asemenea este nefondată. Din faptul că $AB^2 = BC \cdot BD$ se poate deduce că unghiul A este drept numai dacă se știe că înălțimea AD cade în interiorul unghiului A. O propoziție apropiată de o reciprocă a teoremei catetei ar fi deci: *Dacă* $AB^2 = BC \cdot BD$ *și punctul* D *este între* B *și* C, *triunghiul este dreptunghic în* A.

Observare. Dacă se știe numai că $AB^2 = BC \cdot BD$ se poate găsi o relație simplă între laturile triunghiului.

Fie ABC un triunghi care îndeplinește această condiție. Dacă $AB \equiv AC$, rezultă că $BD = \frac{BC}{2}$, deci $BC = 2BD$ și relația $AB^2 = BC \cdot BD$ devine

$$AB^2 = 2BD^2; \quad \frac{BD^2}{AB^2} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

deci $\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\hat{B} = 45°$.

Rezultă că și $\hat{C} = 45°$, deci $\hat{A} = 90°$, triunghiul este dreptunghic.

Urmează să examinăm cazul cînd triunghiul nu este isoscel. Fie deci ABC un triunghi în care $AB < AC$, deci $\hat{B} > \hat{C}$. Sînt posibile 3 cazuri: $\hat{B} = 90°$, $\hat{B} < 90°$ și $\hat{B} > 90°$. Dacă $B = 90°$, punctul D coincide cu B, $BD = 0$, deci $BC \cdot BD = 0$, deci $AB^2 = 0$ — ceea ce este imposibil. Dacă $\hat{B} < 90°$, atunci și $\hat{C} < 90°$. Admitem, pe baza figurii, că punctul D cade între B și C și AD se află în interiorul unghiului A, ca în figura 20. (Nu demonstrăm acest lucru, v. observarea de la probl. 15.2.9). Atunci demonstrația de la început este corectă, $\hat{A} = 90°$. Dacă, însă, $\hat{B} > 90°$, apare situația din figura 22.

Punem $BC = a$, $CA = b$ și $AB = c$. Atunci relația dată este $c^2 = aBD$ și dă

$$BD = \frac{c^2}{a}.$$

Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul ADB, dă

$$AD^2 = c^2 - \frac{c^4}{a^2} = \frac{c^2(a^2 - c^2)}{a^2}.$$

Apoi, $CD = CB + BD =$

$$= a + \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 + c^2}{a}.$$

Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul ADC, dă, după ce se efectuează toate calculele, $b^2 = a^2 + 3c^2$.

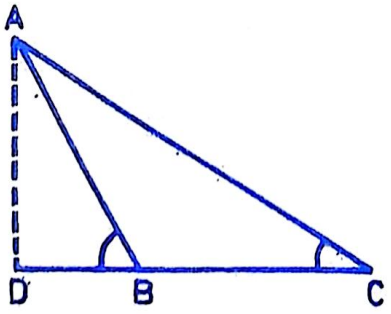


Fig. 22

Putem enunța: *Fie ABC un triunghi și D piciorul înălțimii care pornește din A. Dacă $AB^2 = BC \cdot BD$, unghiul A este drept sau $AC^2 = BC^2 + 3AB^2$, după cum punctul D este între B și C sau nu.*

15.2.12. Totul este corect pînă la ultima afirmație: „$\hat{1} + \hat{2} = \widehat{BAC}$", adică $\widehat{BAD} + \widehat{DAC} = \widehat{BAC}$. Ea este adevărată în cazul figurii 20, dar nu mai este adevărată în cazul figurii 22, în care punctul D cade pe prelungirea bazei. O propoziție apropiată de reciproca teoremei înălțimii ar fi deci: *Dacă $AD^2 = DB \cdot DC$ și punctul D este între B și C, triunghiul este dreptunghic în A.*

Observare. Dacă se știe numai că $AD^2 = DB \cdot DC$, se poate găsi o relație simplă între unghiurile triunghiului. Analizînd lucrurile ca la problema precedentă, urmează să examinăm cazul cînd unghiul B este obtuz (fig. 23). Și în acest caz triunghiurile ADB și CDA sînt asemenea, dar spre deosebire de figura 20, acum se deduce din asemănare că $\widehat{DAB} \equiv \hat{C}$. Unghiul ABC este un unghi exterior al triunghiului ABD, deci $\widehat{ABC} = \hat{D} + \widehat{DAB} = 90° + \hat{C}$, adică $\hat{B} = 90° + \hat{C}$ sau $\hat{B} - \hat{C} = 90°$.

Putem enunța: *Fie ABC un triunghi și D piciorul înălțimii care pornește din A. Dacă $AD^2 = DB \cdot DC$, $\hat{A} = 90°$ sau $\hat{B} - \hat{C} = 90°$, după cum punctul D cade între B și C sau nu.*

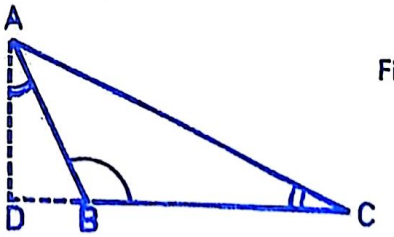


Fig. 23

15.2.13. Dacă dintr-o propoziție (1) se deduce o propoziție adevărată (2), nu rezultă că propoziția (1) este adevărată. O demonstrație corectă a propoziției (1) se găsește la 9.1.6.

15.2.14. Figura este greșită. Unghiul format de catetele AB și AC cu planul P poate avea cel mult 45° (v. probl. 11.6.6).

15.2.15. Triunghiurile ABC și $A'B'C'$ nu sînt asemenea. În adevăr, laturile lor, scrise în ordine crescătoare, sînt 3; 5; 7 și 5; 6; 10. Rapoartele lor sînt $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{6}$ și $\frac{7}{10}$; ele nu sînt egale. Deci corpul nu este un trunchi de piramidă, dreptele AA', BB' și CC' nu sînt concurente. Mai mult, oricare două din ele nu sînt în același plan.

15.2.16. Piramida considerată nu există, căci într-o piramidă patrulateră regulată, unghiul de la vîrf al unei fețe laterale are mai puțin decît 90° (v. problema 12.2.19).

15.2.17. Într-o piramidă hexagonală regulată, unghiul de la vîrf al unei fețe laterale are mai puțin decît 60° (v. probl. 12.2.19), deci piramida din problemă nu există.

15.3.1. Trebuie determinată mulțimea punctelor din interiorul triunghiului pentru care vîrful A este cel mai apropiat, a celor pentru care vîrful B este cel mai apropiat și pentru care C este vîrful cel mai apropiat.

Fie AB un segment (fig. 28), xy mediatoarea lui și M un punct situat de aceeași parte a ei cu punctul B. $MB < MA$ (v. probl. 4.4.6).

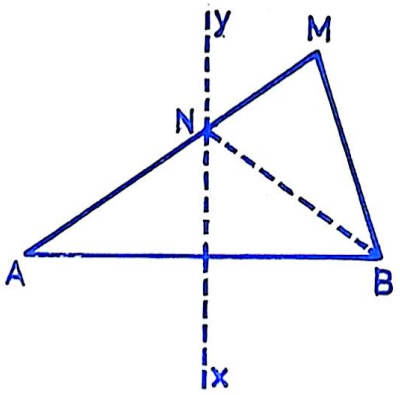


Fig. 28

În figura 29, OD, OE și OF sînt mediatoarele laturilor triunghiului. Fie M un punct din interiorul patrulaterului $OEAF$. Față de mediatoarea laturii AB, el este de aceeași parte cu

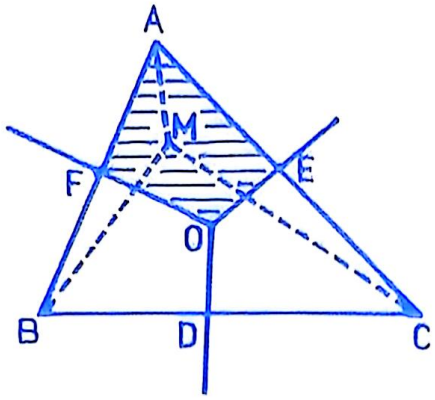


Fig. 29

vîrful A, deci $MA < MB$; față de mediatoarea OE, el este de aceeași parte cu vîrful A, deci $MA < MC$. Rezultă că, pentru toate punctele din interiorul acestui patrulater vîrful cel mai apropiat este A. Celelalte mulțimi formează interiorul patrulaterelor $OFBD$ și $ODCE$. Cînd $M \in OD$, $MB = MC < MA$, vîrfurile B și C sînt cele mai apropiate. Localitățile situate pe OD pot face parte din oricare dintre județele B și C. Analog cînd $M \in OE$ și $M \in OF$. Punctul O este egal depărtat de A, B și C.

În cazul triunghiului obtuzunghic (fig. 30), mulțimile sînt: pentagonul $AFGHE$ și triunghiurile FBG și EHC. În cazul triunghiului dreptunghic (fig. 31), ele sînt dreptunghiul $AFOE$ și triunghiurile OFB și OEC.

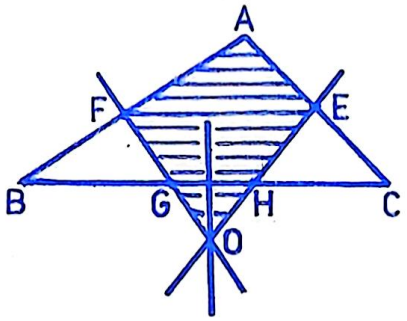


Fig. 30

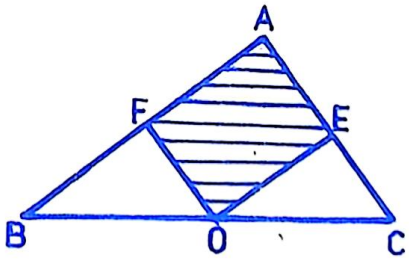


Fig. 31

15.3.2. a) Cîte grade are unghiul BDC (fig. 32)? Ce linie importantă în triunghiul ABC este CD? $AD = DB$. *Altă soluție:* Ce fel de triunghi este

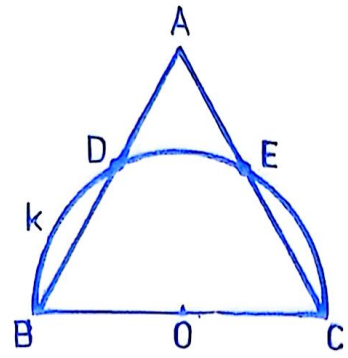
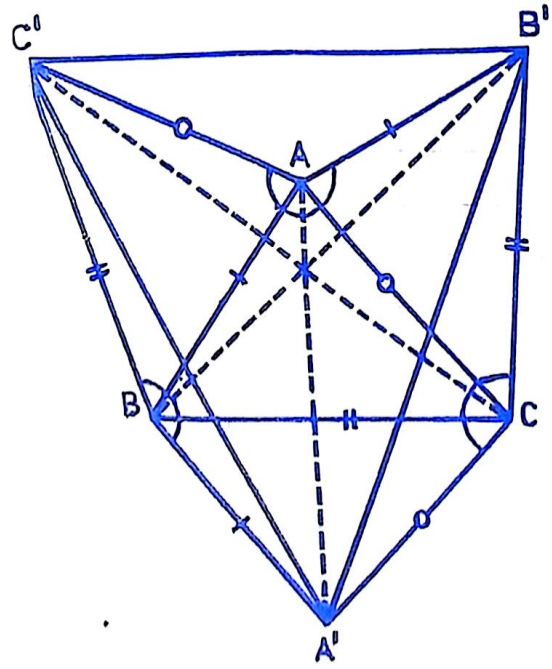


Fig. 32

DBO? Acest triunghi fiind echilateral, $BD \equiv BO$, adică BD este jumătate din latura triunghiului ABC, deci $AD \equiv DB$, b) Romb. c) DE este linie mijlocie în triunghiul ABC, deci $DE \parallel BC$.

15.3.3 (fig. 33). Poligonul cel mai mic care îndeplinește condițiile este $A'CB'AC'B$. El este format din triunghiul inițial ABC și alte trei triunghiuri congruente cu el, deci aria sa este $4\mathcal{A}$. Dar figura arată că el nu este convex. Pentru a demonstra că el este, în general, neconvex, se poate judeca astfel: Fiecare dintre unghiurile marcate cu cîte un arc în figură este triplul unghiului corespunzător al triunghiului ABC (de exemplu, $\widehat{A'CB'} = 3\widehat{ACB}$). Or, un triunghi care nu este echilateral are cel puțin un unghi mai mare decît de 60°, deci cel puțin unul dintre unghiurile poligonului are mai mult ca 180°. În cazul figurii, acest unghi este $C'AB'$. Pentru a obține un poligon



convex, trebuie adăugat triunghiul $AC'B'$, care umple scobitura. Poligonul căutat este $A'CB'C''BA'$. El are o arie mai mare decît primul, deci $\mathcal{A}' > 4\mathcal{A}$. Dacă triunghiul ABC este echilateral, poligonul căutat este tot un triunghi echilateral și $\mathcal{A}' = 4\mathcal{A}$.

15.3.4 (fig. 34). Se duce dreapta AE paralel cu dreapta d, $E \in By$. Atunci

$$MC + MD = CD = AE,$$

$$AC + DB = ED + DB = EB,$$

$$AM + MB = AB.$$

Adunînd aceste egalități, se obține

$$MC + MD + AC + \ldots = AE + EB + AB,$$

adică suma lungimilor celor șase segmente care formează triunghiurile AMC și BMD este egală cu perimetrul triunghiului AEB. Dar acest triunghi nu depinde de poziția punctului M, deci...

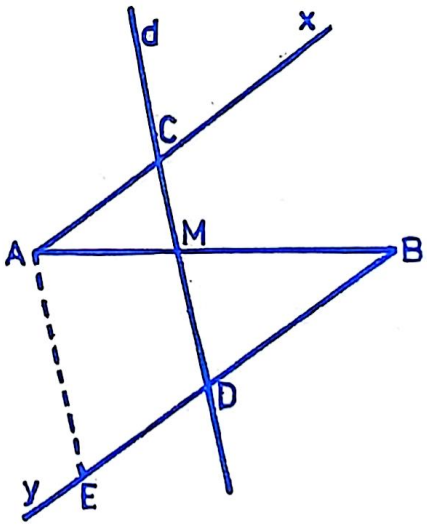
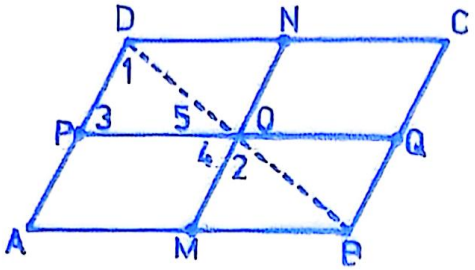


Fig. 34

15.3.5. *Soluția I.* Figura 36 reprezintă o parte din liniatură mărită, $ABCD$ este un paralelogram, M, N, P și Q sînt mijloacele laturilor sale și $MN \cap PQ = O$. Trebuie demonstrat că punctele B, O și D sînt coliniare. $\triangle DPO \equiv \triangle OMB$ (LUL), deci $\hat{1} \equiv \hat{2}$. Apoi $\hat{3} \equiv \hat{4}$ (alt. int.). Unghiurile 1, 3 și 5 sînt unghiurile unui triunghi, deci $\hat{1} + \hat{3} + \hat{5} = 180°$. Înlocuind 1

Fig. 36

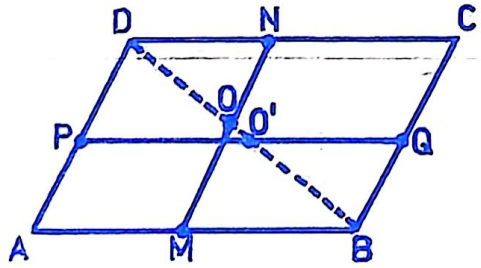


cu 2 și 3 cu 4, rezultă că $\hat{2} + \hat{4} + \hat{5} = 180°$ deci... La fel se demonstrează că oricare trei puncte consecutive marcate prin rotogoale sînt coliniare.

Soluția II. Ducem numai dreptele BD și MN (fără PQ) și fie $MN \cap BD = O$. În triunghiul DAB, M este mijlocul laturii AB și $MO \parallel AD$, deci punctul O este mijlocul diagonalei BD, ceea ce înseamnă că dreapta MN trece prin mijlocul diagonalei. La fel se arată că dreapta PQ trece prin mijlocul diagonalei BD. Rezultă că intersecția dreptelor MN și PQ este mijlocul diagonalei BD, adică diagonala BD trece prin intersecția acestor drepte.

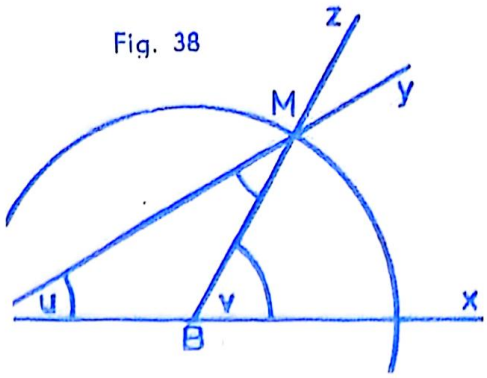
Soluția III. Dacă diagonala BD nu ar trece prin intersecția dreptelor MN și PQ, situația ar fi cea din figura 37, în care $BD \cap MN = O$ și $BD \cap PQ = O'$. Atunci din triunghiul DAB ar rezulta că punctul O' este mijlocul diagonalei și din triunghiul DBC ar rezulta că O' este de asemenea mijlocul diagonalei, ceea ce este imposibil.

Fig. 37



15.3.6 (fig. 38). Ce relație există între unghiurile u, v și $\hat{M}$? Între $\hat{u}$ și $\hat{v}$? $\hat{M} \equiv \hat{u}$, deci triunghiul BAM este isoscel, $BM \equiv BA$. Cînd semidreptele Ay și Bz se rotesc, punctul B rămîne fix și distanța AB nu se schimbă, deci nici distanța BM nu se schimbă. Punctul M se mișcă pe cercul cu centrul în B și cu raza AB. Cînd

Fig. 38



unghiul u variază de la 0° (exclusiv) la 90°, punctul M descrie un semicerc.

15.3.7. OM este o mediană a triunghiului dreptunghic OAB. Se știe (v. probl. 5.3.17) că mediana este jumătate din ipotenuză, $OM = \frac{AB}{2}$. În timpul mișcării lungimea scării rămîne constantă, deci și segmentul OM rămîne constant. Punctul M descrie un arc de cerc cu centrul în O și raza egală cu $\frac{AB}{2}$.

15.3.8. a) În triunghiul ABC (fig. 40), $MQ \parallel CB$, deci $\triangle AQM \sim \triangle ABC$, deci $\frac{AQ}{AB} = \frac{QM}{BC}$ sau, înlocuind QM cu AN și BC cu AD,

$$\frac{AQ}{AB} = \frac{AN}{AD}.$$

Considerăm triunghiul ABD. Ultima proporție arată că dreapta QN împarte laturile AB și AD în părți proporționale, deci $NQ \parallel BD$. La fel se arată că $RP \parallel BD$, deci..., b) Fie $DB \cap NP = S$. Din paralelogramul $QBSN$ se scoate $NQ \equiv SB$; din paralelogramul $SPRD$ se scoate $RP \equiv SD$. Adunînd aceste relații, se obține $NQ + RP = ...$ (v. probl. 5.3.12).

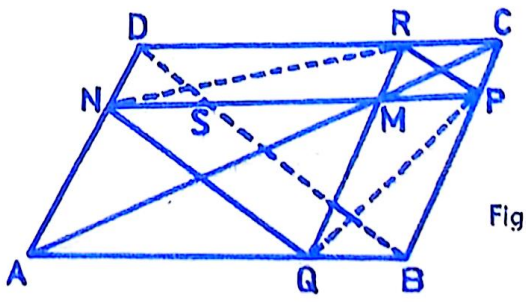


Fig. 40

Cînd punctul M se mişcă pe diagonala AC, segmentele QN şi RP variază, dar suma lor rămîne mereu egală cu diagonala BD, deci este constantă. c) Dreptele NP şi QR împart paralelogramul $ABCD$ în patru paralelograme şi trapezul $NQPR$ în patru triunghiuri.

Ariile triunghiurilor

QMN QMP PMR RMN

sînt jumătăţile ariilor paralelogramelor

$QMNA$ $QMPB$ $PMRC$ $RMND$.

Rezultă că aria trapezului $NQPR$ este jumătate din aria paralelogramului $ABCD$ — oricare ar fi poziţia punctului M.

Observare. Am văzut că aria trapezului $NQPR$ este constantă, de asemenea şi suma bazelor NQ şi RP. Rezultă că şi înălţimea trapezului este constantă. Deci, cînd punctul M descrie diagonala AC, distanţa dintre dreptele NQ şi RP rămîne constantă.

15.3.9 (fig. 42). a) Fie B' simetricul punctului B faţă de dreapta Cx şi $AB' \cap Cx = M$. Datorită simetriei, $\hat{1} \equiv \hat{2}$; $\hat{2} \equiv \hat{3}$ (op. la vîrf), deci $\hat{3} \equiv \hat{1}$. Atunci şi complementele acestor unghiuri sînt congruente, $\hat{i} = \hat{r}$. Rezultă că, dacă lansăm bila A spre punctul B', ea va trece prin punctul B după ce se va lovi de marginea mesei. b) Reţinem că, pentru ca bila să ajungă în punctul B, trebuie ca, înainte de reflexie, să meargă spre B', simetricul punctului B faţă de marginea mesei de care se loveşte. În cazul de faţă (fig. 43), ca bila să ajungă în punctul B după ce se loveşte de marginea Cy, trebuie ca înainte de reflexie să meargă spre B', simetricul punctului B faţă de dreapta Cy. Deci bila A trebuie lansată astfel încît, după ce se loveşte de marginea Cx, să se îndrepte spre punctul B'. Fie B'' simetricul punctului B' faţă de dreapta Cx. Construcţie: Fie B' simetricul punctului B faţă de dreapta Cy şi B'' simetricul punctului B' faţă de dreapta Cx, $AB'' \cap Cx = M$ şi $MB' \cap Cy = N$. Drumul bilei este $AMNB$.

Observări. 1) Dacă se cere să se lanseze bila B astfel încît să se ciocnească cu bila A după ce se reflectă de marginea Cy apoi de marginea Cx, drumul este acelaşi.

2) Problema admite o soluţie numai dacă punctele M şi N cad respectiv pe semidreptele Cx şi Cy, nu pe prelungirile lor. Acest lucru se întîmplă cînd punctul A este în exteriorul unghiului BCy.

3) În ambele cazuri, drumul (AMB sau $AMNB$) determinat prin construcţia indicată este drumul minim de la A la B care îndeplineşte condiţiile problemei (v. probl. 14.1.9).

4) Problema se poate generaliza obligînd bila să se lovească de 3, 4, ... margini ale mesei.

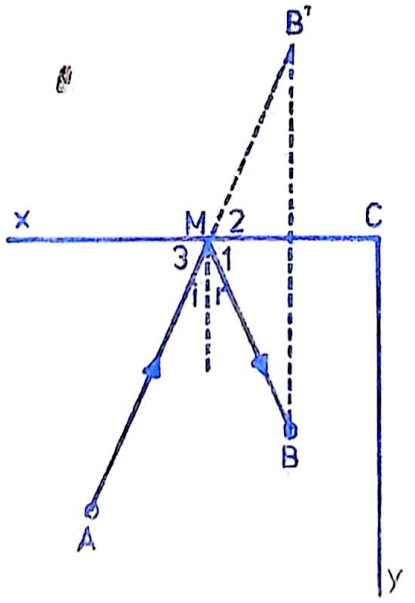


Fig. 42

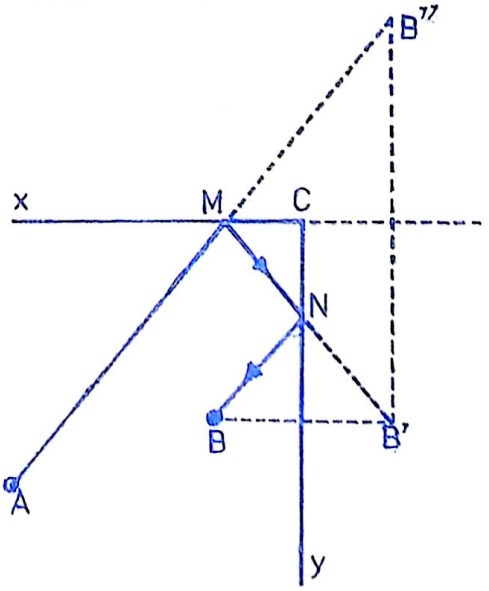


Fig. 43

15.3.10. Fie DE coarda căutată (fig. 44). Ce fel de triunghi este AFG? Dacă $DF \equiv FG$, ce relație există între FD și FA? Ce fel de triunghi este FAD?

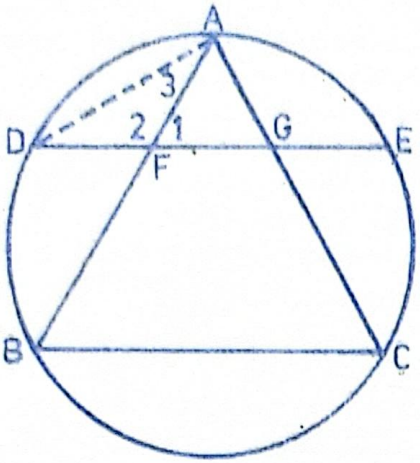


Fig. 44

Se calculează unghiurile 1, 2, 3 și DAG; $\widehat{DAG} = 90°$. Reciproc, dacă $\widehat{DAG} = 90°$, se află unghiul D din triunghiul DAG ($\hat{G} = 60°$) și $\widehat{FAD} = 90° - 60° = 30° = \widehat{DAG}$. Deci triunghiul ADF este isoscel, $DF \equiv FA$ și, triunghiul AFG fiind echilateral, $FA \equiv FG$, deci $DF \equiv FG$. Diametrul AO fiind o axă de simetrie a figurii, rezultă că $DF \equiv GE$. Construcție: Se duce AD perpendicular pe AC și prin D paralela la BC (v. probl. 7.2).

15.3.11. a) Datorită simetriei, unghiurile notate cu u în figura 45 sînt congruente, de asemenea cele notate cu v. $\widehat{DAE} = 2u + 2v = 2(u + v)$. Dar $u + v = 90°$, deci $\widehat{DAE} = 180°$.
b) $MD \perp AB$ și $AC \perp AB$, deci $MD \parallel AC$. La fel, $ME \parallel AB$. Rezultă că unghiul $DME \equiv$ unghiul BAC. c) Datorită simetriei, $AD \equiv AM$ și $AE \equiv AM$, deci $DE = 2AM$. d) Segmentul DE este minim cînd AM este minim, cînd $AM \perp BC$. e) Cînd $AM \perp BC$, $\hat{u} \equiv \hat{C}$. Unghiul ABC este un unghi exterior al triunghiului ABH, deci $\widehat{ABC} = \hat{H} + \widehat{HAB}$; $\hat{B} = \hat{H} + \hat{C}$; $\hat{H} = \hat{B} - \hat{C}$.

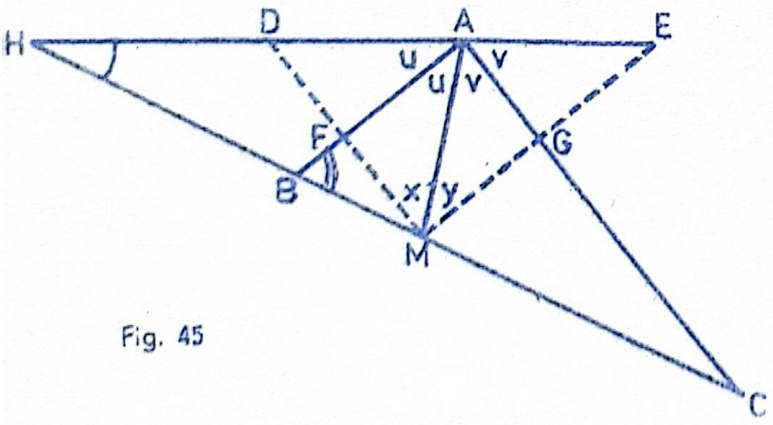


Fig. 45

15.3.12. Este foarte ușor de găsit o soluție. De exemplu, segmentul AB se împarte în trei părți congruente; se obține un triunghi echilateral. Dar aceasta nu este singura soluție. Condițiile $AM \equiv MN \equiv NB$ nu sînt necesare. Se cer condițiile necesare, adică condițiile trebuie să fie astfel încît, dacă una sau alta din ele nu este îndeplinită, triunghiul nu se poate construi.

Fie M și N punctele căutate (fig. 46). Punem $AB = p$, $AM = a$, $MN = b$ și $NB = c$. În primul rînd a, b și c sînt mai mici decît $\frac{p}{2}$ (v. probl. 4.2.9).

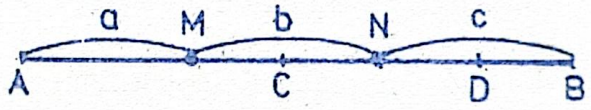


Fig. 46

Fie C mijlocul segmentului AB. Deoarece $a = AM < \frac{p}{2}$, punctul M este între A și C. Tot așa, deoarece $c = BN < \frac{p}{2}$, punctul N este între C și B, deci în dreapta lui C. Totodată $b = MN < \frac{p}{2}$. Pentru a preciza poziția punctului N, purtăm pe MB un segment MD de lungime $\frac{p}{2}$; atunci $MN < MD$, deci punctul N este la stînga lui D. Punctul N fiind la dreapta lui C și la stînga lui D, este între C și D. Construcție: Se determină mijlocul C al segmentului AB, se ia

punctul M între A și C, apoi se poartă pe MB un segment MD congruent cu AC și se ia punctul N între C și D.

Dacă segmentele $AM = a$, $MN = b$ și $NB = c$ îndeplinesc aceste condiții, adică M este între A și C și N între C și D, triunghiul se poate construi. În adevăr, fiecare din ele are o lungime mai mică decît $\frac{p}{2}$. Din $a < \frac{p}{2}$ rezultă că $b + c > \frac{p}{2}$, deci $a < b + c$. La fel se arată că $b < a + c$ și $c < a + b$.

Observări. 1) Să verificăm că aceste condiții sînt în adevăr necesare, deși acest lucru rezultă din cele ce preced. Dacă punctul M nu este în interiorul segmentului AC, $a \geqslant \frac{p}{2}$ și triunghiul nu se poate forma. Dacă punctul N nu este între C și D, el poate să aparțină segmentului MC inclusiv punctul C sau segmentului DB inclusiv punctul D. În primul caz, $c = NB \geqslant CB = \frac{p}{2}$, adică $c \geqslant \frac{p}{2}$, iar în cazul al doilea, $b = MN \geqslant MD = \frac{p}{2}$, adică $b \geqslant \frac{p}{2}$. În ambele cazuri, triunghiul nu se poate forma.

2) Soluția dată lasă multă libertate în alegerea punctelor M și N. Punctul M poate fi orice punct interior al segmentului AC, iar punctul N orice punct interior al segmentului CD.

15.3.13. c) Fie x latura pătratului care trebuie construit. Condiția este

$$x^2 = a^2 \frac{m}{n} = \frac{a^2 m}{n}.$$

Deci

$$x = \sqrt{\frac{a^2 m}{n}} = \sqrt{\frac{a^2 mn}{n^2}} = \frac{\sqrt{am \cdot an}}{n}.$$

Se construiește media proporțională p a segmentelor am și an, adică $p = \sqrt{am \cdot an}$. Atunci $x = \frac{p}{n}$.

Observare. Încă din antichitate s-a pus problema următoare: fiind dat un cerc, să se construiască pătratul care are aceeași arie cu el. Aflarea laturii acestui pătrat se numește a face *cuadratura cercului* (v. observarea de la probl. 10.1.40). În limbajul contemporan, problema se pune astfel: Fie a raza cercului dat și x latura pătratului care trebuie construit. Deoarece aria cercului este πa^2, aria pătratului trebuie să fie πa^2. Este tocmai problema de mai sus unde în locul fracției $\frac{m}{n}$ apare factorul π. Dacă π ar fi un număr rațional, problema s-ar rezolva așa cum s-a arătat. În realitate, numărul π nu este rațional, așa că problema nu se poate rezolva pe această cale.

15.3.14. a) O tăietură paralelă cu latura mai mare a dreptunghiului (fig. 47) dă părți mai alungite, care nu pot fi asemenea cu dreptunghiul dat, așa că ea trebuie să fie paralelă cu latura mai mică. Fie MN tăietura. Trebuie determinat punctul M. Punem $AB = a$, $BC = b$ și $AM = x$. Condiția ca dreptunghiul $AMND$ să fie asemenea cu $ABCD$ este

$$(1) \qquad \frac{AM}{AD} = \frac{AD}{AB}; \quad \frac{x}{b} = \frac{b}{a};$$

$$x = \frac{b^2}{a} = AM.$$

b) Dreptunghiul $MBCN$ are dimensiunile

$$(2) \qquad MN = b \text{ și } MB = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}.$$

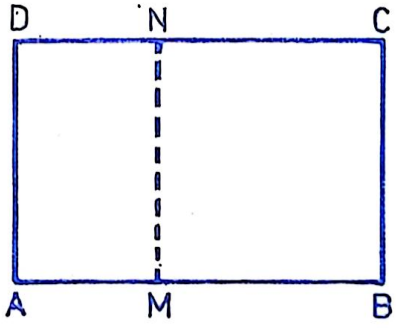


Fig. 47

Condiția ca cele două părți să fie asemenea este

$$\frac{AM}{MN} = \frac{MN}{MB} \text{ sau } \frac{AM}{MN} = \frac{MB}{MN}.$$

Se scrie întîi raportul laturilor dreptunghiului din stînga. Deoarece nu se știe care dintre laturile dreptunghiului din dreapta este mai mare, raportul lor trebuie luat sub ambele forme.

Ținînd seama de (1) și (2), prima proporție dă

$$a^2 - b^2 = b^2; \quad a^2 = 2b^2; \quad a = b\sqrt{2},$$

Proporția a doua se reduce la $AM = MB$. Ținînd seama de (1) și (2), ea dă

$$\frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a}; \quad 2b^2 = a^2; \quad a = b\sqrt{2},$$

deci aceeași relație. Așadar, condiția cerută este $a = b\sqrt{2}$.

Relația $AM = MB$ arată că cele două părți sînt chiar congruente. c) Totul rămîne valabil.

Observare. Considerăm o foaie de hîrtie dreptunghiulară cu dimensiunile a și b, unde $a = b\sqrt{2}$. Am văzut că axa ei de simetrie paralelă cu latura mai mică o împarte în două părți asemenea cu ea. Dacă o pliem după această axă, obținem o foaie dublă asemenea cu cea inițială. Colile de hîrtie obișnuite îndeplinesc aproximativ această condiție (verificare!). Este remarcabil faptul că dacă pliem din nou hîrtia, obținem de asemenea o foaie asemenea cu cea inițială, ș.a.m.d.

15.3.15. a) Fie x lățimea ramei. Condiția ca dreptunghiurile să fie asemenea este

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}; \quad \frac{a}{a + 2x} = \frac{b}{b + 2x},$$
$$(a - b)x = 0.$$

Dacă $a - b \neq 0$, $a \neq b$, soluția este $x = 0$, ceea ce înseamnă că cele două dreptunghiuri sînt asemenea numai dacă rama nu există. Problema nu are soluție. Dacă $a = b$, $a - b = 0$, x este arbitrar, ceea ce înseamnă că, dacă tabloul are forma de pătrat, putem da ramei orice lățime vrem. b) Fie $x = EL$ lățimea părților din ramă paralele cu AD și $y = AL$ a celor paralele cu AB. Condiția este

$$(1) \qquad \frac{a}{a + 2x} = \frac{b}{b + 2y}.$$

Această ecuație dă

$$(2) \qquad \frac{x}{a} = \frac{y}{b}.$$

Lățimile părților ramei trebuie să fie proporționale cu laturile tabloului. c) Totul rămîne valabil.

Observări. 1) Relația (2) nu determină valorile necunoscutelor x și y. Putem lua x după voie, $x = c$; atunci $y = \frac{bc}{a}$. Deci problema are o infinitate de soluții, putem face o ramă mai lată sau mai puțin lată, dar trebuie respectată proporția (2).

2) Dreptunghiul $EFGH$ este ușor de construit, căci are aceleași diagonale cu dreptunghiul $ABCD$.

3) Avem un amestec de apă și sare format din a grame apă și b grame sare. Vrem să adăugăm o cantitate de apă și de sare, dar astfel încît amestecul să nu-și schimbe concentrația. Cîtă apă și cîtă sare putem adăuga? Problema este analoagă cu cea de mai sus, căci, așa cum forma dreptunghiului este caracterizată prin raportul laturilor $\frac{b}{a}$, concentrația amestecului este caracterizat prin raportul $\frac{b}{a}$ dintre cantitățile de sare și de apă pe care le conține.

Sub această formă soluția problemei este imediată. Ne închipuim că preparăm într-un alt vas un amestec de x grame apă și y grame sare pe care-l vom adăuga la primul. Este evident că acest amestec suplementar trebuie să aibă aceeași concentrație cu primul, adică să aibă loc relația $\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, adică tocmai relația (2).

15.3.16. a) Fie MN (fig. 49) o dreaptă care îndeplinește condiția. Punem $AB = a$, $DC = b$, $DM = x$, $AN = y$. Trebuie să aflăm y cunoscînd x. Condiția este:

$$\frac{(x + y)i}{2} = \frac{(a + b)i}{4},$$

i fiind înălțimea trapezului. Alungind numitorii și simplificînd cu i, se obține

$$(*) \qquad y = \frac{a + b}{2} - x.$$

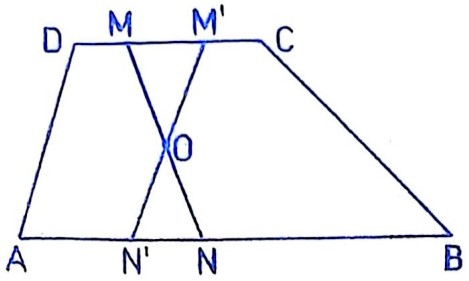


Fig. 49

b) Valoarea aflată pentru y este acceptabilă dacă $y \geqslant 0$ și $y \leqslant a$. Or, $\frac{a + b}{2}$ este linia mijlocie a trapezului, $x \leqslant b$ și $b <$ linia mijlocie, deci $y > 0$. Apoi, y se obține scăzînd x din linia mijlocie, deci y este mai mic decît linia mijlocie, cu atît mai mult $y \leqslant a$. Deci, punctul N există totdeauna. Cînd punctul M coincide cu D, $x = 0$, relația (*) dă $y = \frac{a + b}{2}$, deci segmentul AN este congruent cu linia mijlocie. Cînd punctul M coincide cu C, $x = b$, relația (*) dă $y = \frac{a - b}{2}$. Aceste poziții extreme se obțin astfel (fig. 50). Prin mijlocul Q al laturii BC se duce paralela la AD; punctul N_1 în care ea taie baza AB corespunde cazului cînd M coincide cu D. Prin D se duce paralela DE la CB; mijlocul N_2 al segmentului AE corespunde cazului cînd punctul M coincide cu C. Cînd punctul M descrie baza DC, punctul N descrie segmentul N_1N_2.

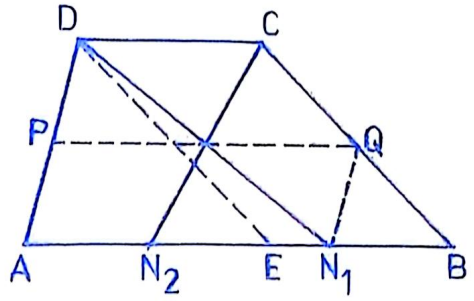


Fig. 50

c) Fie $M'N'$ (fig. 49) o altă dreaptă care împarte trapezul în două părți echivalente și $MN \cap M'N' = O$. Aria fiecăruia dintre trapezele $ANMD$ și $AN'M'D$ este jumătate din aria trapezului întreg, deci aceste trapeze sînt echivalente. Ele avînd aceeași înălțime, suma bazelor este aceeași în amîndouă:

$$AN + DM = AN' + DM'.$$

De aici se deduce că

$$AN - AN' = DM' - DM.$$

Prima dintre aceste diferențe este $N'N$ și a doua este MM', deci $N'N \equiv MM'$. $\triangle ON'N \equiv \triangle OM'M$ (ULU), deci $ON \equiv OM$, dreapta $M'N'$ trece prin mijlocul lui MN. Dacă $M''N''$ este o a treia dreaptă care împarte trapezul în părți echivalente, se demonstrează la fel că ea trece prin punctul O, deci toate dreptele care îndeplinesc condițiile problemei trec prin mijlocul uneia dintre ele, deci...

Observare. Faptul că triunghiurile OMN și $OM'N'$ sînt congruente se poate demonstra și astfel. Trapezele $ANMD$ și $AN'M'D$ sînt echivalente și au partea comună $AN'OMD$. Rezultă că și resturile, $ON'N$ și $OM'M$ sînt echivalente. Aceste triunghiuri sînt și asemenea, deci ele sînt congruente (v. probl. 10.3.8).

15.3.17 (fig. 51). Fie O, P și Q centrele celor trei cercuri și R raza cercului mare. Punem $OT = x$. Atunci diametrii cercurilor interioare sînt:

$$AT = AO + OT = R + x,$$

$$TB = OB - OT = R - x.$$

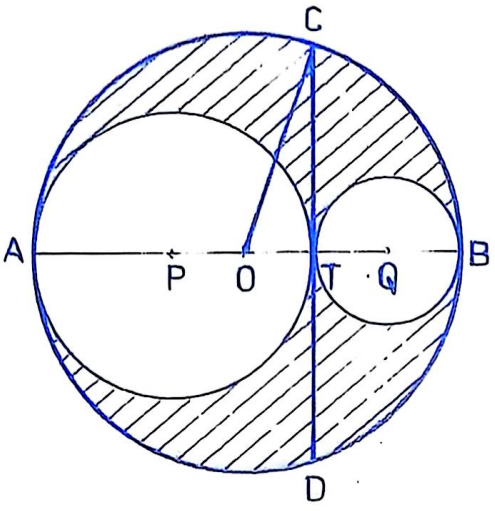


Fig. 51

Suma ariilor acestor cercuri este

$$\frac{\pi(R+x)^2}{4}+\frac{\pi(R-x)^2}{4}=\frac{\pi(R^2+x^2)}{2}.$$

Aria părţii haşurate este

$$\mathcal{A}=\pi R^2-\frac{\pi(R^2+x^2)}{2}=\frac{\pi(R^2-x^2)}{2}.$$

Din triunghiul dreptunghic COT rezultă că $OC^2-OT^2=CT^2$, adică $R^2-x^2=c^2$, deci

$$\mathcal{A}=\frac{\pi c^2}{2}.$$

Observare. Pentru a desena figura, trebuie să ne alegem raza R şi coarda CD $(=2c)$. Este surprinzător că în rezultatul obţinut apare numai c, raza R nu apare. Aceasta înseamnă că $\mathcal{A}$ nu depinde de raza cercului. Dacă luăm un cerc mai mic sau mai mare, dar păstrăm lungimea coardei, aria rămîne aceeaşi. Merită să faci desenul necesar, pentru a vedea cum se schimbă forma părţii haşurate.

15.3.18. Diagonalele dreptunghiului $AEDF$ se împart în părţi congruente, deci punctul G este mijlocul segmentului EF; înălţimea AD coincide cu mediana AG.

Fie AH înălţimea triunghiului AEF, $AH\cap BC=L$.

$\hat{C}\equiv\hat{1}$, căci au acelaşi complement, DAC;

$\hat{1}\equiv\hat{2}$, căci $AG\equiv GE$ (jumătăţi de diagonale);

$\hat{2}\equiv\hat{3}$, căci au acelaşi complement, EAH.

Rezultă că

$$\hat{C}\equiv\hat{3}, \tag{1}$$

deci triunghiul ALC este isoscel,

$$LA\equiv LC. \tag{2}$$

Din (1) rezultă că şi complementele acestor unghiuri sînt congruente, $\hat{B}\equiv\widehat{BAL}$, deci triunghiul BAL este isoscel, $LA\equiv LB$. Din această relaţie şi (2) rezultă că $LB\equiv LC$, AL este mediană în triunghiul ABC.

15.3.19 (fig. 53). $\triangle ANM\sim\triangle ABC$ şi $\triangle MPC\sim\triangle ABC$, deci

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AC}\ \text{şi}\ \frac{MP}{AB}=\frac{MC}{AC}.$$

Aceste proporţii se adună:

$$\frac{MN}{BC}+\frac{MP}{AB}=\frac{AM+MC}{AC}=\frac{AC}{AC}=1.$$

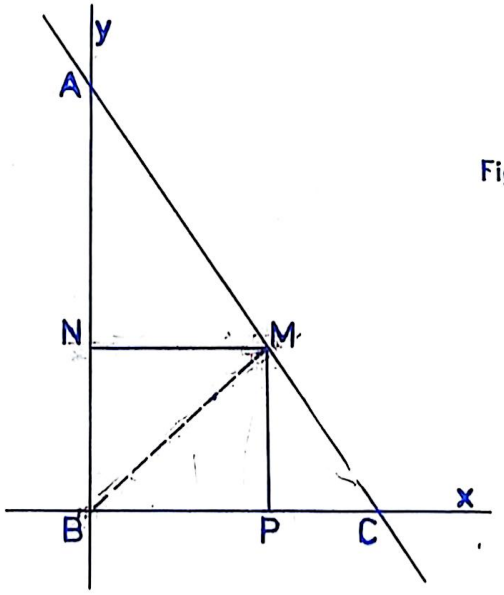


Fig. 53

Observări. 1) Relaţia devine plauzibilă prin consideraţiile următoare. Cînd punctul M este aproape de vîrful A, segmentul MN este o fracţie mică

din BC, dar MP este o fracție mare din AB, ambele fracții fiind subunitare. Cînd punctul M coboară spre C, segmentul MN crește, dar MP scade, deci este de bănuit că suma celor două fracții rămîne constantă. Demonstrația s-a făcut înlocuind ambele rapoarte prin rapoartele corespunzătoare ale părților aceleiași laturi, AC.

2) Suma ariilor triunghiurilor ABM și MBC este aria triunghiului ABC. Dacă unghiul B este drept, MN și NP sînt înălțimile primelor două triunghiuri, deci

$$\frac{AB \cdot MN}{2} + \frac{BC \cdot MP}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2}.$$

Se elimină numitorii și se împarte prin $AB \cdot BC$.

3) Dacă unghiul B este drept și luăm Bx și By ca axe de coordonate, $BP = x$ și $BN = y$ sînt coordonatele punctului M. Dacă punem $BC = a$ și $BA = c$, relația se scrie

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1$$

și arată că, oricare ar fi punctul M pe AC, coordonatele lui o satisfac, deci ea reprezintă ecuația (segmentară) a dreptei AC. Demonstrația este valabilă numai pentru segmentul AC.

15.3.20. a) $\triangle ANP \sim \triangle ABC$ (fig. 54), deci raportul bazelor este egal cu raportul înălțimilor (v. probl. 8.4.20)

$$\frac{NP}{BC} = \frac{AM}{AE};\quad \frac{NP}{a} = \frac{x}{i};$$

$$NP = \frac{ax}{i}.$$

$$NQ = ME = AE - AM = i - x.$$

Perimetrul dreptunghiului este

$$2NP + 2NQ = \frac{2ax}{i} + 2(i - x) =$$

$$\frac{2(a - i)}{i}x + 2i.$$

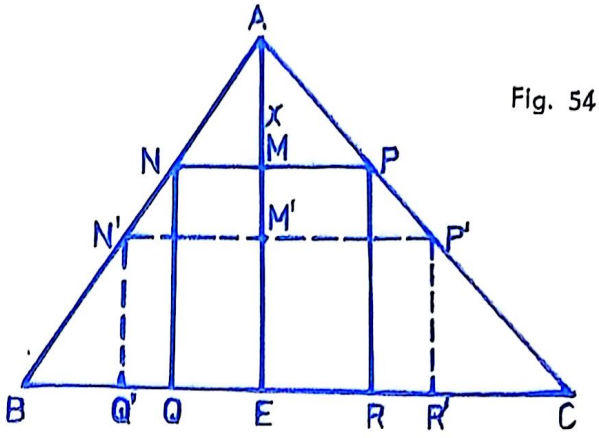


Fig. 54

Trebuie să studiem variația funcției

$$f(x) = \frac{2(a - i)}{i}x + 2i \qquad x \in [0, i].$$

Dacă $a > i$, coeficientul lui x este pozitiv, deci funcția este crescătoare, minimul ei este $f(0) = 2i$ și maximul $f(i) = 2a$. Dacă $a < i$, coeficientul lui x este negativ, deci funcția este descrescătoare, prima dintre aceste valori este maximul și a doua minimul ei. Dacă $a = i$, termenul în x dispare, $f(x) = 2i$ oricare ar fi valoarea lui x. perimetrul este constant, egal cu $2i$ (sau $2a$).

b) Condiția ca perimetrul să fie egal cu un număr dat s este

$$\frac{2(a - i)}{i}x + 2i = s,\quad x \in [0, i].$$

Dacă $a \neq i$, perimetrul dreptunghiului variază, crescînd sau descrescînd, de la $2i$ la $2a$. Dacă s este cuprins între aceste numere, ecuația are o soluție; în cazul contrar, ecuația nu are soluție.

Dacă $a = i$, sînt posibile două cazuri: dacă $s = a$ $(= i)$, punctul M poate fi luat după voie, problema are o infinitate de soluții; dacă $s \neq a$, problema nu are soluție.

Observare. Pare surprinzător faptul că, dacă $a = i$, perimetrul este constant. Explicație: S-a văzut că $\frac{NP}{BC} = \frac{AM}{AE}$. Dacă $a = i$, adică $BC = AE$, numitorii sînt egali; rezultă că și numărătorii sînt egali, $NP = AM$. Cu alte

cuvinte, dacă în triunghiul ABC baza este congruentă cu înălțimea, triunghiul ANP are aceeași proprietate, $NP \equiv MA$. Perimetrul dreptunghiului $QRPN$ este $2(QN + NP)$. Înlocuind QN cu EM și NP cu MA, perimetrul devine $2(EM + MA) = 2EA$, adică dublul înălțimii — indiferent de poziția punctului M.

15.3.21 (fig. 55). Fie R raza cercului și $OD = x$ distanța cerută. Considerînd că x este dat, $DB = \sqrt{R^2 - x^2}$. Teorema catetei, aplicată în triunghiul OBC, dă $OC = \frac{R^2}{x}$. Teorema lui Pitagora, aplicată în triunghiul COB, dă $CB = \frac{R\sqrt{R^2 - x^2}}{x}$. Aria laterală a conului este

$$\pi \cdot DB \cdot CB = \frac{\pi R(R^2 - x^2)}{x}.$$

Înălțimea calotei este $DE = R - x$, deci aria calotei este $2\pi R(R - x)$. Ecuația problemei este

$$R^2 - x^2 = 2kx(R - x).$$

Dacă se efectuează calculele, se obține o ecuație de gradul 2, dar acest lucru se poate evita. $x \neq R$, deci $R - x \neq 0$, deci se poate simplifica cu $R - x$. Se obține

$$R + x = 2kx;\ x = \frac{R}{2k - 1};\ \left(k \neq \frac{1}{2}\right).$$

Ca să convină problemei x trebuie să fie pozitiv și mai mic decît R. Prima condiție dă $2k - 1 > 0$, $k > \frac{1}{2}$. Condiția a doua dă

$$\frac{R}{2k - 1} < R;\ k > 1.$$

Această condiție cuprinde și cele precedente, $k \neq \frac{1}{2}$ și $k > \frac{1}{2}$. Așadar, dacă $k > 1$, problema are o singură soluție.

Observare. Acest rezultat este confirmat de figură. Calota se găsește în interiorul conului, deci aria laterală a conului trebuie să fie mai mare decît aria calotei, $k > 1$. Apoi, luînd distanța x destul de mică, conul poate deveni oricît de mare vrem, dar calota va fi totdeauna mai mică decît o hemisferă, deci k poate fi oricît de mare.

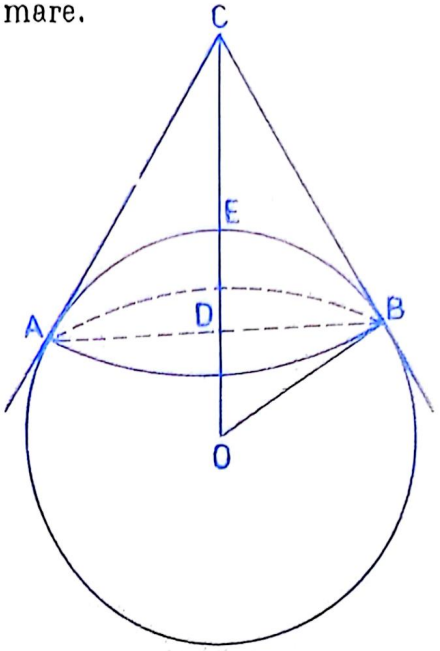


Fig. 55

15.3.22. Ariile laterale sînt $\pi DB \cdot CB$ și $\pi DB \cdot R$, deci raportul lor este $\frac{CB}{R}$. În problema precedentă s-a aflat că $CB = \frac{R\sqrt{R^2 - x^2}}{x}$, deci ecuația problemei este

$$\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{x} = k;\ x = \frac{R}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

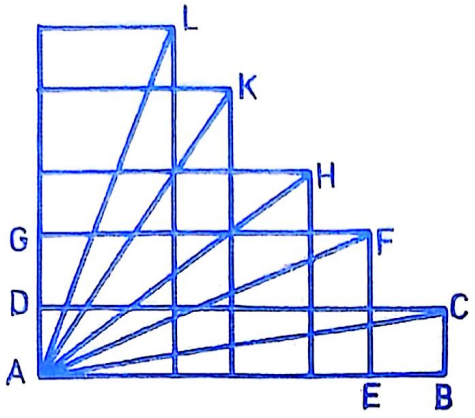
Numitorul este mai mare decît 1, deci $x < R$. Problema admite o soluție oricare ar fi numărul k.

15.3.23. *Soluția I.* Figura 56 reprezintă mai multe dreptunghiuri $ABCD$, $AEFG$ ș.a.m.d. care au același perimetru. Diagonala primului dreptunghi este AC. Cînd micșorăm baza și mărim înălțimea cu aceeași lungime, obținem un dreptunghi $AEFG$ a cărui diagonală $AF < AC$; tot așa, $AH < AF$ ș.a.m.d., diagonala scade. Dar de la o vreme, cînd baza dreptunghiului devine mai mică decît înălțimea,

diagonala începe să crească, $AL > AK$. Se pare că diagonala este minimă cînd laturile dreptunghiului sînt congruente.

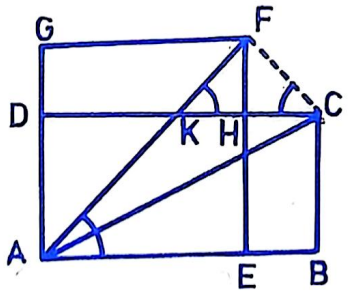
Fie deci (fig. 57) $ABCD$ și $AEFG$ un dreptunghi și un pătrat care au același perimetru. Trebuie să demonstrăm că $AF < AC$. Dacă pentru a trece de la dreptunghi la pătrat am micșorat baza cu un segment EB, trebuie să mărim

Fig. 56



înălțimea cu un segment DG de aceeași lungime, deci $DG \equiv EB$, deci $HF \equiv HC$, triunghiul FHC este dreptunghic și isoscel, deci $\hat{C} = 45°$. Triunghiul FAE arată că $\hat{A} = 45°$, deci $\hat{K} = 45°$ (coresp.). Triunghiul FCK arată că $\hat{F} = 90°$, $AF \perp FC$. Problema este rezolvată. Diagonala AF este perpendiculara din A pe dreapta FC, pe cînd diagonala AC a oricărui alt dreptunghi este o oblică dusă din A pe dreapta FC, deci $AF < AC$.

Fig. 57



Soluția II. Punem întîi o altă problemă. Fie a și b dimensiunile unui dreptunghi $a > b$, și x un număr pozitiv oarecare. Dacă mărim latura b cu x, trebuie să micșorăm latura a tot cu x, ca perimetrul dreptunghiului să rămînă neschimbat. Atunci dimensiunile dreptunghiului devin $a+x$ și $b-x$, și diagonala devine $\sqrt{(a-x)^2+(b+x)^2}$. Ne propunem să determinăm x astfel încît lungimea diagonalei să fie un număr dat d. Ecuația este

$$\sqrt{(a-x)^2+(b+x)^2} = d.$$

Ridicăm ecuația la pătrat. După efectuarea tuturor calculelor ea devine

$$2x^2 - 2(a-b)x + a^2 + b^2 - d^2 = 0.$$

Realizantul ei se poate pune sub forma

$$\Delta = 2d^2 - (a+b)^2 =$$

$$= (d\sqrt{2} - a - b)(d\sqrt{2} + a + b).$$

Condiția ca ecuația să aibă rădăcini reale este ca Δ să fie $\geqslant 0$. Factorul al doilea este pozitiv, deci trebuie ca primul factor să fie $\geqslant 0$,

$$d\sqrt{2} - a - b \geqslant 0; \quad d \geqslant \frac{a+b}{\sqrt{2}}.$$

Rezultă că valoarea cea mai mică pe care o poate avea numărul d este $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. El reprezintă minimul diagonalei. Cînd d ia această valoare, realizantul ecuației devine egal cu zero. Atunci ecuația are rădăcina dublă $x = \frac{a-b}{2}$. Dimensiunile dreptunghiului devin

$$a - x = a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

și $$b + x = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2},$$

deci ele sînt egale. Dreptunghiul devine pătrat. (Alte probleme de maxim și minim care se rezolvă prin această metodă sînt 13.5.17—19.)

Tabela I — Sinus

°	0′	30′	°	0′	30′	°	0′	30′
0	0,000	0,009	30	0,500	0,508	60	0,866	0,870
1	017	026	31	515	523	61	875	879
2	035	044	32	530	537	62	883	887
3	052	061	33	545	552	63	891	895
4	070	078	34	559	566	64	899	903
5	0,087	0,096	35	0,574	0,581	65	0,906	0,910
6	105	113	36	588	595	66	914	917
7	122	131	37	602	609	67	921	924
8	139	148	38	616	623	68	927	930
9	156	165	39	629	636	69	934	937
10	0,174	0,182	40	0,643	0,649	70	0,940	0,943
11	191	199	41	656	663	71	946	948
12	208	216	42	669	676	72	951	954
13	225	233	43	682	688	73	956	959
14	242	250	44	695	701	74	961	964
15	0,259	0,267	45	0,707	0,713	75	0,966	0,968
16	276	284	46	719	725	76	970	972
17	292	301	47	731	737	77	974	976
18	309	317	48	743	749	78	978	980
19	326	334	49	755	760	79	982	983
20	0,342	0,350	50	0,766	0,772	80	0,985	0,986
21	358	367	51	777	783	81	988	989
22	375	383	52	788	793	82	990	991
23	391	399	53	799	804	83	993	994
24	407	415	54	809	814	84	995	995
25	0,423	0,431	55	0,819	0,824	85	0,996	0,997
26	438	446	56	829	834	86	998	998
27	454	462	57	839	843	87	999	999
28	469	477	58	848	853	88	999	1,000
29	485	492	59	857	862	89	1,000	1,000
						90	1,000	

Tabela II — Cosinus

°	0′	30′	°	0′	30′	°	0′	30′
0	1,000	1,000	30	0,866	0,862	60	0,500	0,492
1	1,000	1,000	31	857	853	61	485	477
2	0,999	0,999	32	848	843	62	469	462
3	999	998	33	839	834	63	454	446
4	998	997	34	829	824	64	438	431
5	0,996	0,995	35	0,819	0,814	65	0,423	0,415
6	995	994	36	809	804	66	407	399
7	993	991	37	799	793	67	391	383
8	990	989	38	788	783	68	375	367
9	988	986	39	777	772	69	358	350
10	0,985	0,983	40	0,766	0,760	60	0,342	0,334
11	982	980	41	755	749	71	326	317
12	978	976	42	743	737	72	309	301
13	974	972	43	731	725	73	292	284
14	970	968	44	719	713	74	276	267
15	0,966	0,964	45	0,707	0,701	75	0,259	0,250
16	961	959	46	695	688	76	242	233
17	956	954	47	682	676	77	225	216
18	951	948	48	669	663	78	208	199
19	946	943	49	656	649	79	191	182
20	0,940	0,937	50	0,643	0,636	80	0,174	0,165
21	934	930	51	629	623	81	156	148
22	927	924	52	616	609	82	139	131
23	921	917	53	602	595	83	122	113
34	914	910	54	588	581	84	105	096
25	0,906	0,903	55	0,574	0,566	85	0,087	0,078
26	899	895	56	559	552	86	070	061
27	891	887	57	545	537	87	052	044
28	883	879	58	530	523	88	035	026
29	875	870	59	515	508	89	017	009
						90	0,000	

Tabela III — Tangenta

°	0′	30′	°	0′	30′	°	0′	30′
0	0,000	0,009	30	0,577	0,589	60	1,732	1,767
1	017	026	31	601	613	61	804	1,842
2	035	044	32	625	637	62	881	1,921
3	052	061	33	649	662	63	963	2,006
4	070	079	34	675	687	64	2,050	2,097
5	0,087	0,096	35	0,700	0,713	65	2,145	2,194
6	105	114	36	727	740	66	246	2,300
7	123	132	37	754	767	67	356	2,414
8	141	149	38	781	795	68	475	2,539
9	158	167	39	810	824	69	605	2,675
10	0,176	0,185	40	0,839	0,854	70	2,747	2,824
11	194	203	41	869	885	71	2,904	2,989
12	213	222	42	900	916	72	3,078	3,172
13	231	240	43	933	949	73	271	3,376
14	249	259	44	966	983	74	487	3,606
15	0,268	0,277	45	1,000	1,018	75	3,732	3,867
16	287	296	46	036	054	76	4,011	4,165
17	306	315	47	072	091	77	4,331	4,511
18	325	335	48	111	130	78	4,705	4,915
19	344	354	49	150	171	79	5,145	5,396
20	0,364	0,374	50	1,192	1,213	80	5,671	5,976
21	384	394	51	235	257	81	6,314	6,691
22	404	414	52	280	303	82	7,115	7,596
23	424	435	53	327	351	83	8,144	8,777
24	445	456	54	376	402	84	9,514	10,385
25	0,466	0,477	55	1,428	1,455	85	11,430	12,706
26	488	499	56	483	511	86	14,301	16,350
27	510	521	57	540	570	87	19,081	22,904
28	532	543	58	600	632	88	28,636	38,188
29	554	566	59	664	698	89	57,290	114,589

Tabela IV — Cotangenta

°	0′	30′	°	0′	30′	°	0′	30′
0		114,589	30	1,732	1,698	60	0,577	0,566
1	57,290	38,188	31	664	632	61	554	543
2	28,636	22,904	32	600	570	62	532	521
3	19,081	16,350	33	540	511	63	510	499
4	14,301	12,706	34	483	455	64	488	477
5	11,430	10,385	35	1,428	1,402	65	0,466	0,456
6	9,514	8,777	36	376	351	66	445	435
7	8,144	7,596	37	327	303	67	424	414
8	7,115	6,691	38	280	257	68	404	394
9	6,314	5,976	39	235	213	69	384	374
10	5,671	5,396	40	1,192	1,171	70	0,364	0,354
11	5,145	4,915	41	150	130	71	344	335
12	4,705	4,511	42	111	091	72	325	315
13	4,331	4,165	43	072	054	73	306	296
14	4,011	3,867	44	036	018	74	287	277
15	3,732	3,606	45	1,000	0,983	75	0,268	0,259
16	3,487	3,376	46	966	0,949	76	249	240
17	3,271	3,172	47	933	916	77	231	222
18	3,078	2,989	48	900	885	78	213	203
19	2,904	2,824	49	869	854	79	194	185
20	2,747	2,675	50	0,839	0,824	80	0,176	0,167
21	2,605	2,539	51	810	795	81	158	149
22	2,475	2,414	52	781	767	82	141	132
23	2,356	2,300	53	754	740	83	123	114
24	2,246	2,194	54	727	713	84	105	096
25	2,145	2,097	55	0,700	0,687	85	0,087	0,079
26	2,050	2,006	56	675	662	86	070	061
27	1,963	1,921	57	649	637	87	052	044
28	1,881	1,842	58	625	613	88	035	026
29	1,804	1,767	59	601	589	89	017	009
						90	0,000	

CUPRINS

Cap. 1. GENERALITĂȚI. DREAPTA. UNGHIURI

1.1. Generalități 7/141
1.2. Dreapta 8/141
1.3. Unghiuri 9/142

Cap. 2 TRIUNGHIUL

2.1. Construcții de triunghiuri 15/148
2.2. Congruența triunghiurilor 15/148
2.3. Triunghiul isoscel..... 18/149
2.4. Mediatoarea. Bisectoarea.. 20/150

Cap. 3. DREPTE PARALELE. SUMA UNGHIURILOR UNUI TRIUNGHI

3.1. Drepte paralele..... 23/152
3.2. Suma unghiurilor unui triunghi 26/153
3.3. Unghi exterior 30/156
3.4. Suma unghiurilor unui poligon 31/157
3.5. Probleme diverse..... 32/158

Cap. 4. NEEGALITĂȚI

4.1. Perpendiculare și oblice.. 35/161
4.2. Relații între laturile unui triunghi 35/161
4.3. Relații între laturile și unghiurile unui triunghi 36/162
4.4. Probleme diverse..... 37/163

Cap. 5. PATRULATERE

5.0. Recapitulare 39/165
5.1. Patrulaterul oarecare 39/166
5.2. Paralelogramul 40/172
5.3. Dreptunghiul 44/175
5.4. Rombul 45/176
5.5. Pătratul 46/177
5.6. Trapezul 48/177
5.7. Trapezul isoscel..... 48/178
5.8. Probleme diverse..... 49/179

Cap. 6. CERCUL

6.0. Recapitulare 51/181
6.1. Definiția. Construcții 51/181
6.2. Tangenta la cerc..... 52/182
6.3. Simetria cercului 54/183
6.4. Unghi înscris..... 56/187
6.5. Unghi înscris într-un semicerc 59/192
6.6. Unghi format de o tangentă și o secantă..... 61/193
6.7. Tangentele duse dintr-un punct la un cerc..... 62/194
6.8. Patrulaterul inscriptibil .. 63/196
6.9. Probleme diverse..... 64/198

Cap. 7. POLIGOANE REGULATE

Poligoane regulate 66/202

Cap. 8. ASEMĂNARE

8.1. Raportul a două segmente 69/208
8.2. Teorema lui Tales..... 70/210
8.3. Poligoane asemenea..... 72/211
8.4. Triunghiuri asemenea 74/214
8.5. Linia mijlocie a triunghiului 78/221
8.6. Linia mijlocie a trapezului 80/224
8.7. Probleme diverse..... 81/226

Cap. 9. RELAȚII METRICE

9.1. Teorema catetei. Teorema înălțimii 83/231
9.2. Teorema lui Pitagora.... 84/236
9.3. Probleme diverse..... 86/242

Cap. 10. ARII

10.1. Aflarea unor arii..... 88/244
10.2. Comparații de arii..... 91/251
10.3. Raportul ariilor a două poligoane asemenea 93/255

10.4. Demonstrații bazate pe arii 94/259
10.5. Transformări care păstrează aria 96/262

Cap. 11. DREPTE ȘI PLANE ÎN SPAȚIU

11.1. Reprezentarea corpurilor. Primele noțiuni 97/264
11.2. Drepte și plane paralele 99/265
11.3. Dreaptă perpendiculară pe un plan..... 100/266
11.4. Teorema celor trei perpendiculare 101/267
11.5. Unghi format de o dreaptă cu un plan..... 102/268
11.6. Unghiuri diedre 103/269

Cap. 12. POLIEDRE

12.1. Prisma 105/271
12.2. Piramida 109/284
12.3. Trunchiul de piramidă.. 114/290
12.4. Probleme diverse..... 112/291

Cap. 13. CORPURI DE ROTAȚIE

13.1. Cilindrul 115/297
13.2. Conul..... 117/298
13.3. Trunchiul de con..... 119/301
13.4. Sfera 120/304
13.5. Probleme diverse..... 123/306

Cap. 14. PROBLEME DE MAXIM ȘI MINIM

14.1. Chestiuni de geometrie plană 126/313
14.2. Chestiuni de geometrie în spațiu 128/325

Cap. 15. PROBLEME DIVERSE

15.1. Demonstrații indirecte .. 129/328
15.2. Unde-i greșeala?..... 130/331
15.3. Diverse 137/336

Nr. colilor de tipar : 22
Bun de tipar : 03.02.1982

Com. nr. 10.484/6475
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
București — R.S.R.

Lei 28